This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH

PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT X.

DECEMBER 1883.

BERLIN 1883.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI FERD. DÜMMLER'S VERLAGSBUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN.

Beigefügt sind der Titel und das Inhalts-Verzeichniss für den Jahrgang 1883, sowie das Namen- und Sachregister.

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH

PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT X.

DECEMBER 1883.

BERLIN 1883.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN

Beigefügt sind der Titel und das Inhalts-Verzeichniss für den Jahrgang 1883, sowie das Namen- und Sachregister.

47. Über die Existenzdauer der unterschwefligen Säure in wässerigen Lösungen.

Von H. Landolt.

(Vorgetragen am 18. October; — gedruckt im Bericht vom 13. December [St. L]; — ausgegeben am 20. December.)

Fügt man zu einer Lösung von Natriumhyposulfit eine Säure, so fängt bekanntlich die nach der Vermischung zuerst vollkommen klare Flüssigkeit nach kurzer Zeit, und zwar einigen Secunden bis Minuten, an sich zu trüben, indem die vorhandene freie unterschweflige Säure in schweflige Säure und Schwefel zerfällt ($H_2S_2O_3 = H_2SO_3 + S$). Wie ebenfalls bereits bekannt ist, beginnt die Abscheidung des Schwefels um so schneller, je concentrirter die Lösungen sind, und ferner wird sie beschleunigt durch Temperaturerhöhung.

Indem ich mir die Aufgabe stellte, den Einfluss der Wassermenge sowie der Temperatur auf die Existenzdauer der unterschwefligen Säure näher zu ermitteln, handelte es sich zuerst um die Frage, ob unter gleichen Bedingungen jene Zeit überhaupt constant und mit der Uhr hinreichend sicher messbar ist. Einige Vorprüfungen zeigten bald, dass in der That übereinstimmende Zahlen resultiren, wenn in folgender Weise verfahren wird: In ein Becherglas bringt man eine abgemessene Menge wässeriger Lösung von unterschwefligsaurem Natron, in ein zweites ein ebenfalls bestimmtes Volumen verdünnter Säure (Schwefelsäure, Oxalsäure etc.), taucht in jedes Glas ein Thermometer und setzt beide in ein Wasserbad von gewisser Temperatur. Sind nach öfterm Umrühren die Thermometerstände gleich geworden, so giesst man plötzlich die eine Flüssigkeit in die andere und beginnt in demselben Augenblicke die Zeitmessung mittelst einer Secundenuhr. Kurz vor dem Momente der eintretenden Zersetzung, welcher durch einen Vorversuch annähernd bestimmt worden ist, hebt man das Becherglas gegen durchfallendes Licht, und sowie die erste Trübung von abgeschiedenem Schwefel erscheint, wird die Uhr arretirt. Ist die Concentration der Flüssigkeiten sowie die Temperatur der Art, dass die Erhaltungsdauer der unterschwefligen Säure nicht mehr als etwa ein

halbe Minute beträgt, so zeigen wiederholte Beobachtungen keine grössere Differenzen als 1.5 Sec., meist betragen dieselben bloss zehntel Secunden. Bei grössern Verdünnungen oder niedrigen Temperaturen erfolgt dagegen die Abscheidung des Schwefels sehr langsam, es zeigt sich dann anfangs nur ein äusserst feiner milchiger Schimmer, der allmälig stärker wird, und man kann hier über die Zeitbestimmung etwas unsicher sein, so dass Abweichungen von mehreren Secunden auftreten. In diesen Fällen wird am zweckmässigsten die erste für das Auge soeben sichtbare Trübung als Merkmal genommen. Über die Grösse der unter verschiedenen Umständen auftretenden Beobachtungsfehler giebt die nachfolgende Tabelle II nähern Aufschluss.

Hat die Zersetzung der unterschwefligen Säure begonnen, so schreitet dieselbe allmälig weiter, und der Zeitpunkt ihrer Beendigung schiebt sich um so weiter hinaus, je verdünnter die Flüssigkeit ist. Diese Dauer kann bis zu mehreren Stunden betragen.

Nachdem festgestellt war, dass bei gleicher Zusammensetzung der Flüssigkeiten und gleicher Temperatur die Erhaltungsdauer der unterschwefligen Säure constant ist, erschienen noch folgende Vorversuche nöthig:

a) Die Prüfung, ob die Natur der zur Zersetzung angewandten Säure einen Einfluss ausübt. Zu diesem Zwecke wurden je 100^{ccm} Natriumhyposulfitlösung enthaltend 3.95^{g} $Na_2S_2O_3$ mit 100^{ccm} verschiedener wässeriger Säuren von solchem Gehalt, dass gerade vollständige Zersetzung des Salzes erfolgen musste, zusammengebracht. Bei der Temperatur 20° ergaben sich folgende Zeiten bis zur eintretenden Schwefelabscheidung:

Schwefelsäure	16.2 Sec.
Chlorwasserstoffsäure	15.8 »
Oxalsäure	16.1 »
Essigsäure	16.4 »

Diese Zahlen liegen vollständig innerhalb der Beobachtungsfehler (vergl. Tab. II), es hat also die Natur der Säure resp. des aus derselben entstandenen Natriumsalzes keine Wirkung.

b) Um festzustellen ob ein Überschuss von unterschwefligsaurem Natron oder anderseits von der hinzugesetzten Säure Veränderungen hervorbringen kann, wurden die Substanzen in den nachstehenden 4 Molecularverhältnissen gemischt. Das Salz war bei jedem Versuch in 100, die Säure (Oxalsäure) in 300^{ccm} Wasser gelöst, und nach der Mischung enthielt die Flüssigkeit stets auf je 1 Mol. gebildeter $H_2S_2O_3$ 222 Mol. Wasser oder auf je 1^{g} $H_2S_2O_3$ 35.0^{g} Wasser. Die Versuchstemperatur betrug 20°.

			Beob. Zeit.
I	$2Na_2S_2O_3$ +	$C_2H_2O_4$	8.3 Sec.
	15.8^g	4.5^g	
II	$Na_2S_2O_3$ +	$C_2H_2O_4$	8.5 »
	15.8^g	9.0^g	
III	$Na_2S_2O_3$ +	$2C_2H_2O_4$	8.0 »
	15.8^g	18.0^g	
IV	$Na_2S_2O_3$ +	$3C_2H_2O_4$	8.0 »
	15.8^g	27.0^g	

Aus der Gleichheit der erhaltenen Zahlen folgt, dass ein Einfluss der genannten Art nicht stattfindet.

c) Endlich war zu versuchen, ob die absolute Menge Flüssigkeit eine Wirkung ausübt. Es wurden Lösungen von Natriumhyposulfit und Oxalsäure, welche in gleichem Volum die Körper in dem Molecularverhältniss $Na_2S_2O_3 : 2C_2H_2O_4$ enthielten, in folgenden Mengen bei der Temperatur 20° zusammengebracht:

	Hyposulfitlösung	Oxalsäurelösung	Beob. Zeit.
I	100^{ccm}	100^{ccm}	16.2 Sec.
II	200^{ccm}	200^{ccm}	16.0 »
III	300^{ccm}	300^{ccm}	16.0 »

Also auch in dieser Hinsicht tritt kein Einfluss zu Tage.

Nach diesen Vorprüfungen konnte dazu übergegangen werden, die Abhängigkeit der Existenzdauer der unterschwefligen Säure von der Menge des in der Mischung vorhandenen Wassers sowie von der Temperatur zu bestimmen. Bei diesen Versuchen wurde zur Zersetzung des Natriumhyposulfits Oxalsäure angewandt, und die Körper stets in dem Molecularverhältniss $Na_2S_2O_3 : 2C_2H_2O_4$, in verschieden concentrirten Lösungen zusammengebracht. Als Grenzen der Verdünnungen mussten 51 bis 280 Gewichtstheile Wasser auf 1 Gewichtstheil entstandener $H_2S_2O_3$, und als Temperaturintervall 10° bis 50° innegehalten werden, weil ausserhalb dieser Verhältnisse entweder eine zu grosse Langsamkeit oder anderseits Schnelligkeit in der Zersetzung der unterschwefligen Säure eintrat, welche die Zeitbestimmung zu unsicher machte. Indem ich mich bemühte, genau die Temperaturen 10°, 20°, 30°, 40°, 50° anzuwenden, war noch auf folgenden Punkt zu achten. Die Zersetzung des unterschwefligsauren Natrons durch eine Säure ist, wie bereits J. THOMSEN[1] nachgewiesen hat, mit einer Wärmeabsorption verknüpft, es sinkt daher die Temperatur im Momente des Mischens der zwei Flüssigkeiten um eine gewisse Grösse, und zwar betrug diese bei den angewandten Flüssigkeitsmengen 0.2

[1] J. THOMSEN, Bericht d. D. chem. Gesellsch. Bd. 5. S. 1015.

bis 0.8°. Um diesem Umstande Rechnung zu tragen, wurde bei jeder Mischung durch einen Vorversuch die eintretende Temperaturerniedrigung bestimmt, und hierauf sowohl die Natriumhyposulfit- wie die Oxalsäurelösung um diesen Betrag höher erwärmt, so dass nach dem Zusammengiessen sich möglichst genau der verlangte Thermometerstand einstellte. Diesen letztern immer mit Sicherheit hervorzurufen und ferner solange constant zu erhalten, bis die Zersetzung der unterschwefligen Säure begann, bot indess namentlich bei den verdünnteren Mischungen und höheren Temperaturen einige Schwierigkeit, und es war häufig nicht zu vermeiden, dass das Thermometer während der Zeitbestimmung um einige zehntel Grade sank. Da die Existenzdauer der unterschwefligen Säure sich mit der Temperatur sehr rasch ändert, so bedingte dieser Umstand zum Theil die Differenzen in den Beobachtungen. — Schliesslich ist noch zu bemerken, dass zu den Zeitmessungen eine Secundenuhr von C. L. Weidemann in Genf benutzt wurde, deren Zeiger sich nacheinander auslösen, arretiren und auf den Nullpunkt zurückführen liess. Das Zifferblatt war in fünftel Secunden getheilt.

Zur Darstellung der Mischungen dienten folgende Flüssigkeiten, welche bei 19° dargestellt und bei derselben Temperatur mit Pipetten abgemessen wurden:

1. Oxalsäurelösung mit 63^g $C_2H_2O_4 + 2H_2O$ im Liter.
$100^{ccm} = 112.118^g$ enthalten 4.5^g $C_2H_2O_4$ und 97.618^g H_2O.

2. Natriumsulfitlösung A mit 62^g $Na_2S_2O_3 + 5H_2O$ im Liter.
$100^{ccm} = 103.132^g$ enthalten 3.95^g $Na_2S_2O_3$ und 99.192^g H_2O.

3. Natriumsulfitlösung B mit 124^g $Na_2S_2O_3 + 5H_2O$ im Liter
$100^{ccm} = 106.224^g$ enthalten 7.9^g $Na_2S_2O_3$ und 98.324^g H_2O.

4. Wasser von der Temperatur 19°.
$100^{ccm} = 99.846^g$.

Mit Hülfe dieser Flüssigkeiten sind acht verschiedene Mischungen hergestellt worden, deren Zusammensetzung aus nachstehender Tabelle I ersichtlich ist. Die zu der Natriumhyposulfit- und Oxalsäurelösung zugesetzte Wassermenge (Col. 4) wurde vor dem Mischen auf diese beiden Flüssigkeiten zu gleichen Hälften vertheilt.

Tabelle I.

Mischung No.	Gemischte Volume: Hyposulfitlösung ccm	Oxalsäurelösung ccm	Wasser ccm	Berechnete Gewichtsmengen der Substanzen: $Na_2S_2O_3$ g	$C_2H_2O_4$ g	H_2O g	Entstandene Menge $H_2S_2O_3$ g	Die Mischung enthält nach der Zersetzung: Gramme Wasser auf 1 g $H_2S_2O_3$	Molecüle Wasser auf 1 Mol. $H_2S_2O_3$
I	B) 100	200	—	7.9	9.0	293.560	5.7	51.50	326
II	A) 100	100	—	3.95	4.5	196.800	2.85	69.05	437
III	A) 100	100	100	3.95	4.5	296.646	2.85	104.09	659
IV	A) 100	100	200	3.95	4.5	396.492	2.85	139.12	881
V	A) 50	50	150	1.975	2.25	248.169	1.425	174.15	1103
VI	A) 50	50	200	1.975	2.25	298.092	1.425	209.19	1325
VII	A) 50	50	250	1.975	2.25	348.015	1.425	244.22	1547
VIII	A) 50	50	300	1.975	2.25	397.938	1.425	279.25	1769

Für jede dieser Mischungen sind bei mehrfacher Wiederholung der Versuche folgende Zeiten bis zum Eintritt der Schwefelabscheidung beobachtet worden:

Tabelle II.

Mischung No.	Temp.	Beobachtete Existenzdauer der unterschwefligen Säure in Secunden	Mittel Sec.
I	10°	22.0 — 22.0 — 21.0	21.7
	20	12.0 — 10.9 — 11.7	11.5
	30	6.5 — 6.4	6.45
	40	3.4 — 3.9 — 3.5	3.6
	50	2.4 — 2.0	2.2
II	10°	29.5 — 27.0 — 30.0	28.8
	20	{ 16.5 — 16.0 — 15.6 — 16.6 — 16.0 } { 15.5 — 16.5 — 16.2 — 16.0 — 16.0 }	16.1
	30	9.2 — 8.0 — 9.0	8.7
	40	5.0 — 4.4 — 4.7	4.7
	50	3.0 — 3.2	3.1
III	10°	42.6 — 44.0 — 45.2 — 41.4	43.3
	20	24.5 — 23.5	24.0
	30	13.0 — 12.5	12.75
	40	7.3 — 6.9 — 6.4 — 7.8	7.1
	50	4.4 — 4.1 — 4.7	4.4

Tabelle II. (Fortsetzung.)

Mischung No.	Temp.	Beobachtete Existenzdauer der unterschwefligen Säure in Secunden	Mittel Sec.
IV	10°	58.0 — 57.5 — 56.0 — 58.8 — 59.7	58.0
	20	32.0 — 32.0 — 32.5 — 34.0	32.6
	30	17.2 — 16.4 — 15.8	16.5
	40	9.0 — 9.4	9.2
	50	5.0 — 6.0 — 5.8	5.6
V	10°	73.0 — 75.0 — 71.9 — 76.1	74.0
	20	40.5 — 40.5 — 38.5 — 42.0	40.4
	30	20.1 — 21.0	20.55
	40	11.4 — 11.1 — 12.8 — 11.7 — 10.0	11.4
	50	6.8 — 7.3	7.05
VI	10°	87.0 — 83.8 — 87.8	86.2
	20	48.0 — 49.0 — 49.2 — 47.5	48.4
	30	25.5 — 26.7 — 24.3	25.5
	40	15.0 — 14.2 — 14.7	14.6
	50	8.5 — 9.2 — 7.8	8.5
VII	10°	105.5 — 100.9 — 97.0 — 102.2 — 104.7	102.1
	20	54.5 — 59.1 — 55.6 — 60.0 — 55.6 — 56.8	56.9
	30	29.8 — 29.0 — 30.0	29.6
	40	16.2 — 16.6	16.4
	50	10.3 — 9.6 — 11.0	10.3
VIII	10°	116.0 — 121.0 — 118.2	118.4
	20	65.0 — 63.0 — 61.5 — 66.5	64.0
	30	32.0 — 33.0 — 32.2 — 34.8	33.0
	40	20.5 — 19.2 — 18.8	19.5
	50	11.6 — 11.2	11.4

Aus diesen Beobachtungen ergiebt sich Folgendes:

1. Bezüglich des Einflusses verschiedener Wassermengen auf die Erhaltungsdauer der unterschwefligen Säure findet man, dass die letztere stets um so grösser wird, je verdünnter die Flüssigkeit ist. Um das Verhältniss näher festzustellen, wurden die für eine bestimmte Temperatur beobachteten Existenzzeiten E durch die Anzahl Gew.-Th. Wasser n dividirt, welche auf 1 Gew.-Th. $H_2S_2O_3$ in den verschiedenen Mischungen enthalten waren. Der Quotient E : n giebt dann die verzögernde Wirkung von je 1 Gew.-Th. Wasser an. Diese Rechnung ist in der folgenden Tabelle III ausgeführt.

Tabelle III.

Mischung No.	Gew. Th. Wasser auf 1 Gew. Th. $H_2S_2O_3$ n	Temp. 10°		Temp. 20°		Temp. 30°		Temp. 40°		Temp. 50°	
		E	$\frac{E}{n}$	E	$\frac{E}{n}$	E	$\frac{E}{n}$	E	$\frac{E}{n}$	E	$\frac{E}{n}$
I.	51.50	21.7	0.421	11.5	0.223	6.45	0.125	3.6	0.0699	2.2	0.0427
II.	69.05	28.8	0.417	16.1	0.232	8.7	0.126	4.7	0.0680	3.1	0.0449
III.	104.09	43.3	0.416	24.0	0.230	12.75	0.122	7.1	0.0682	4.4	0.0423
IV.	139.12	58.0	0.417	32.6	0.234	16.5	0.119	9.2	0.0661	5.6	0.0403
V.	174.15	74.0	0.425	40.4	0.232	20.55	0.118	11.4	0.0655	7.05	0.0405
VI.	209.19	86.2	0.412	48.4	0.231	25.5	0.122	14.6	0.0698	8.5	0.0406
VII.	244.22	102.1	0.418	56.9	0.233	29.6	0.121	16.4	0.0672	10.3	0.0422
VIII.	279.25	118.4	0.424	64.0	0.229	33.0	0.118	19.5	0.0698	11.4	0.0408

Vergleicht man die bei einer bestimmten Temperatur erhaltenen Quotienten E:n miteinander, so fällt eine so nahe Übereinstimmung derselben in die Augen, dass unzweifelhaft der Einfluss von je 1 Gewichtstheil Wasser als ein völlig constanter angesehen werden darf. Es folgt daher der Satz:

Die Existenzdauer der unterschwefligen Säure in ihren wässerigen Lösungen ist bei constanter Temperatur genau proportional der auf 1 Gewichtstheil $H_2S_2O_3$ vorhandenen Anzahl Gewichtstheile Wasser.

Wird das Mittel der aus den acht Mischungen resultirenden Quotienten genommen, so erhält man für eine beliebige Lösung mit n Gewichtstheilen Wasser auf 1 Gewichtstheil $H_2S_2O_3$ folgende Formeln zur Berechnung ihrer Erhaltungszeit in Secunden:

Temp. 10°: $E = 0.419\ n$
» 20°: $E = 0.231\ n$
» 30°: $E = 0.121\ n$
» 40°: $E = 0.0681\ n$
» 50°: $E = 0.0418\ n$

Die so berechneten Existenzzeiten weichen von den beobachteten, wie aus folgender Tabelle ersichtlich, in den meisten Fällen nur um Bruchtheile von Secunden ab.

Tabelle IV.

Mischung No.	n	Temp. 10°			Temp. 20°			Temp. 30°			Temp. 40°			Temp. 50°		
		E ber.	E beob.	Diff.	E ber.	E beob.	Diff.	E ber.	E beob.	Diff.	E ber.	E beob.	Diff.	E ber.	E beob.	Diff.
I	51.50	21.6	21.7	— 0.1	11.9	11.5	+ 0.4	6.2	6.5	— 0.3	3.5	3.6	+ 0.1	2.2	2.2	0.0
II	69.05	28.9	28.8	+ 0.1	16.0	16.1	— 0.1	8.4	8.7	— 0.3	4.7	4.7	0.0	2.9	3.1	— 0.2
III	104.09	43.6	43.3	+ 0.3	24.6	24.0	+ 0.6	12.6	12.8	— 0.2	7.1	7.1	0.0	4.4	4.4	0.0
IV	139.12	58.3	58.0	+ 0.3	32.1	32.6	— 0.5	16.8	16.5	+ 0.3	9.5	9.2	+ 0.3	5.8	5.6	+ 0.2
V	174.15	73.0	74.0	— 1.0	40.2	40.4	— 0.2	20.6	20.6	0.0	11.9	11.4	+ 0.5	7.3	7.1	+ 0.2
VI	209.19	87.7	86.2	+ 1.5	48.3	48.4	— 0.1	25.3	25.5	— 0.2	14.2	14.6	— 0.4	8.7	8.5	+ 0.2
VII	244.22	102.3	102.1	+ 0.2	56.4	56.9	— 0.5	29.6	29.6	0.0	16.6	16.4	+ 0.2	10.2	10.3	— 0.1
VIII	279.25	117.0	118.4	— 1.4	64.5	64.0	+ 0.5	33.8	33.0	+ 0.8	19.0	19.5	— 0.5	11.7	11.4	+ 0.3

Die Proportionalität zwischen der Erhaltungsdauer der unterschwefligen Säure und der Wassermenge drückt sich selbstverständlich auch aus, wenn man die letztere in Molecülen angiebt. Dividirt man die bei den verschiedenen Temperaturen erhaltenen Existenzzeiten E durch die Anzahl Molecüle Wasser m, welche auf 1 Mol. $H_2S_2O_3$ vorhanden sind (siehe Tabelle I), so ergeben sich wieder constante Quotienten. Tabelle V enthält diese Rechnung.

Tabelle V.

Mischung No.	Mol. Wasser auf 1 Mol. $H_2S_2O_3$ m	Temp. 10°	Temp. 20°	Temp. 30°	Temp. 40°	Temp. 50°
		$\frac{E}{m}$	$\frac{E}{m}$	$\frac{E}{m}$	$\frac{E}{m}$	$\frac{E}{m}$
I	326	0.0666	0.0353	0.0198	0.0110	0.00681
II	437	.0659	.0368	.0199	.0108	.00709
III	659	.0657	.0364	.0193	.0108	.00668
IV	881	.0658	.0370	.0187	.0104	.00636
V	1103	.0671	.0366	.0186	.0103	.00639
VI	1325	.0651	.0365	.0192	.0110	.00642
VII	1547	.0660	0368	.0191	.0106	.00666
VIII	1769	.0669	.0362	.0186	.0110	.00644
	Mittel:	0.0661	0.0365	0.0192	0.0107	0.00673

2. Der Einfluss, welchen die Temperatur auf die Existenzzeit der unterschwefligen Säure ausübt, lässt sich aus nachstehender Tabelle VI ersehen:

Tabelle VI.

Temperatur	I n = 51.50		II n = 69.05		III n = 104.09		IV n = 139.12		V n = 174.15		VI n = 209.19		VII n = 244.22		VIII n = 279.25	
	E	Diff.	E	Diff.	E	Diff.	E	Diff.	E	Diff.	E	Diff.	E	Diff.	E	Diff.
10°	21.7		28.8		43.3		58.0		74.0		86.2		102.1		118.4	
		10.2		**12.7**		**19.3**		**25.4**		**33.6**		**37.8**		**45.2**		**54.4**
20°	11.5		16.1		24.0		32.6		40.4		48.4		56.9		64.0	
		5.0		**7.4**		**11.2**		**16.1**		**19.8**		**22.9**		**27.3**		**31.0**
30°	6.5		8.7		12.8		16.5		20.6		25.5		29.6		33.0	
		2.9		**4.0**		**5.7**		**7.3**		**9.2**		**10.9**		**13.2**		**13.5**
40°	3.6		4.7		7.1		9.2		11.4		14.6		16.4		19.5	
		1.4		**1.6**		**2.7**		**3.6**		**4.3**		**6.1**		**6.1**		**8.1**
50°	2.2		3.1		4.4		5.6		7.1		8.5		10.3		11.4	

Man bemerkt, dass: 1. bei jeder der angewandten Mischungen die Zersetzung um so rascher eintritt, je höher die Temperatur ist; 2. der beschleunigende Einfluss der Wärme mit dem Steigen derselben sich immer mehr vermindert; es werden die einer Temperaturerhöhung von 10° entsprechenden Abnahmen in den Existenzzeiten fortwährend kleiner; 3. die Verminderung der Existenzdauer für die Temperaturdifferenz von 10° um so beträchtlicher ist, je mehr Wasser die Lösungen enthalten.

Ich habe versucht, den Einfluss der Temperatur sowie der Wassermenge durch Combination sämmtlicher Beobachtungen in eine Formel zusammen zu fassen: deren Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wurden. Es ergab sich:

$$E_t = n(0.6428 - 0.02553\,t + 0.000272\,t^2)$$

wobei n eine zwischen 51 und 279 liegende Anzahl Gewichtstheile Wasser auf 1 Gewichtstheil $H_2S_2O_3$ und t eine zwischen 10° und 50° befindliche Temperatur bedeutet. Die berechneten Werthe sind mit dem Mittel der Beobachtungen in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Tabelle VII.

Mischung No.	Temp. 10°			Temp. 20°			Temp. 30°			Temp. 40°			Temp. 50°		
	E ber.	E beob.	Diff.	E ber.	E beob.	Diff.	E ber.	E beob.	Diff.	E ber.	E beob.	Diff.	E ber.	E beob.	Diff.
I	21.4	21.7	− 0.3	12.4	11.5	+ 0.9	6.3	6.5	− 0.2	2.9	3.6	− 0.7	2.4	2.2	+ 0.2
II	28.6	28.8	− 0.2	16.6	16.1	+ 0.5	8.4	8.7	− 0.3	3.9	4.7	− 0.8	3.2	3.1	+ 0.1
III	43.2	43.3	− 0.1	25.1	24.0	+ 1.1	12.7	12.8	− 0.1	6.0	7.1	− 1.1	4.8	4.4	+ 0.4
IV	57.7	58.0	− 0.3	33.5	32.6	+ 0.9	16.9	16.5	+ 0.4	7.9	9.2	− 1.3	6.4	5.6	+ 0.8
V	72.2	74.0	− 1.8	42.0	40.4	+ 1.6	21.2	20.6	+ 0.6	9.9	11.4	− 1.5	8.1	7.1	+ 1.0
VI	86.7	86.2	+ 0.5	50.4	48.4	+ 2.0	25.5	25.5	0.0	11.9	14.6	− 2.7	9.7	8.5	+ 1.2
VII	101.3	102.1	− 0.8	58.8	56.9	+ 1.9	29.7	29.6	+ 0.1	13.9	16.4	− 2.5	11.3	10.3	+ 1.0
VIII	115.8	118.4	− 2.6	67.3	64.0	+ 3.3	34.0	33.0	+ 1.0	15.9	19.5	-	12.9	11.4	+ 1.5

Wie ersichtlich giebt die Formel Zahlen, welche mit dem Mittel der Versuche meist befriedigend übereinstimmen; auch bei den verdünnteren Lösungen, wo grössere Abweichungen auftreten, liegen, wie eine Vergleichung mit Tab. III zeigt, die berechneten Werthe noch innerhalb der Grenzen der Beobachtungen. Für die Temperaturen 20° und 50° liefert die Formel durchweg etwas zu hohe, für 40° zu niedrige Zahlen, und zwar zeigen sich in dem letztern Fall auch die stärksten Differenzen.

Schliesslich führe ich betreffs der plötzlich beginnenden Zersetzung der unterschwefligen Säure noch folgende Beobachtungen an. Fügt man zu einem frisch dargestellten und noch klaren Gemenge von Natriumhyposulfitlösung und Oxalsäure etwas früher bereitete schon getrübte Mischung, so wird die Schwefelabscheidung in der ersteren Flüssigkeit dadurch nicht beschleunigt. Ebenso wenig kann die Zerlegung mittelst Durchleitens eines elektrischen Stromes hervorgerufen werden. Endlich hat auch das Licht keinen Einfluss, es tritt im Dunkeln eine wesentliche Verzögerung der Reaction nicht ein. Dagegen kann die Existenzdauer der unterschwefligen Säure sehr verlangsamt werden durch Zusatz von Alkohol. Beispielsweise zeigte eine Mischung von 50^{ccm} Hyposulfitlösung A, 50^{ccm} Oxalsäure (beide von den früher angeführten Concentrationen), 100^{ccm} Wasser und 200^{ccm} absolutem Alkohol bei der Temperatur von 20° erst nach 81 Sec. Abscheidung von Schwefel, während, wenn statt Alkohol ebensoviel Wasser genommen wird, die Zersetzung schon nach 48 Sec. eintritt. Ferner erhielt sich ein Gemenge von 50^{ccm} Hyposulfitlösung, 50^{ccm} Oxalsäure, 100^{ccm} Wasser und 200^{ccm} Alkohol 510 Sec. = 8 Min. 30 Sec. lang klar; bei Ersetzung des Alkohols durch 200^{ccm} Wasser hätte die Existenzdauer bloss 64 Sec. betragen.[1]

Auf eine Erörterung der Vorstellungen, welche man sich etwa über die Ursache der bloss temporären Existenz der unterschwefligen Säure bilden kann, möchte ich erst eingehen, wenn die Untersuchung einer Anzahl ähnlicher Vorgänge, mit der ich eben beschäftigt bin, zu Ende gelangt ist.

[1] Im Jahresbericht für Chemie 1876. 223 findet sich die Mittheilung, dass nach T. A. Edison das unterschwefligsaure Natron in Terpentinöl in beträchtlicher Menge löslich sein soll, wobei das letztere seinen Geruch fast vollkommen verliere. Ich hoffte durch Versetzen einer solchen Lösung mit Eisessig Flüssigkeiten zu erhalten, in welchen die freie unterschweflige Säure unzerlegt bleibt. Es zeigte sich jedoch, dass jene Angabe nicht richtig ist: 100 Th. Terpentinöl nahmen bei gewöhnlicher Temperatur von entwässertem Natriumhyposulfit bloss 0.055 Th., und von krystallisirtem gar nichts auf; ebenso war keine Abnahme des Geruchs zu bemerken.

48. Über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Depressions-Erscheinungen der Thermometer.

Von Prof. Dr. Rud. Weber
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Hofmann am 29. November: — gedruckt im Bericht vom 13. December [St. L]; — ausgegeben am 20. December.)

Die Veränderung der Lage des bei der Anfertigung der Thermometer bestimmten Gefrierpunktes ist ein vielfach beklagter Übelstand, welcher die Genauigkeit und Zuverlässigkeit ihrer Angaben entschieden abmindert. Die Verschiebung des Eispunktes, die s. g. Depression desselben, beziffert sich häufig auf 0°4—0°5, steigert sich aber zuweilen bis auf 1° und geht selbst darüber hinaus.

Kein Zweifel herrscht darüber, dass das Phänomen in einer Verkleinerung des Quecksilberbehälters beruht. Eine genügende Erklärung dieser Volumveränderung ist indessen bis jetzt nicht gegeben worden. So wird die Ansicht ausgesprochen, dass die Gestaltung dieser Behälter, sowie einerseits die verschiedenen Wandstärken, andererseits die Ungleichmässigkeit der Dicke derselben eine Rolle spiele und dass der Luftdruck einen wesentlichen Factor bilde.[1] Man hat die sphärische Glashülle mit einer Feder verglichen, welche, durch den Atmosphärendruck belastet, eine bis zu einer gewissen Grenze sich steigernde Gestaltsveränderung erleidet. Man hat den Luftdruck als einen wesentlichen Factor auf die Beobachtung hin angesehen, dass ein Fallen eintritt, wenn von solchen Thermometern die Spitzen abgebrochen, oder dieselben einer verminderten Spannung ausgesetzt werden. — Es wird die Depressions-Erscheinung auch auf eine Molecularveränderung des Glases zurückgeführt, von welcher man annimmt, dass sie tief unter dem Schmelzpunkte desselben vor sich geht.[2]

Tritt man nun aber der Frage der Ursache jenes Phänomens näher, so lässt sich nicht verkennen, dass die Gründe dieser für die

[1] Berzelius Jahrb. 3 S. 47.
[2] Compt. rend. T. 91. p. 692 (1880).

Thermometrie so bedeutsamen und nachtheiligen Erscheinung noch nicht genügend ermittelt waren. Trüge nämlich die Gestalt des Behälters einen wesentlichen Theil der Schuld dieser Abweichung, so hätten wohl namhafte Verschiedenheiten sich bei den Instrumenten von sphärisch und cylindrisch gestalteten Quecksilber-Behältern herausstellen müssen, zumal bei letzterer Form die Gleichheit der Wandstärke schwieriger als bei der Kugel erreichbar ist. Auch dass der Luftdruck die Abänderung des Inhalts der Behälter nicht lediglich bedingt, erweist die Beobachtung an offenen Thermometern, bei welchen sich gleichfalls eine Depression herausgestellt hat.

Der Annahme der Veränderung der Thermometer durch Molecularveränderung des Glases fehlt jeder Anhalt über die hierzu Veranlassung gebenden Umstände.

Auf die Vermuthung, dass die Zusammensetzung des Glases bei der Depression eine wichtige Rolle spielt, hat der Verfasser, angeregt durch Aufgaben des Vereins für Gewerbefleiss hierselbst (conf. dessen Verhandlungen von 1873 S. 319), sich nach dieser Richtung hin seit einer längeren Reihe von Jahren beschäftigt.

Auf jenen Gesichtspunkt wurde der Verfasser durch früher von ihm ausgeführte Untersuchungen gelenkt, welche die Beziehungen der chemischen Zusammensetzung der Gläser zu ihrer Widerstandsfähigkeit gegen atmosphärische Einflüsse zum Gegenstande hatten, die zu dem Resultate führten, dass namentlich das Mengenverhältniss von Kalk zu Alkali einen sehr augenfälligen Einfluss auf das chemische Verhalten der Gläser ausübt.

Es wurde hierdurch die Vermuthung nahe gelegt, dass die verschiedene Zusammensetzung auch auf das hier zur Geltung kommende physikalische Verhalten, so auf den Grad der Elasticität, einen maassgebenden Einfluss verursacht.

Um diese Versuche auszuführen, wurden Thermometer theils aus käuflichen Röhren, theils aus Röhren von eigener Schmelzung und zwar in einzelnen Fällen auch in Doppel-Exemplaren, von verschiedener Kugelgrösse hergestellt. Ihre Zusammensetzung wurde durch sorgfältige Bestimmung sämmtlicher Bestandtheile ermittelt. Diese Thermometer wurden in der Nähe des Nullpunktes mit einer Scala von zehntel Graden versehen, genügend gross, um Bruchtheile leicht schätzen zu können. Nachdem nun der Nullpunkt der Thermometer mit Beachtung aller Vorsichtsmaassregeln ermittelt und verzeichnet worden, blieben sie während eines Zeitraumes von $1\frac{1}{2}$—2 Monaten sich selbst überlassen, und darauf wurde die nunmehrige Lage des Nullpunktes festgestellt. Sodann wurden sie 15 Minuten in kochendes Wasser, dann in das Eisbad gebracht, und wiederum die Lage des Nullpunktes

beobachtet. Diese Versuche wurden nach Zeiträumen von mehreren Monaten, oder von längerer Dauer, wiederholt.

Es stellte sich nun eine sehr augenfällige Differenz, wie die beigefügte Tabelle erkennen lässt, hinsichtlich der Depression bei den aus verschieden zusammengesetzten Glassorten gefertigten Instrumenten heraus.

Zur Erläuterung dieser tabellarischen Zusammenstellung sei Folgendes bemerkt:

Es werden zur Zeit viele sowohl für wissenschaftliche als auch für medicinische und technische Zwecke bestimmte Thermometer aus weichen, sehr leichtflüssigen, bleifreien, viel Alkali enthaltenden Glassorten hergestellt. Dieselben lassen sich leicht verarbeiten und haben sich aus diesem Grunde vielfach Eingang als Material zur Herstellung von Glasinstrumenten verschafft.

Um ein solches Glas dürfte es sich bei den Wahrnehmungen von Salleron[1] handeln, welcher fand, dass Aräometer, die in heissen Syrupflüssigkeiten nur wenige Tage sich befanden, um 8° Beaumé falsch geworden waren und bis $0^{gr}6$ am Gewicht verloren hatten.

Von weichen, sehr leicht schmelzbaren, aus einer Thüringer Hütte herstammenden Gläsern, wurden die mit No. 1 und 2 in der Tabelle bezeichneten Thermometer hergestellt und wiederholt während mehrerer Jahre beobachtet.

Das Ergebniss ist ein entschieden ungünstiges, denn die Abweichungen ihrer Angaben beziffern sich auf Beträge bis über 0°6, und durch das Kochen wird der frühere Nullpunkt nicht wieder erreicht.

Wie die Analyse ergiebt, so ist dieses Glas mit Alkalien, von denen sowohl K_2O als auch Na_2O vertreten sind, stark übersetzt, so dass auf 1 CaO, 1.5 $K_2O Na_2O$ kommen. Solche Gläser zeigen auch, wie der Verfasser früher nachgewiesen, eine geringe Widerstandsfähigkeit gegen chemische Einflüsse.

Ein im Besitze des Hrn. Florenz Müller befindliches zehntheiliges Thermometer aus Thüringer Glas, dessen Umhüllungsröhre das Material zur Analyse bildete, zeigte ein wenig befriedigendes Resultat, eine Abweichung von 0°41. Auch dieses hatte einen grossen Gehalt an alkalischen Schmelzmitteln. (Tabelle No. 3.)

Der Verfasser versprach sich von einem aus dem Magnus'schen Laboratorium stammenden Thermometer, welches etwas reicher an Kieselsäure war, dabei einen beträchtlichen Gehalt an Thonerde, nahezu 4 Procent, aufwies, ein günstiges Resultat. Nach den stattgehabten

[1] Compt. rend. 91 p. 690 (1880).

Beobachtungen ist das Ergebniss indessen auch nicht als ein befriedigendes zu bezeichnen. (Tabelle No. 4.)

Das Instrument No. 21 ist aus einer von dem Pariser Glasbläser LANGLET erhaltenen Röhre gefertigt, welche gutes Glas sein sollte. Es zeigt indessen erhebliche Abweichungen. Die Zusammensetzung des Glases ist eine complicirte; es enthält neben Bleioxyd eine namhafte Menge von Kalk.

Das Instrument No. 5 besteht aus gewöhnlichem Flaschenglase, und ist in der Glashütte von FRANK in Charlottenburg gezogen. Es ist ein kalihaltiges Natronglas, erzeugt durch Schmelzung von Glasbrocken und Glassatz. Das Resultat der Beobachtung ist nicht günstig, da sich die Abweichungen bis gegen 0°25 beziffern.

Wesentlich grösser sind die Abweichungen bei dem Instrumente No. 6, welches neben 11 Procent Kali 6 Procent Natron aufweist. Die durch das Lagern eingetretene Veränderung beziffert sich auf über 1°.

Die Thermometer der Tabelle No. 7 und 8, wurden aus gewöhnlichem Hohlglase auf der WARMBRUNN & QUILITZ'schen Hütte hergestellt. Auch hier ist die Abweichung verhältnissmässig gross zu nennen.

Die Instrumente No. 9 und 10 wurden aus Hafenglas der Hütte von BOECK & KERSTEN zu Charlottenburg gezogen. Von diesen Instrumenten ist No. 9, welches namhafte Mengen von Kali neben Natron enthält, mangelhafter als No. 10, worin Natron neben viel weniger Kali sich befindet.

Ein sehr weich componirter Glassatz, No. 11, nahe gleich viel Theile Natron und Kali enthaltend (12 Procent), wurde in der Hütte von BOECK & KERSTEN geschmolzen. Das hieraus hergestellte Thermometer zeigt namentlich bei der letzten Beobachtung eine sehr starke Abweichung.

Aus einer noch leichter schmelzbaren Composition ist das Thermometer No. 12 hergestellt, dessen Abweichungen sehr erheblich sind.

Das Thermometer No. 13 wurde aus einer älteren vorhandenen Röhre von nicht ganz sicherer Herkunft angefertigt und seit nunmehr fünf Jahren beobachtet. Seine Abweichungen beziffern sich auf das sehr geringe Maass von 0°1.

Um eine grössere Menge solchen Glases zu erhalten, wurden Schmelzversuche angestellt, die ein beachtenswerthes Resultat ergaben. Der Ausführung solcher Arbeiten stellen sich namhafte Schwierigkeiten entgegen, und mancherlei Nebenbedingungen sind zu berücksichtigen.

Die zuerst auf der Hütte von BOECK & KERSTEN ausgeführte Schmelzung entsprach den gehegten Erwartungen nicht, wie das

daraus gefertigte Thermometer No. 14 in der Tabelle zeigt. Hinsichtlich der Schmelzung sei bemerkt, dass dieselbe in einem kleinen Sätzel mit etwa 10 Pfund Satzgemisch ausgeführt wurde.

Bei genauer Untersuchung zeigte sich nun, dass das Glas nicht homogen war. — Es lag daher nahe, das ungünstige Resultat mit der Dishomogenität der Schmelze in Verbindung zu bringen, und es wurde zur Erzielung homogener Schmelzen ein ganzer Glashafen besetzt. Hierzu gab Hr. Quilitz freundlichst die Gelegenheit.

Es wurde noch ein zweites Glas hergestellt von einem grösseren Gehalt an Kieselsäure, dessen Zusammensetzung dem Äquivalent-Verhältnisse 6 SiO_2, 1 CaO, 1 K_2O sich nähert. Die Instrumente der Tabelle No. 15, 16, 17 und 18 sind daraus gefertigt. — Dieselben entsprechen indessen den gehegten Erwartungen durchaus nicht; namentlich gross sind die Abweichungen bei den Instrumenten No. 15 und 16; geringer beziffern sie sich bei den an Kieselsäure reicheren No. 17 und 18.

Ein wichtiger Fingerzeig wurde hierbei bezüglich der Reinheit der Schmelzmaterialien gewonnen. Letztere Gläser waren nämlich mit gewöhnlicher, unreiner Pottasche geschmolzen, die, wie die Analyse des Glases ergab, stark natronhaltig war. Dies leitete den Verfasser zu der Ansicht, dass ein Gehalt an Natron neben Kali die Schuld des Misserfolges trage. — Als nun der Schmelzversuch mit der Maassgabe wiederholt wurde, dass chemisch reine, natronfreie Pottasche zur Verwendung kam, resultirten Gläser, aus welchen Thermometer von entschieden befriedigender Qualität hervorgingen, nämlich die in Tabelle mit No. 19 und 20 bezeichneten. Diese Instrumente haben während des Zeitraumes vom 18. August bis 31. October d. J. bei 15—20° geruht und ergaben bei der Beobachtung ein sehr günstiges Resultat, da sich nur eine Abweichung von weniger als $^1/_{10}$ Grad zeigte.

Die zuletzt in der Tabelle aufgeführten Thermometer No. 22 und 23 sind aus reinem Krystallglas. Das Material von No. 23 verdankt der Verfasser dem Director der Rheinischen Glashütte zu Ehrenfeld bei Köln, Hrn. O. Rauter. Das andere Glas ist in der Quilitz'schen Glashütte geschmolzen.

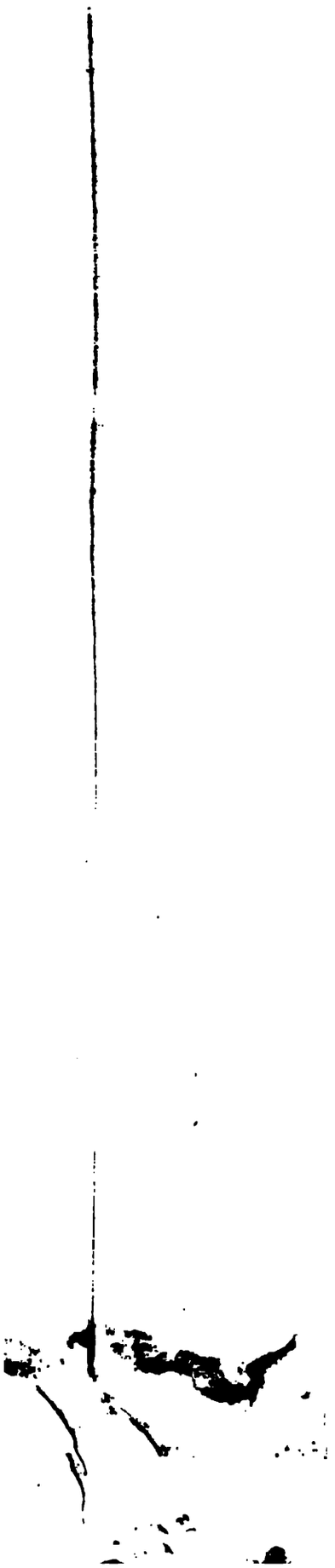
Die Prüfung des Verhaltens der Krystallglasthermometer hat der Verfasser mit diesen Instrumenten und mit den Beobachtungen derselben begonnen, welche in der Tabelle verzeichnet sind. Sie bilden den Eingang weiterer Ermittelungen.

Der Verfasser, welcher die aus den zeitraubenden Untersuchungen gewonnenen Resultate unterbreitet hat, behält sich die Prüfung der mit obigen Untersuchungen zusammenhängenden Fragen vor.

Das Resultat dieser Untersuchungen lässt sich kurz dahin zusammen fassen, dass die Zusammensetzung der Gläser einen maassgebenden Einfluss auf die Depressionserscheinung ausübt. Als ungünstig sind die sehr leicht flüssigen Alkalikalk-Gläser zu bezeichnen, welche ihrer bequemern Handhabung wegen vielfach Anwendung finden. Ein günstiges Resultat ergaben reine Kali-Gläser mit reichlichem Gehalt an Kieselsäure und Kalk.

19	20	21	22	23
Eigene Schmelzung bei Warmbrunn & Quilitz		Röhre von Langlet in Paris erhalten	Krystallglas	
A	B		Eigene Schmelze. Warmbrunn & Quilitz.	Ehrenfeld
65.42	69.04	64.48	59.83	56.74
0.93	0.89	1.48	1.04	0.66
13.67	12.21	5.68	0.52	0.18
19.46	18.52	3.55	11.08	12.48
		12.81		
		12.71 PbO	27.98 PbO	29.86
99.48	100.66	100.70	100.45	99.92
$CaO:K_2O =$: 1 : 0.84	$SiO_2:CaO:K_2O =$ 5.24 : 1 : 0.9 Theorie 6 : 1 : 1.	$SiO_2:CaO:K_2O,Na_2O =$ PbO 6.9 : 1 : 1.6	$SiO_2:PbO:K_2O =$ 6.87 : 1 : 0.81	$SiO_2:PbO:K_2O =$ 6.4 : 1 : 0.9

nach kochen	Depression	vor dem Kochen	nach dem Kochen	Depression	vor dem Kochen	nach dem Kochen	Depression	vor dem Kochen	nach dem Kochen	Depression	vor dem Kochen	nach dem Kochen	Depression
					2. Januar 1879 angefertigt								
					+ 0.32	+ 0.115	0.205						
					+ 0.28	+ 0.12	0.16						
18. August 1883 angefertigt					+ 0.30			9. October 1883 angefertigt					
					+ 0.40								
+ 0.02	0.09	+ 0.11	+ 0.02	0.09				+ 0.10	+ 0.10	0.00	+ 0.10	0.00	0.10



49. Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von K. Weierstrass.

Schluss der am 15. und 22. Februar d. J. gelesenen Abhandlung.

(Vorgelegt am 13. December; — gedruckt im St. LIII; — ausgegeben am 31. Januar 1884.)

IV.

Mit Zuhülfenahme der aus den Gleichungen (III, 7.) oder auch direct aus den in der Jacobi'schen Abhandlung auf S. 511 unter (D.) zusammengestellten Formeln sich ergebenden Relationen

$$f_1^2(u,q) + f^2(u,q) = 1,$$
$$f_2^2(u,q) + t f^2(u,q) = 1, \qquad \left(t = \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4\right)$$

leitet man aus den erstgenannten Gleichungen die folgenden ab:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f(u,q)}{f_1(u,q)} = \frac{f_2(u,q)}{f_1^2(u,q)},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{f_1(u,q)} = \frac{f(u,q) f_2(u,q)}{f_1^2(u,q)},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f_2(u,q)}{f_1(u,q)} = (1-t)\frac{f(u,q)}{f_1^2(u,q)}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen ui für u, q' für q und bestimmt q' so, dass

$$1 = \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 + \left(\frac{\vartheta_2(0,q')}{\vartheta_3(0,q')}\right)^4$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f(ui,q')}{i f_1(ui,q')} = \frac{1}{f_1(ui,q')}\cdot\frac{f_2(ui,q')}{f_1(ui,q')},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{f_1(ui,q')} = -\frac{f(ui,q')}{i f_1(ui,q')}\cdot\frac{f_2(ui,q')}{f_1(ui,q')},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{f_2(ui,q')}{f_1(ui,q')} = -\frac{t}{f_1(ui,q')}\cdot\frac{f(ui,q')}{i f_1(ui,q')},$$

wo die Grösse t dieselbe Bedeutung hat, wie in den Glei
so dass also diese bestehen bleiben, wenn man in il die
von

$$f(u\,,\,q)\,,f_1(u\,,\,q)\,,f_2(u\,,\,q)$$

beziehlich

$$\frac{f(ui\,,q')}{if_1(ui\,,q')}\,,\quad \frac{1}{f_1(ui\,,q')}\,,\quad \frac{f_2(ui\,,q')}{f_1(ui\,,q')}$$

setzt. Daraus folgt, wenn man die Schlüsse wiederholt, mittels welcher im Vorhergehenden die Gleichungen (III, 8.) begründet worden sind, dass die letzteren Functionen mit den ersteren identisch sind. Man hat also

$$(1.)\qquad \begin{cases} f(u\,,q) = \dfrac{f(ui\,,q')}{if_1(ui\,,q')} \\ f_1(u,q) = \dfrac{1}{f_1(ui\,,q')} \\ f_2(u,q) = \dfrac{f_2(ui\,,q')}{f_1(ui\,,q')}, \end{cases}$$

wenn die Grössen $q\,,q'$ durch die Gleichung

$$(2.)\qquad \left(\frac{\vartheta_2(0\,,\,q)}{\vartheta_3(0\,,\,q)}\right)^4 + \left(\frac{\vartheta_2(0\,,q')}{\vartheta_3(0\,,q')}\right)^4 = 1$$

mit einander verbunden sind.

Es möge jetzt unter t wieder eine unabhängige Veränderliche verstanden, und die Function, in welche $\vartheta_3^2(0\,,q)$ durch die Substitution $q = \psi(t)$ übergeht, mit $F(t)$ bezeichnet werden. Dann ist, wie aus den Formeln (III, 9.) erhellt, wenn man der Grösse t irgend einen reellen, zwischen 0 und 1 enthaltenen Werth giebt und $q = \psi(t)$, $q' = \psi(1-t)$ nimmt, der kleinste positive Werth der Grösse u, für den $f(u,q) = 0$ ist, gleich $\pi F(t)$, und der kleinste positive Werth derselben Grösse, für den $f(ui,q')$ verschwindet, gleich $-F(1-t)\log\psi(1-t)$; und es besteht also in Folge der Relationen (1.) die Gleichung

$$(3.)\qquad \pi F(t) = -F(1-t)\log\psi(1-t)\,,$$

aus der dann, wenn man $1-t$ für t setzt,

$$(4.)\qquad \pi F(1-t) = -F(t)\log\psi(t)\,,$$

$$(5.)\qquad \log\psi(t)\log\psi(1-t) = \pi^2$$

folgt.

Jetzt bedeute τ eine Grösse, welcher nur solche complexe Werthe, deren zweite Coordinate positiv ist, beigelegt werden sollen. Ferner mögen (wie es in den »Formeln und Lehrsätzen« geschehen ist) die Functionen, in welche

$$\vartheta(x\,,q)\,,\ \vartheta_1(x\,,q)\,,\ \vartheta_2(x\,,q)\,,\ \vartheta_3(x\,,q)$$

durch die Substitutionen

$$x = v\pi \ , \ q = e^{\tau\pi i} \ , \ \sqrt[4]{q} = e^{\frac{1}{4}\tau\pi i}$$

übergehen, beziehlich mit

$$\vartheta_0(v|\tau) \ , \ \vartheta_1(v|\tau) \ , \ \vartheta_2(v|\tau) \ , \ \vartheta_3(v|\tau)$$

bezeichnet werden. Dann ist jede der letzteren Functionen eine eindeutige analytische Function der von einander unabhängigen Veränderlichen v, τ, wofern man das Gebiet von τ so, wie angegeben worden, beschränkt, während v jeden Werth, mit Ausnahme von ∞, annehmen kann.

Man gebe nun der Grösse τ zunächst irgend einen Werth, dessen erste Coordinate gleich Null ist, so dass $\frac{\tau}{i}$ einen reellen, zwischen 0 und $+\infty$ enthaltenen Werth hat und somit, wenn man

$$q = e^{\tau\pi i}, \quad t = \left(\frac{\vartheta_2(0\ ,\ q)}{\vartheta_3(0\ ,\ q)}\right)^4 = \left(\frac{\vartheta_2(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}\right)^4$$

setzt, t, q beide reell und zwischen 0 und 1 sind. Daraus folgt $\tau\pi i = \log\psi(t)$, weil einem reellen, zwischen 0 und 1 enthaltenen Werthe von t, wie in (I.) gezeigt worden ist, nur ein demselben Intervall angehöriger Werth q und diesem nur ein Werth von τ, für den $\frac{\tau}{i}$ reell ist, entspricht. Setzt man nun $\tau'\pi i = \log\psi(1-t)$, so ist nach Gleichung (5.) $\tau\tau' = -1$ und nach Gleichung (4.)

$$\vartheta_3^2(0|\tau) = \frac{i}{\tau}\vartheta_3^2\left(0\,|\,-\frac{1}{\tau}\right).$$

Ferner hat man

$$\left(\frac{\vartheta_2\left(0\,|\,-\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_3\left(0\,|\,-\frac{1}{\tau}\right)}\right)^4 = 1 - \frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)} = \frac{\vartheta_0^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)},$$

also

$$\vartheta_0^4(0|\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^2\vartheta_2^4\left(0\,|\,-\frac{1}{\tau}\right),$$

und somit auch

$$\vartheta_2^4(0|\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^2\vartheta_0^4\left(0\,|\,-\frac{1}{\tau}\right).$$

Da nun $\frac{i}{\tau}$, $\vartheta_0(0|\tau)$, $\vartheta_0\left(0\,|\,-\frac{1}{\tau}\right)$ u. s. w. sämmtlich endliche Grössen sind, so ergiebt sich

$$(6.)\qquad \begin{cases} \vartheta_0(o\,|\,\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_2\left(o\,|-\frac{1}{\tau}\right) \\ \vartheta_2(o\,|\,\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_0\left(o\,|-\frac{1}{\tau}\right) \\ \vartheta_3(o\,|\,\tau) = \left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_3\left(o\,|-\frac{1}{\tau}\right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind hergeleitet unter der Voraussetzung, dass $\frac{\tau}{i}$ einen zwischen o und $+\infty$ enthaltenen reellen Werth habe. Da aber alle vorkommenden Functionen eindeutige analytische Functionen von τ sind, wenn der Werth von $\left(\frac{i}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$ so, wie in (II.) angegeben worden, fixirt wird, so ist durch das Vorstehende die Richtigkeit der Gleichung für jeden Werth, den τ annehmen kann, bewiesen.

Aus den Ausdrücken der ϑ-Functionen ergeben sich ferner unmittelbar die folgenden Relationen:

$$(7.)\qquad \begin{cases} \vartheta_0(o\,|\,\tau) = \vartheta_3(o\,|\,\tau+1) \\ \vartheta_2(o\,|\,\tau) = i^{-\frac{1}{2}} \vartheta_2(o\,|\,\tau+1) \\ \vartheta_3(o\,|\,\tau) = \vartheta_0(o\,|\,\tau+1). \end{cases}$$

Aus (7.) erhält man nun weiter:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \vartheta_0(o\,|\,\tau) = \vartheta_0(o\,|\,\tau+2) \\ \vartheta_2(o\,|\,\tau) = -i\vartheta_2(o\,|\,\tau+2) \\ \vartheta_3(o\,|\,\tau) = \vartheta_3(o\,|\,\tau+2). \end{cases}$$

Ferner aus (6.), wenn man die ϑ-Functionen auf der rechten Seite zunächst in Functionen von $(-\frac{1}{\tau}-2)$ und diese dann in Functionen von $\frac{\tau}{1+2\tau}$ verwandelt,

$$(9.)\qquad \begin{cases} \vartheta_0(o\,|\,\tau) = i\left(\frac{1}{1+2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_0\left(o\,|\,\frac{\tau}{1+2\tau}\right) \\ \vartheta_2(o\,|\,\tau) = \left(\frac{1}{1+2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_2\left(o\,|\,\frac{\tau}{1+2\tau}\right) \\ \vartheta_3(o\,|\,\tau) = \left(\frac{1}{1+2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \vartheta_3\left(o\,|\,\frac{\tau}{1+2\tau}\right). \end{cases}$$

Setzt man für τ in (8.) $\tau - 2$ und in (9.) $\frac{\tau}{1-2\tau}$, so ergiebt sich weiter:

$$(10.)\quad \begin{cases} \vartheta_0(0|\tau) = \vartheta_0(0|\tau-2) \\ \vartheta_2(0|\tau) = i\vartheta_2(0|\tau-2) \\ \vartheta_3(0|\tau) = \vartheta_3(0|\tau-2); \end{cases}$$

$$(11.)\quad \begin{cases} \vartheta_0(0|\tau) = -i\left(\frac{1}{1-2\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\vartheta_0\left(0\left|\frac{\tau}{1-2\tau}\right.\right) \\ \vartheta_2(0|\tau) = \left(\frac{1}{1-2\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\vartheta_2\left(0\left|\frac{\tau}{1-2\tau}\right.\right) \\ \vartheta_3(0|\tau) = \left(\frac{1}{1-2\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\vartheta_3\left(0\left|\frac{\tau}{1-2\tau}\right.\right). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen (7—11.) leitet man nun die folgenden ab, in denen g, h beliebige ganze Zahlen bedeuten:

$$(12.)\quad \begin{cases} \frac{\vartheta_2(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)} = i^{-g}\cdot\frac{\vartheta_2(0|\tau+2g)}{\vartheta_3(0|\tau+2g)}, \quad \frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)} = \frac{\vartheta_0(0|\tau+2g)}{\vartheta_3(0|\tau+2g)}, \\ \frac{\vartheta_2(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)} = \frac{\vartheta_2\left(0\left|\frac{\tau}{1+2h\tau}\right.\right)}{\vartheta_3\left(0\left|\frac{\tau}{1+2h\tau}\right.\right)}, \quad \frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)} = i^{h}\cdot\frac{\vartheta_0\left(0\left|\frac{\tau}{1+2h\tau}\right.\right)}{\vartheta_3\left(0\left|\frac{\tau}{1+2h\tau}\right.\right)}, \\ \frac{\vartheta_2(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)} = i^{-g}\cdot\frac{\vartheta_2\left(0\left|\frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right.\right)}{\vartheta_3\left(0\left|\frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right.\right)}, \quad \frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)} = i^{h}\cdot\frac{\vartheta_0\left(0\left|\frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right.\right)}{\vartheta_3\left(0\left|\frac{2g+\tau}{1+4gh+2h\tau}\right.\right)}. \end{cases}$$

Angenommen jetzt, es seien a, b, c, d vier gegebene ganze Zahlen, unter denen die Relation $ad - bc = 1$ besteht; b und c seien grade, a und d also ungrade. Man setze in den beiden letzten der vorstehenden Gleichungen

$$\tau_1 = \frac{c+d\tau}{a+b\tau} \text{ für } \tau, \text{ und } -g, -h \text{ für } g, h;$$

dadurch erhält man, wenn man

$$c_1 = c - 2ga, \quad d_1 = d - 2gb, \quad a_1 = a - 2hc_1, \quad b_1 = b - 2hd_1,$$

$$\tau_2 = \frac{c_1+d_1\tau}{a_1+b_1\tau}$$

setzt,

$$\frac{\vartheta_2(0|\tau_1)}{\vartheta_3(0|\tau_1)} = i^{g}\cdot\frac{\vartheta_2(0|\tau_2)}{\vartheta_3(0|\tau_2)}, \quad \frac{\vartheta_0(0|\tau_1)}{\vartheta_3(0|\tau_1)} = i^{-h}\cdot\frac{\vartheta_0(0|\tau_2)}{\vartheta_3(0|\tau_2)}$$

Es ist aber, wenn man mit ε diejenige der Zahlen $1, -1$ bezeichnet, welcher a mod. 4 congruent ist,

$$\frac{\varepsilon c}{2} - \frac{\varepsilon c_1}{2} \equiv g \pmod 4,$$

ferner, in Folge der Gleichung $ad - bc = 1$, $d \equiv a \pmod 4$ und somit $d_1 \equiv d \equiv \varepsilon$,

$$\frac{\varepsilon b}{2} - \frac{\varepsilon b_1}{2} \equiv h \pmod 4.$$

Folglich hat man

$$(13.)\quad i^{-\frac{\varepsilon c}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(o|\tau_1)}{\vartheta_3(o|\tau_1)} = i^{-\frac{\varepsilon c_1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(o|\tau_2)}{\vartheta_3(o|\tau_2)},\quad i^{\frac{\varepsilon b}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(o|\tau_1)}{\vartheta_3(o|\tau_1)} = i^{\frac{\varepsilon b_1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(o|\tau_2)}{\vartheta_3(o|\tau_2)}.$$

Zugleich besteht unter den Zahlen a_1, b_1, c_1, d_1 die Gleichung $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1$ und es ist

$$a_1 \equiv a \equiv \varepsilon \pmod 4.$$

Hieraus folgt nun sofort weiter:

Setzt man, unter g, h, g_1, h_1, g_2, h_2 u. s. w. beliebig anzunehmende ganze Zahlen verstehend,

$$\begin{aligned}
&c_1 = c - 2ga\ ,\ d_1 = d - 2gb\ ,\ a_1 = a - 2hc_1\ ,\ b_1 = b - 2hd_1\ ,\\
&c_2 = c_1 - 2g_1a_1\ ,\ d_2 = d_1 - 2g_1b_1\ ,\ a_2 = a_1 - 2h_1c_2\ ,\ b_2 = b_1 - 2h_1d_2\ ,\\
&c_3 = c_2 - 2g_2a_2\ ,\ d_3 = d_2 - 2g_2b_2\ ,\ a_3 = a_2 - 2h_2c_3\ ,\ b_3 = b_2 - 2h_2d_3\ ,\\
&\qquad\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

und

$$\tau_2 = \frac{c_1 + d_1\tau}{a_1 + b_1\tau},\ \tau_3 = \frac{c_2 + d_2\tau}{a_2 + b_2\tau},\ \tau_4 = \frac{c_3 + d_3\tau}{a_3 + b_3\tau}\ \text{u. s. w.},$$

so sind $b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3 \ldots$. grade, $a_1, d_1, a_2, d_2, a_3, d_3 \ldots$. ungrade Zahlen, unter denen die Gleichungen

$$a_1d_1 - b_1c_1 = 1,\ a_2d_2 - b_2c_2 = 1,\ a_3d_3 - b_3c_3 = 1, \ldots.$$

bestehen, und ist

$$\begin{aligned}
&i^{-\frac{\varepsilon c}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(o|\tau_1)}{\vartheta_3(o|\tau_1)} = i^{-\frac{\varepsilon c_1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(o|\tau_2)}{\vartheta_3(o|\tau_2)} = i^{-\frac{\varepsilon c_2}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(o|\tau_3)}{\vartheta_3(o|\tau_3)} = i^{-\frac{\varepsilon c_3}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(o|\tau_4)}{\vartheta_3(o|\tau_4)}, \ldots\\
&i^{\frac{\varepsilon b}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(o|\tau_1)}{\vartheta_3(o|\tau_1)} = i^{\frac{\varepsilon b_1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(o|\tau_2)}{\vartheta_3(o|\tau_2)} = i^{\frac{\varepsilon b_2}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(o|\tau_3)}{\vartheta_3(o|\tau_3)} = i^{\frac{\varepsilon b_3}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(o|\tau_4)}{\vartheta_3(o|\tau_4)}, \ldots
\end{aligned}$$

Ist nun b nicht gleich Null, so bestimme man, was immer angeht, die Zahlen g, h so, dass $|d_1| < |b|$, $|b_1| < |d_1|$ und somit

$$|b_1| < |b|$$

wird. Ist dann auch b_1 von Null verschieden, so bestimme man weiter g_1, h_1 so, dass

$$|b_2| < |b_1|,$$

ferner, wenn auch b_2 von Null verschieden ist, g_2, h_2 so, dass

$$|b_3| < |b_2|$$

wird, u. s. f. Auf diese Weise verfahrend gelangt man nothwendig zu einem Ausdruck τ_r, in welchem $b_{r-1} = 0$ ist. In Folge der Gleichung $a_{r-1}d_{r-1} - b_{r-1}c_{r-1} = 1$, und weil $a, a_1, a_2, \ldots a_{r-1}$ sämmtlich $\equiv \varepsilon \pmod 4$ sind, ist dann $a_{r-1} = \varepsilon$, $d_{r-1} = \varepsilon$, $\tau_r = \varepsilon c_{r-1} + \tau$, folglich (nach (12.))

$$i^{-\frac{\varepsilon c_{r-1}}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(0|\tau_r)}{\vartheta_3(0|\tau_r)} = \frac{\vartheta_2(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}, \quad i^{\frac{\varepsilon b_{r-1}}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(0|\tau_r)}{\vartheta_3(0|\tau_r)} = \frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}.$$

So ergiebt sich schliesslich

$$(14.) \qquad \frac{\vartheta_2(0|\tau_1)}{\vartheta_3(0|\tau_1)} = i^{\frac{\varepsilon c}{2}} \cdot \frac{\vartheta_2(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}, \quad \frac{\vartheta_0(0|\tau_1)}{\vartheta_3(0|\tau_1)} = i^{-\frac{\varepsilon b}{2}} \cdot \frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, wenn man

$$\tau = \frac{1}{\pi i} \log \psi(t)$$

nimmt,

$$\left(\frac{\vartheta_2(0|\tau_1)}{\vartheta_3(0|\tau_1)}\right)^4 = t,$$

oder

$$(15.) \qquad \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 = t,$$

wenn

$$(16.) \qquad q = e^{\tau_1 \pi i} = e^{\frac{c\pi i + d\log\psi(t)}{a\pi i + b\log\psi(t)} \cdot \pi i}$$

gesetzt wird. Damit ist das am Schlusse des §. III Behauptete bewiesen, und kann nunmehr der dort aufgestellte Satz bestimmter folgendermaassen ausgesprochen werden:

Für jeden gegebenen Werth der Veränderlichen t giebt es unendlich viele Werthe der Grösse q, die der Gleichung

$$t = \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4$$

genügen; dieselben werden sämmtlich durch die Formel

$$q = e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta+1)\log\psi(t)}{(2\alpha+1)\pi i + 2\beta\log\psi(t)} \cdot \pi i}$$

geliefert, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bedeuten, die der Bedingung

$$(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = 1$$

genügen müssen, einer weitern Beschränkung aber nicht unterworfen sind. (Der Werth des Logarithmus von $\psi(t)$ in der vorstehenden Formel kann beliebig fixirt werden.)

V.

Giebt man nun der Grösse q irgend einen der Werthe, die sie nach der vorstehenden Formel annehmen kann, wenn man $t = k^2$ setzt — wobei die singulären Werthe $k^2 = 0, 1, \infty$ auszuschliessen sind — so hat man

$$(1.)\qquad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(u,k) = \dfrac{\vartheta_3(0,q)}{\vartheta_2(0,q)} \dfrac{\vartheta_1(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\ \cos \operatorname{am}(u,k) = \dfrac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_2(0,q)} \dfrac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\ \Delta \operatorname{am}(u,k) = \dfrac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} \dfrac{\vartheta_3(x,q)}{\vartheta(x,q)}, \end{cases}$$

wo

$$(2.)\qquad x = \frac{u}{\vartheta_3^2(0,q)}.$$

In dieser Form dargestellt erscheinen $\sin \operatorname{am}(u,k)$, $\cos \operatorname{am}(u,k)$, $\Delta \operatorname{am}(u,k)$ als eindeutige Functionen von u und q, indem die in $\vartheta_1(x,q)$, $\vartheta_2(x,q)$, $\vartheta_2(0,q)$ vorkommende Wurzelgrösse $\sqrt[4]{q}$ sich weghebt. Drückt man aber $\dfrac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}, \dfrac{\vartheta_0(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$ durch k^2 aus, so wird

$$(3.)\qquad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(u,k) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \dfrac{\vartheta_1(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\ \cos \operatorname{am}(u,k) = \dfrac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \dfrac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\ \Delta \operatorname{am}(u,k) = \sqrt[4]{1-k^2} \cdot \dfrac{\vartheta_3(x,q)}{\vartheta(x,q)}; \end{cases}$$

es bleibt jedoch noch zu ermitteln, welche Werthe man dann den Wurzelgrössen $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$, $\sqrt[4]{q}$ beizulegen hat. Dazu sind noch einige, die Functionen $\psi(t)$, $\log \psi(t)$ betreffende Erörterungen erforderlich.

Scheidet man von dem Gebiete der Veränderlichen t die der Strecke $(1 \ldots +\infty)$ angehörigen reellen Werthe aus, so ist $\psi(t)$ eine eindeutige und continuirliche Function von t, welche ausserdem, dass ihr absoluter Betrag beständig kleiner als 1 ist, die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Sie hat einen reellen oder complexen Werth, je nachdem t reell oder complex ist.

2. Im ersteren Falle stimmt ihr Zeichen mit dem Zeichen von t überein.

3. Für jeden complexen Werth von t hat ihre zweite Coordinate dasselbe Zeichen wie die zweite Coordinate von t.

Das Erste ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n+1},$$

$$t = \left(\frac{\vartheta_2(0, \psi(t))}{\vartheta_3(0, \psi(t))} \right)^4 = 16\psi(t) \cdot \left(\frac{1 + \psi^2(t) + \psi^6(t) + \ldots}{1 + 2\psi(t) + 2\psi^4(t) + \ldots} \right)^4,$$

von denen die erste zeigt, dass $\psi(t)$ für die der Strecke $(-\infty \ldots 1)$ angehörigen reellen Werthe von t ebenfalls reell ist, die andere aber lehrt, dass umgekehrt, wenn $\psi(t)$ einen reellen Werth hat, auch t reell ist und somit, unter der gemachten Annahme, zwischen $-\infty$ und 1 liegt. Aus der zweiten Gleichung erhellt ferner die Richtigkeit des unter (2.) Angegebenen. Das Dritte aber wird so bewiesen.

Für $t = 1 + i$ ist $\log(1-t) = -\frac{\pi}{2} i$, also

$$\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{8} i}}{1 + e^{-\frac{\pi}{8} i}} = i \operatorname{tg} \frac{\pi}{16}$$

und somit, da die γ_n sämmtlich positive Zahlen sind, $\psi(t)$ gleich dem Producte aus i und einer positiven Grösse. Von dem Werthe $1 + i$ aus kann aber t stetig sich ändernd zu jedem anderen complexen Werthe t_1, dessen zweite Coordinate positiv ist, übergehen, ohne dabei einen reellen Werth anzunehmen; die zweite Coordinate von $\psi(t)$ ändert sich bei diesem Übergange stetig mit t, ohne den Werth Null anzunehmen (No. 1.) und ist also für $t = t_1$ ebenso wie für $t = 1 + i$ positiv. In ganz ähnlicher Weise wird gezeigt, dass $\psi(t)$ für $t = -1 - i$ gleich dem Producte aus i und einer negativen Grösse ist, und daraus die Übereinstimmung des Zeichens der zweiten Coordinate [illegible] mit dem Zeichen der zweiten Coordinate von t auch [illegible] den [illegible] wo die letztere negativ ist, gefolgert. Übrigens ergiebt sich aus der

oben festgesetzten Bedeutung von $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ und aus No. 1, dass conjugirten complexen Werthen von t auch conjugirte complexe Werthe von $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ und von $\psi(t)$ entsprechen, und es daher genügt, die unter No. 3 angegebene Eigenschaft der Function $\psi(t)$ für Werthe von t, deren zweite Coordinate positiv ist, nachzuweisen.

Hierzu ist noch Folgendes zu bemerken:

Setzt man

$$\phi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}},$$

so ist

$$1-t = \left(\frac{1-\phi(t)}{1+\phi(t)}\right)^4,$$

und es lässt sich mit Hülfe dieser beiden Gleichungen zeigen, dass der Function $\phi(t)$ die unter No. 1—3 angegebenen Eigenschaften ebenfalls zukommen; es braucht dazu in der vorstehenden Beweisführung nur überall $\phi(t)$ statt $\psi(t)$ gesetzt zu werden.

Nach dem Vorstehenden sind nun, wenn man von dem Gebiete der Veränderlichen t auch die der Strecke $(-\infty \ldots 0)$ angehörigen reellen Werthe ausscheidet, nicht nur $\phi(t)$, $\psi(t)$, sondern auch

$$\log\phi(t), \quad \log\psi(t)$$

eindeutig definirte und continuirliche Functionen von t. Aus der obigen Gleichung (II.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n t^n = e^{-\log 2 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n t^n}$$

ergiebt sich aber, wenn man $\phi^4(t)$ für t setzt,

$$\psi(t) = \tfrac{1}{2}\phi(t)\, e^{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \phi^{4n}(t)},$$

und hieraus

$$\log\psi(t) = \log\left(\tfrac{1}{2}\phi(t)\right) + \tfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\phi^{4n}(t) + 2m\pi i,$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet, die innerhalb des jetzt der Grösse t angewiesenen Gebietes, der Stetigkeit der Functionen $\phi(t)$, $\log\left(\frac{1}{2}\phi(t)\right)$, $\log\psi(t)$ wegen, nicht verschiedene Werthe haben kann. Für jeden zwischen 0 und 1 enthaltenen reellen Werth von t sind aber die genannten Functionen alle drei reell und somit $m = 0$; es gilt also die Gleichung

$$(4.)\qquad \log\psi(t) = \log\left(\frac{1}{2}\,\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}$$

für jeden der nicht ausgeschlossenen Werthe von t, unter der Bedingung, dass die Werthe der Logarithmen so, wie in (II.) festgesetzt worden ist, bestimmt werden.

Giebt man ferner der Grösse t einen zwischen 1 und $+\infty$ enthaltenen reellen Werth, so bleibt die vorstehende Gleichung gültig, wenn man der Potenz $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ den einen oder den andern der beiden Werthe, die sie alsdann annehmen kann, und zugleich der Function $\psi(t)$ den entsprechenden Werth beilegt.

Für einen negativen reellen Werth von t endlich hat man

$$\lim_{\varkappa=0} \cdot \log\psi(t \pm i\varkappa) = \log\big(-\psi(t)\big) \pm \pi i\,, \quad \lim_{\varkappa=0} \cdot \log\phi(t \pm i\varkappa) = \log\big(-\phi(t)\big) \pm \pi i,$$

(wo $\varkappa$ eine positive Grösse bedeutet) und somit

$$(5.) \qquad \log\big(-\psi(t)\big) = \log\left(-\tfrac{1}{2}\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \tfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}.$$

Dies vorausgeschickt, definire man nun die Werthe der Potenzen

$$(k^2)^{\frac{1}{4}}\,,\quad (1-k^2)^{\frac{1}{4}}\,,\quad \psi(k^2)^{\frac{1}{4}}$$

so, wie in §. II festgesetzt worden ist; dann ergiebt sich, zunächst unter der Voraussetzung, dass weder k^2 noch $1-k^2$ einen der Strecke $(-\infty \ldots . 0)$ angehörigen reellen Werth habe, aus den Gleichungen

$$k^2 = \left(\frac{\vartheta_2\big(0\,,\psi(k^2)\big)}{\vartheta_3\big(0\,,\psi(k^2)\big)}\right)^4,\quad 1-k^2 = \left(\frac{\vartheta\big(0\,,\psi(k^2)\big)}{\vartheta_3\big(0\,,\psi(k^2)\big)}\right)^4,$$

wenn man der in $\vartheta_2\big(0\,,\psi(k^2)\big)$ vorkommenden Wurzelgrösse $\sqrt[4]{\psi(k^2)}$ den Werth $\psi(k^2)^{\frac{1}{4}}$ beilegt,

$$(6.) \qquad (k^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{\vartheta_2\big(0\,,\psi(k^2)\big)}{\vartheta_3\big(0\,,\psi(k^2)\big)}\,,\quad (1-k^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{\vartheta\big(0\,|\,\psi(k^2)\big)}{\vartheta_3\big(0\,|\,\psi(k^2)\big)}\,.$$

Denn diese Gleichungen bestehen, wenn k^2 eine zwischen 0 und 1 enthaltene Grösse ist; sie gelten also, da $(k^2)^{\frac{1}{4}}$, $(1-k^2)^{\frac{1}{4}}$, $\vartheta_2\big(0\,,\psi(k^2)\big)$, $\vartheta_3\big(0\,,\psi(k^2)\big)$, $\vartheta\big(0\,,\psi(k^2)\big)$ sämmtlich eindeutige analytische Functionen von k^2 sind, wenn vom Gebiete dieser Grösse die den Strecken $(-$ [illegible] und $(1 \ldots +\infty)$ angehörigen reellen Werthe ausgeschlossen werden, auch für jeden complexen Werth von k^2.

Da ferner die zweite Coordinate von $\psi(k^2)$ nach dem Obigen dasselbe Zeichen hat wie die zweite Coordinate von k^2, so nähert sich

$$\log \psi(k^2) - \log (k^2),$$

wenn k^2 einem reellen negativen Werthe unendlich nahe kommt, einer reellen, und somit

$$\frac{\psi(k^2)^{\frac{1}{4}}}{(k^2)^{\frac{1}{4}}}$$

einer positiven Grenze; die erste der Gleichungen (6.) bleibt daher auch für einen negativen Werth von k^2 gültig, unter der Bedingung, dass man nach Fixirung des Werthes von $(k^2)^{\frac{1}{4}}$ der Wurzelgrösse $\sqrt[4]{\psi(k^2)}$ denjenigen ihrer Werthe gebe, für den

$$\frac{\sqrt[4]{\psi(k^2)}}{(k^2)^{\frac{1}{4}}}$$

eine positive Grösse ist. Die zweite der Gleichungen (6.) behält ebenfalls für einen negativen Werth von k^2 ihre Gültigkeit, indem für einen solchen Werth $\psi(k^2)$ reell und daher $\vartheta\big(o, \psi(k^2)\big), \vartheta_3\big(o, \psi(k^2)\big)$ ebenso wie $(1 - k^2)^{\frac{1}{4}}$ positive Grössen sind.

Für einen zwischen 1 und $+\infty$ liegenden reellen Werth von k^2 endlich bleiben die in Rede stehenden Gleichungen gültig, wenn man nach Fixirung des Werthes von $(1 - k^2)^{\frac{1}{4}}$ den zu diesem gehörigen Werth von $\psi(k^2)$ nimmt.

Hiernach bestehen die obigen Gleichungen (3.), wenn man die Werthe der Wurzelgrössen $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1 - k^2}$ so fixirt, dass in jeder von ihnen die erste Coordinate positiv und ihrem absoluten Betrage nach nicht kleiner als die zweite ist,[1] ferner

$$q = \psi(k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1 - \sqrt[4]{1 - k^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - k^2}} \right)^{4n+1}$$

[1] Dass nach dieser Bestimmung $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1 - k^2}$ dieselben Werthe erhalten wie die Potenzen $(k^2)^{\frac{1}{4}}$, $(1 - k^2)^{\frac{1}{4}}$ folgt unmittelbar aus der in §. II gegebenen Definition der letzteren.

setzt und endlich auch den Werth von $\sqrt[4]{q}$ so bestimmt, dass seine erste Coordinate positiv und ihrem absoluten Betrage nach nicht kleiner als die zweite ist, wobei in dem Falle, wo k^2 und somit auch q einen negativen Werth hat, die Bedingung zu erfüllen ist, dass $\frac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt[4]{k^2}}$ eine positive Grösse sein muss.

Man setze ferner, unter Beibehaltung der im Vorstehenden bestimmten Werthe der Grössen $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$, $\psi(k^2)$ und nach Annahme von vier, der Bedingung

$$(2\alpha+1)\,(2\delta+1)-4\beta\gamma=1$$

entsprechenden ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,

$$\tau=\frac{1}{\pi i}\log\psi(k^2), \quad \tau_1=\frac{2\gamma+(2\delta+1)\tau}{2\alpha+1+2\beta\tau},$$
$$q=e^{\tau_1\pi i}, \qquad \sqrt[4]{q}=e^{\frac{1}{4}\tau_1\pi i};$$

wobei in dem Falle, dass k^2 eine negative Grösse ist, dem $\log\psi(k^2)$ derjenige Werth beigelegt werden muss, für welchen $e^{\frac{1}{4}\log\psi(k^2)}$ gleich dem im Vorhergehenden bestimmten Werth von $\sqrt[4]{\psi(k^2)}$ wird. Dann ist, den Gleichungen (14.) des vorhergehenden Paragraphen zufolge, wenn unter ε diejenige der Zahlen $1, -1$ verstanden wird, der $2\alpha+1$ mod. 4 congruent ist,

$$\frac{\vartheta_2(0|\tau_1)}{\vartheta_3(0|\tau_1)}=i^{\varepsilon\gamma}\frac{\vartheta_2(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}, \quad \frac{\vartheta_0(0|\tau_1)}{\vartheta_3(0|\tau_1)}=i^{-\varepsilon\beta}\cdot\frac{\vartheta_0(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)},$$

man hat daher

$$(8.)\qquad \frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}=i^{\varepsilon\gamma}\sqrt[4]{k^2}, \quad \frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}=i^{-\varepsilon\beta}\sqrt[4]{1-k^2},$$

und die Gleichungen (1.) gestalten sich folg[illegible]

$$(9.)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u,k) = \dfrac{i^{-\varepsilon\gamma}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \dfrac{\vartheta_1(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\ \cos\operatorname{am}(u,k) = \dfrac{i^{-\varepsilon\beta-\varepsilon\gamma}\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}} \cdot \dfrac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\ \Delta\operatorname{am}(u,k) = i^{-\varepsilon\beta}\sqrt[4]{1-k^2} \cdot \dfrac{\vartheta_3(x,q)}{\vartheta(x,q)}, \\ x = \dfrac{u}{\vartheta_3^2(0,q)}, \quad \sqrt[4]{q} = e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta+1)\log\psi(k^2)}{(2\alpha+1)\pi i + 2\beta\log\psi(k^2)} \cdot \frac{\pi i}{4}}. \end{cases}$$

Hiermit ist die Aufgabe, welche zur Vervollständigung der von Jacobi in der mehrgenannten Abhandlung entwickelten Theorie der elliptischen Functionen noch zu lösen war, im Wesentlichen erledigt. Es bleibt aber noch Eines auszuführen.

Die unendliche Reihe, durch welche die Function $\psi(t)$ ausgedrückt ist, convergirt nur schwach, wenn der absolute Betrag der Grösse $1-t$ klein, also t einen wenig von 1 verschiedenen Werth hat. Es ist daher von wesentlicher Bedeutung, dass sich, wie jetzt gezeigt werden soll, aus der in Rede stehenden Reihe andere Ausdrücke von $\psi(t)$ herleiten lassen, von denen, welchen Werth auch t haben möge, immer einer wenigstens zur Berechnung von $\psi(t)$ sehr wohl sich eignet.

VI.

Unter der Bedingung, dass vom Gebiete der Veränderlichen t die der Strecke $(1 \ldots +\infty)$ angehörigen reellen Werthe ausgeschlossen werden, ist $\psi(t)$ nicht nur, wie im vorhergehenden Paragraphen gezeigt worden, eine eindeutig definirte und continuirliche, sondern auch eine überall regulär sich verhaltende Function.[1] Dies erhellt sofort, wenn man beachtet, dass in dem Bereiche, auf den durch die angegebene Bedingung die Veränderlichkeit von t beschränkt wird, $\phi(t) = \dfrac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$ eine eindeutig definirte und reguläre Function ist, und dass die Potenzreihe von $\phi(t)$, durch welche $\psi(t)$ dargestellt wird, in der Nähe jedes bestimmten Werthes von t gleichmässig convergirt.

[1] [illegible]nge von einer eindeutig definirten Function einer Veränderlichen t, dass sie sich [illegible] der Nähe eines bestimmten Werthes t_0 der letzteren regulär verhalte, wenn sie sich für alle einer gewissen Umgebung der Stelle t_0 angehörigen Werthe von t in der Form einer [illegible]ähnlichen Potenzreihe von $t - t_0$ darstellen lässt.

Scheidet man ferner von dem Gebiete der Grösse t auch die negativen reellen Werthe aus, so kann in dem Bereiche, auf den dann die Veränderlichkeit von t beschränkt ist — derselbe möge mit T' bezeichnet werden — $\psi(t)$ weder verschwinden noch einen negativen reellen Werth erhalten; es ist also in diesem Bereiche auch $\log\psi(t)$ eine eindeutig definirte und reguläre Function.

Aus dieser Eigenschaft von $\log\psi(t)$ ergiebt sich nun, dass die in §. IV unter der Voraussetzung, dass t eine zwischen 0 und 1 liegende reelle Grösse sei, begründete Gleichung

$$\log\psi(t)\log\psi(1-t) = \pi^2 \tag{1.}$$

für jeden dem Bereiche T' angehörigen Werth von t Gültigkeit hat.

Da nämlich nicht nur $\log\psi(t)$, sondern auch $\log\psi(1-t)$ in T' überall regulär sich verhält, so lässt sich, wenn t_0 irgend ein bestimmter Werth von t ist, in einer bestimmten Umgebung von t_0 der Ausdruck

$$\log\psi(t)\log\psi(1-t) - \pi^2$$

in der Form einer Potenzreihe von $t-t_0$ darstellen. Nimmt man t_0 in der Strecke $(0 \ldots 1)$ an, so sind die Coëfficienten dieser Reihe, weil es dann in jeder Nähe von t_0 Werthe der Grösse t giebt, für welche der vorstehende Ausdruck verschwindet, nothwendig alle gleich Null; dies muss also, da der Bereich T' ein Continuum ist, nach einem bekannten functionentheoretischen Satze auch für jeden anderen Werth von t_0 der Fall sein und somit die Gleichung (1.) an jeder Stelle von T' bestehen.

Es ist ferner, da die zweite Coordinate von $\psi(t)$ dasselbe Zeichen wie die zweite Coordinate von t hat,

$$\log\psi(t) = \log\left(-\psi(t)\right) \pm i\pi\,,$$

wo das obere oder das untere Zeichen vor i gilt, je nachdem die zweite Coordinate von t positiv oder negativ ist. Da nun $\log\left(-\psi(t)\right)$ in der Nähe eines jeden negativen reellen Werthes von t sich regulär verhält, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}\log\psi\left(\overset{+}{t}\right) &= \log\left(-\psi(t)\right) + i\pi\\ \log\psi\left(\overline{t}\right) &= \log\left(-\psi(t)\right) - i\pi\end{aligned}\right\} \text{ für jeden negativen reellen Werth von } t. \tag{2.}$$

Mit Hülfe dieser Formeln erhält man aus Gleichung (1.) für einen reellen Werth von t, der > 1,

$$(3.)\qquad \begin{cases} \log\psi(\overset{+}{t}) = \dfrac{\pi^2}{\log\left(-\psi(1-t)\right) - i\pi}, \\ \log\psi(\overline{t}) = \dfrac{\pi^2}{\log\left(-\psi(1-t)\right) + i\pi}. \end{cases}$$

Man nehme jetzt an, es habe die Grösse t einen complexen Werth und verstehe unter $\mathfrak{e}$ die Zahl 1 oder -1, je nachdem die zweite Coordinate von t positiv oder negativ ist. Dann verwandelt sich

$$\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}},$$

wenn man $1-t$ für t setzt, in

$$\frac{1-t^{\frac{1}{4}}}{1+t^{\frac{1}{4}}} = -\frac{1-\left(1-\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}}}{1+\left(1-\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}}};$$

man hat also

$$(4.)\qquad \psi(1-t) = -\psi\left(\frac{t-1}{t}\right),$$

woraus

$$(5.)\qquad \log\psi(1-t) = \log\psi\left(\frac{t-1}{t}\right) - \mathfrak{e}i\pi.$$

Die Gleichung (1.) ferner verwandelt sich, wenn man in ihr $\frac{t-1}{t}$ für t setzt, in

$$(6.)\qquad \log\psi\left(\frac{t-1}{t}\right)\log\psi\left(\frac{1}{t}\right) = \pi^2.$$

Setzt man dann in (5.) $\frac{t-1}{t}$ für t und beachtet, dass die zweite Coordinate von $\frac{t-1}{t}$ dasselbe Zeichen wie die zweite Coordinate von t hat, so kommt

$$(7.)\qquad \log\psi\left(\frac{1}{t}\right) = \log\psi\left(\frac{1}{1-t}\right) - \mathfrak{e}i\pi.$$

Endlich ergiebt sich aus (1.), wenn man $\frac{1}{1-t}$ für t setzt

$$(8.)\qquad \log\psi\left(\frac{1}{1-t}\right)\log\psi\left(\frac{t}{t-1}\right)=\pi^2.$$

Die Gleichungen (1., 5., 6., 7., 8.) führen nun zu den folgenden, in denen auf der Rechten vor i das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem die zweite Coordinate von t positiv oder negativ ist.

$$(9.)\qquad \begin{cases} \log\psi(t)=\dfrac{\pi^2}{\log\psi(1-t)} \\ \log\psi(t)=\dfrac{\pi^2}{\log\psi\left(\dfrac{t-1}{t}\right)\mp i\pi} \\ \log\psi(t)=\dfrac{\pi\log\psi\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\pi\mp i\log\psi\left(\dfrac{1}{t}\right)} \\ \log\psi(t)=\dfrac{\pi^2}{\log\psi\left(\dfrac{1}{1-t}\right)}\pm i\pi \\ \log\psi(t)=\log\psi\left(\dfrac{t}{t-1}\right)\pm i\pi. \end{cases}$$

Die Modificationen, welche diese Gleichungen erfahren, wenn die zweite Coordinate von t verschwindet, sind nach dem Vorhergehenden leicht zu ermitteln.

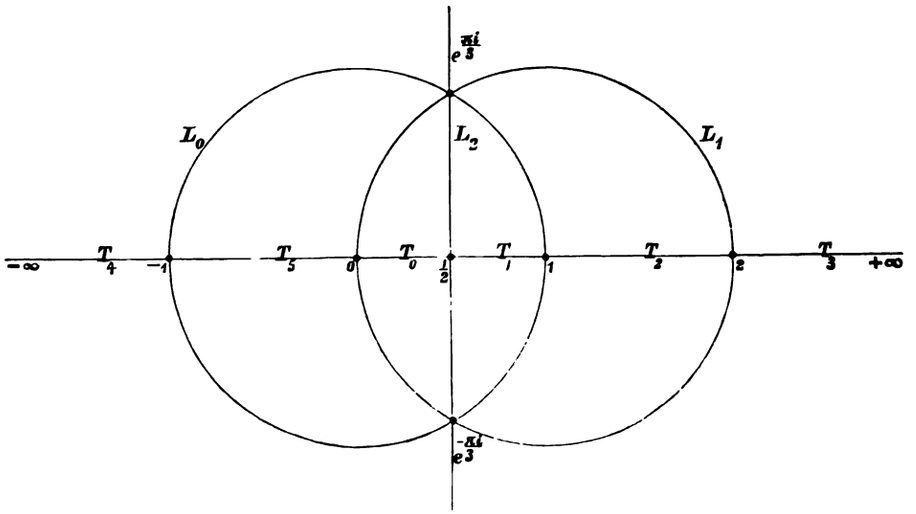
Jetzt denke man sich in der Ebene der Veränderlichen t einen Kreis (L_0) mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt 0, einen zweiten Kreis (L_1) mit demselben Radius und dem Mittelpunkt 1 beschrieben und durch die Durchschnittspunkte von $(L_0),(L_1)$, in denen t die Werthe $e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{-\frac{\pi i}{3}}$ hat, eine unbegrenzte Gerade (L_2) gelegt. Dann wird durch diese drei Linien die Ebene in sechs Stücke $(T_0, T_1, \ldots T_5)$ zerlegt, in der Art, dass die Strecken

$$(0\ldots\tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{2}\ldots 1),\ (1\ldots 2),\ (2\ldots+\infty),\ (-\infty\ldots-1),\ (-1\ldots 0)$$

beziehlich in

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5$$

liegen.



Ordnet man jedem Werthe von t zwei andere t', t'' zu mittels der Gleichungen

$$t + t' = 1 \ , \ tt'' = 1,$$

so entsprechen Werthen von t in

$$T_0 \ , \ T_1 \ , \ T_2 \ , \ T_3 \ , \ T_4 \ , \ T_5$$

Werthe von t' beziehlich in

$$T_1 \ , \ T_0 \ , \ T_5 \ , \ T_4 \ , \ T_3 \ , \ T_2$$

und Werthe von t'' beziehlich in

$$T_3 \ , \ T_2 \ , \ T_1 \ , \ T_0 \ , \ T_5 \ , \ T_4.$$

Daraus ergiebt sich dann leicht der folgende Satz:

Liegt t in

$$T_1 \ , \ T_2 \ , \ T_3 \ , \ T_4 \ , \ T_5,$$

so liegen beziehlich

$$1 - t \ , \ \frac{t-1}{t} \ , \ \frac{1}{t} \ , \ \frac{1}{1-t} \ , \ \frac{t}{t-1}$$

in T_0.

Nach den unter (9.) zusammengestellten Formeln lässt sich also die Berechnung von $\psi(t)$ für jeden gegebenen Werth von t zurück[illegible] die Berechnung derselben Function für ein dem Bereiche T_0 [illegible]rgument.

[illegible]ur[illegible] Werthe von t kommen dann die folgenden Formeln zur Anw[illegible]

$$(10.)\quad \begin{cases} t=\frac{1}{2}\ldots 1 \quad , \quad \log\psi(t)=\dfrac{\pi^2}{\log\psi(1-t)} \\ t=1\ldots 2 \quad , \quad \log\psi(\overset{+}{t})=\dfrac{\pi^2}{\log\psi\left(\dfrac{t-1}{t}\right)-i\pi}\,, \quad \log\psi(\overset{-}{t})=\dfrac{\pi^2}{\log\psi\left(\dfrac{t-1}{t}\right)+i\pi} \\ t=2\ldots+\infty \quad , \quad \log\psi(\overset{+}{t})=\dfrac{\pi\log\psi\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\pi-i\log\psi\left(\dfrac{1}{t}\right)}\,, \quad \log\psi(\overset{-}{t})=\dfrac{\pi\log\psi\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\pi+i\log\psi\left(\dfrac{1}{t}\right)} \\ t=-\infty\ldots-1, \quad \log\psi(\overset{+}{t})=\dfrac{\pi^2}{\log\psi\left(\dfrac{1}{1-t}\right)}+i\pi\,, \quad \log\psi(\overset{-}{t})=\dfrac{\pi^2}{\log\psi\left(\dfrac{1}{1-t}\right)}-i\pi \\ t=-1\ldots 0 \quad , \quad \log\psi(\overset{+}{t})=\log\psi\left(\dfrac{t}{t-1}\right)+i\pi\,, \quad \log\psi(\overset{-}{t})=\log\psi\left(\dfrac{t}{t-1}\right)-i\pi. \end{cases}$$

Es bleibt nun noch zu untersuchen, welches der grösste Werth ist, den der absolute Betrag von

$$\phi(t)=\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

annehmen kann, wenn die Grösse t auf den Bereich T_0 beschränkt wird.

Wie bekannt, gehört dieser grösste Werth zu einem an der Grenze von T_0 liegenden Werthe von t. Die Grenze von T_0 aber wird gebildet von der zwischen den Punkten $e^{-\frac{\pi i}{3}}$, $e^{\frac{\pi i}{3}}$ liegenden Strecke der Geraden L_2 und dem von denselben Punkten begrenzten und durch den Punkt o gehenden Bogen des Kreises L_1.

Setzt man, unter w eine reelle Grösse verstehend,

$$t=\tfrac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{tg}\frac{w}{2}=\frac{1}{e^{wi}+1},$$

so durchläuft t die Gerade L_2, wenn w die Strecke $(-\pi \quad .+\pi)$ durchläuft. Dann ist $\dfrac{d\log|\phi(t)|}{dw}$ gleich dem reellen Bestandtheil von

$$\frac{d\log\phi(t)}{dw}=\left(\tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}}+\tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\right)\frac{d\log t}{dw},$$

also, da

$$1-t=-\frac{e^{\frac{wi}{2}}}{2\cos\frac{w}{2}}, \quad \frac{d\log t}{dw}=-ite^{wi}=-i(1-t)$$

$$\frac{d|\phi(t)|}{dw} = \tfrac{1}{2}|\phi(t)| \cdot \left(\left(2\cos\frac{w}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \sin\frac{w}{8} + \left(2\cos\frac{w}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} \sin\frac{3w}{8}\right).$$

Innerhalb der Strecke $(w = -\pi \ldots + \pi)$ wird $|\phi(t)|$ weder gleich Null noch unendlich gross; es verschwindet also $\frac{d|\phi(t)|}{dw}$ für $w = 0$ und ist positiv, wenn w zwischen 0 und π, negativ, wenn w zwischen 0 und $-\pi$ liegt. Der absolute Betrag von $\phi(t)$ ist also ein Minimum für $w = 0$ und nimmt beständig zu, wenn t stetig wachsend die Strecke $(0 \ldots \pi)$ oder stetig abnehmend die Strecke $(0 \ldots -\pi)$ durchläuft.

Für $t = e^{\frac{\pi i}{3}}$ hat man, da $1 - e^{\frac{\pi i}{3}} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$ ist,

$$\phi(t) = \frac{1 - e^{-\frac{\pi i}{12}}}{1 + e^{-\frac{\pi i}{12}}} = i \operatorname{tg}\frac{\pi}{24};$$

und für $t = e^{-\frac{\pi i}{3}}$

$$\phi(t) = -i \operatorname{tg}\frac{\pi}{24}.$$

Der grösste Werth, den der absolute Betrag von $\phi(t)$ in der die Punkte $e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{-\frac{\pi i}{3}}$ verbindenden Geraden annehmen kann, ist also gleich $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$.

Setzt man ferner

$$t = 1 - e^{-wi},$$

so durchläuft t den Kreis L_1, wenn w die Strecke $(-\pi \ldots + \pi)$ durchläuft. Dann hat man

$$\phi(t) = \frac{1 - e^{-\frac{wi}{4}}}{1 + e^{-\frac{wi}{4}}} = i \operatorname{tg}\frac{w}{8},$$

und der absolute Betrag von $\phi(t)$ ist ein Minimum an der Stelle $w = 0$, $t = 0$ und ein Maximum an der Stelle $w = \pm\pi$, $t = 2$. Den grössten Werth, welchen derselbe in dem einen Theil der Begrenzung von T_0 bildende Kreisbogen annehmen kann, erreicht er also in den Punkten $e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{-\frac{\pi i}{3}}$. Damit ist bewiesen:

Der absolute Betrag von $\phi(t)$ hat in dem Bereiche T_0 seinen grössten Werth an den Stellen $t = e^{\frac{\pi i}{3}}$ und $t = e^{-\frac{\pi i}{3}}$, und ist derselbe gleich $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$.

Hiernach convergirt für jeden dem Bereiche T_0 angehörigen Werth von t die Reihe

$$\frac{1}{2}\phi(t)+\frac{2}{2^5}\phi(t)^5+\frac{15}{2^9}\phi(t)^9+\frac{150}{2^{13}}\phi(t)^{13}+\ldots$$

so rasch, dass in der Praxis der Regel nach schon die drei ersten Glieder, in manchen Fällen sogar die zwei ersten den Werth der Function $\psi(t)$ in hinlänglicher Annäherung geben.

VII.

Setzt man in den Reihen, durch welche die Functionen $\vartheta_0(v\,|\,\tau)$, $\vartheta_1(v\,|\,\tau)$ u. s. w. definirt werden, unter ε eine der Zahlen $1, -1$ verstehend, $\varepsilon+\tau$ für τ, so ergiebt sich, dass die Functionen

$$\vartheta_0(v\,|\,\tau)\quad,\quad \vartheta_1(v\,|\,\tau)\quad,\quad \vartheta_2(v\,|\,\tau)\quad,\quad \vartheta_3(v\,|\,t)$$

beziehlich den Functionen

$$\vartheta_3(v\,|\,\varepsilon+\tau),\ i^{-\frac{\varepsilon}{2}}\vartheta_1(v\,|\,\varepsilon+\tau),\ i^{-\frac{\varepsilon}{2}}\vartheta_2(v\,|\,\varepsilon+\tau),\ \vartheta_0(v\,|\,\varepsilon+\tau)$$

gleich sind.

Setzt man ferner in den Gleichungen (1.) des §. IV

$$\sqrt[4]{q}=e^{\frac{\pi i}{4}},\ \sqrt[4]{q'}=e^{-\frac{\pi i}{4\tau}},\ u=\vartheta_3^2(0,q)\cdot v\pi,\ ui=\vartheta_3^2(0,q')\cdot v'\pi,$$

drückt (mittels der Formeln (6.) des §. III) $f(u,q), f_1(u,q), f_2(u,q)$ durch die Functionen $\vartheta(v\pi,q), \vartheta_1(v\pi,q),\ldots; f(ui,q'), f_1(ui,q'), f_2(ui,q')$ durch $\vartheta(v'\pi,q'), \vartheta_1(v'\pi,q'),\ldots$ aus, und bemerkt, dass nach den Formeln (6.) des §. IV

$$\frac{\vartheta_3(0,q)}{\vartheta_2(0,q)}=\frac{\vartheta_3(0,q')}{\vartheta(0,q')},\ \frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_2(0,q)}=\frac{\vartheta_2(0,q')}{\vartheta(0,q')},\ \frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}=\frac{\vartheta_2(0,q')}{\vartheta_3(0,q')},$$

$$\vartheta_3^2(0,q)=\frac{i}{\tau}\vartheta_3^2(0,q')$$

und somit

$$v'=-\frac{v}{\tau}$$

ist, so gelangt man zu dem folgenden Satze:

Der Quotient je zweier der Functionen

$$\vartheta_0(v\,|\,\tau)\ ,\ \vartheta_1(v\,|\,\tau)\ ,\ \vartheta_2(v\,|\,\tau)\ ,\ \vartheta_3(v\,|\,\tau)$$

ändert seinen Werth nicht, wenn man an Stelle dieser Functionen beziehlich die folgenden:

$$\vartheta_2\left(-\frac{v}{\tau}\,|-\frac{1}{\tau}\right), \frac{1}{i}\vartheta_1\left(-\frac{v}{\tau}\,|-\frac{1}{\tau}\right), \vartheta_0\left(-\frac{v}{\tau}\,|-\frac{1}{\tau}\right), \vartheta_3\left(-\frac{v}{\tau}\,|-\frac{1}{\tau}\right)$$

setzt.

Jetzt setze man, wie oben (§. V.)

$$(1.) \qquad \tau_1 = \frac{2\gamma\pi i + (2\delta+1)\log\psi(k^2)}{(2\alpha+1)\pi i + 2\beta\log\psi(k^2)}$$

und

$$(2.) \quad \tau_2 = \frac{1}{-\tau_1}\ ,\ \tau_3 = \varepsilon + \tau_2 = \frac{1-\varepsilon\tau_1}{-\tau_1}\ ,\ \tau_4 = \frac{1}{-\tau_3} = \frac{\tau_1}{1-\varepsilon\tau_1}\ ,$$
$$\tau_5 = \varepsilon + \tau_4 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\tau_1}\ ,\ \tau_6 = \frac{1}{-\tau_5} = -\varepsilon + \tau_1\ ,$$

$$(3.) \quad v_1 = \frac{u}{\pi\vartheta_3^2(0\,|\,\tau_1)}\ ,\ v_2 = -\frac{v_1}{\tau_1}\ ,\ v_3 = v_2 = -\frac{v_1}{\tau_1}\ ,$$
$$v_4 = \frac{v_3}{\tau_3} = -\frac{v_1}{\tau_1\tau_3}\ ,\ v_5 = \varepsilon v_4 = \frac{-\varepsilon v_1}{\tau_1\tau_3}\ ,\ v_6 = \frac{v_5}{\tau_5} = \frac{-\varepsilon v_1}{\tau_1\tau_3\tau_5}\ ,$$

oder, da nach den Formeln (6., 7.) des §. IV

$$\vartheta_3^2(0\,|\,\tau_1) = \frac{i}{\tau_1}\vartheta_3^2(0\,|\,\tau_2) = \frac{i}{\tau_1}\vartheta_0^2(0\,|\,\tau_3)$$
$$= -\frac{1}{\tau_1\tau_3}\vartheta_2^2(0\,|\,\tau_4) = \frac{\varepsilon i}{\tau_1\tau_3}\vartheta_2^2(0\,|\,\tau_5) = \frac{-\varepsilon}{\tau_1\tau_3\tau_5}\vartheta_0^2(0\,|\,\tau_6)$$

ist,

$$(4.) \quad \begin{cases} v_1 = \dfrac{u}{\pi\vartheta_3^2(0\,|\,\tau_1)}\ ,\ v_2 = \dfrac{ui}{\pi\vartheta_3^2(0\,|\,\tau_2)}\ ,\ v_3 = \dfrac{ui}{\pi\vartheta_0^2(0\,|\,\tau_3)}\ , \\ v_4 = \dfrac{u}{\pi\vartheta_2^2(0\,|\,\tau_4)}\ ,\ v_5 = \dfrac{ui}{\pi\vartheta_2^2(0\,|\,\tau_5)}\ ,\ v_6 = \dfrac{u}{\pi\vartheta_0^2(0\,|\,\tau_6)}\ . \end{cases}$$

Dann erhält man, indem man in den Gleichungen (9.) des §. V die Functionen $\vartheta(x,q)$, $\vartheta_1(x,q)$, ... beziehlich in

$$\vartheta_0(v_1\,|\,\tau_1)\ ,\ \vartheta_1(v_1\,|\,\tau_1)\ ,\ \vartheta_2(v_1\,|\,\tau_1)\ ,\ \vartheta_3(v_1\,|\,\tau_1)$$

verwandelt und diese mittels wiederholter Anwendung der beiden vorstehenden Sätze durch ϑ-Functionen der Argumente

$$(v_2\ ,\ \tau_2)\ ,\ (v_3\ ,\ \tau_3) \ldots (v_6\ ,\ \tau_6)$$

ersetzt, die nachstehenden Darstellungen der elliptischen Functionen $\sin\mathrm{am}(u,k)$, $\cos\mathrm{am}(u,k)$, $\Delta\mathrm{am}(u,k)$, in denen ε, β, γ, $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ dieselbe Bedeutung haben wie in den citirten Gleichungen (9.):

$$(5.)\quad i^{\varepsilon\gamma}\sqrt[4]{k^2}\cdot \sin \operatorname{am}(u,k) = \frac{\vartheta_1(v_1|\tau_1)}{\vartheta_0(v_1|\tau_1)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\vartheta_1(v_2|\tau_2)}{\vartheta_2(v_2|\tau_2)} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\vartheta_1(v_3|\tau_3)}{\vartheta_2(v_3|\tau_3)}$$
$$= \frac{\vartheta_1(v_4|\tau_4)}{\vartheta_0(v_4|\tau_4)} = i^{\frac{\varepsilon}{2}-1}\cdot\frac{\vartheta_1(v_5|\tau_5)}{\vartheta_3(v_5|\tau_5)} = i^{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{\vartheta_1(v_6|\tau_6)}{\vartheta_3(v_6|\tau_6)}.$$

$$(6.)\quad \frac{i^{\varepsilon(\beta+\gamma)}\sqrt[4]{k^2}}{\sqrt[4]{1-k^2}}\cdot \cos \operatorname{am}(u,k) = \frac{\vartheta_2(v_1|\tau_1)}{\vartheta_0(v_1|\tau_1)} = \frac{\vartheta_0(v_2|\tau_2)}{\vartheta_2(v_2|\tau_2)} = i^{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{\vartheta_3(v_3|\tau_3)}{\vartheta_2(v_3|\tau_3)}$$
$$= i^{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{\vartheta_3(v_4|\tau_4)}{\vartheta_0(v_4|\tau_4)} = i^{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{\vartheta_0(v_5|\tau_5)}{\vartheta_3(v_5|\tau_5)} = i^{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{\vartheta_2(v_6|\tau_6)}{\vartheta_3(v_6|\tau_6)}.$$

$$(7.)\quad \frac{i^{\varepsilon\beta}}{\sqrt[4]{1-k^2}}\cdot \Delta \operatorname{am}(u,k) = \frac{\vartheta_3(v_1|\tau_1)}{\vartheta_0(v_1|\tau_1)} = \frac{\vartheta_3(v_2|\tau_2)}{\vartheta_2(v_2|\tau_2)} = i^{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{\vartheta_0(v_3|\tau_3)}{\vartheta_2(v_3|\tau_3)}$$
$$= i^{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{\vartheta_2(v_4|\tau_4)}{\vartheta_0(v_4|\tau_4)} = \frac{\vartheta_2(v_5|\tau_5)}{\vartheta_3(v_5|\tau_5)} = \frac{\vartheta_0(v_6|\tau_6)}{\vartheta_3(v_6|\tau_6)}.$$

Dabei ist zu bemerken, dass

$$v_3 = v_2\ ,\ v_5 = \varepsilon v_4\ ,\ v_6 = v_1$$

ist.

Die Grössen $\tau_1, \ldots \tau_6$, durch τ_1 ausgedrückt, haben die Gestalt

$$\frac{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}\tau_1}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\tau_1},$$

wo jede der Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ einen der Werthe $0, 1, -1$ hat und die Relation $\mathfrak{a}\mathfrak{d}-\mathfrak{b}\mathfrak{c}=1$ besteht. Durch $\tau = \frac{1}{\pi i}\log\psi(k^2)$ ausgedrückt erhalten sie also die Form

$$\frac{c+d\tau}{a+b\tau},$$

wo a, b, c, d ganze, durch die Gleichung

$$ad-bc=1$$

mit einander verbundene Zahlen sind. Es ist zugleich leicht zu zeigen, dass umgekehrt, wenn a, b, c, d irgend vier, der vorstehenden Bedingungsgleichung genügende ganze Zahlen sind, der Ausdruck $\frac{c+d\tau}{a+b\tau}$ stets auf eine der 6 Formen

$$\tau_1,\ \frac{1}{-\tau_1},\ \frac{1-\varepsilon\tau_1}{-\tau_1},\ \frac{\tau_1}{1-\varepsilon\tau_1},\ \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\tau_1},\ -\varepsilon+\tau_1$$

gebracht werden kann, wo τ_1 die Gestalt

$$\tau_1 = \frac{2\gamma+(2\delta+1)\tau}{(2\alpha+1)+2\beta\tau}$$

hat und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze, durch die Gleichung

$$(2\alpha + 1)(2\delta + 1) - 4\beta\gamma = 1$$

mit einander verbundene Zahlen sind. Dabei kann ε nach Belieben gleich 1 oder gleich -1 gesetzt werden.

Nimmt man insbesondere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gleich 0 an, also

$$\tau_1 = \frac{1}{\pi i} \log \psi(k^2)$$

und bestimmt, zunächst unter der Voraussetzung, dass k^2 eine complexe Grösse und, wie oben, ε gleich 1 oder gleich -1 sei, je nachdem die zweite Coordinate von k^2 positiv oder negativ ist, mittels der Formeln (2.) die Grössen $\tau_2, \ldots \tau_6$, so ergiebt sich aus den Gleichungen (1., 5., 6., 7., 8.) des §. VI.

$$(8.)\quad \begin{cases} \tau_1 \pi i = \log \psi(k^2) \;,\; \tau_2 \pi i = \log \psi(1 - k^2) \;,\; \tau_3 \pi i = \log \psi\left(\dfrac{k^2 - 1}{k^2}\right), \\ \tau_4 \pi i = \log \psi\left(\dfrac{1}{k^2}\right),\; \tau_5 \pi i = \log \psi\left(\dfrac{1}{1 - k^2}\right),\; \tau_6 \pi i = \log \psi\left(\dfrac{k^2}{k^2 - 1}\right). \end{cases}$$

Man hat ferner

$$\log(k^2) = \log(-k^2) + \varepsilon \pi i \;,\quad \log(1 - k^2) = \log(k^2 - 1) - \varepsilon \pi i,$$

und daher

$$(9.)\qquad \sqrt[4]{k^2} = i^{\frac{\varepsilon}{2}} \sqrt[4]{-k^2},\; \sqrt[4]{1 - k^2} = i^{-\frac{\varepsilon}{2}} \sqrt[4]{k^2 - 1}.$$

Man erhält also aus den Gleichungen (5., 6., 7.), wenn man jetzt wieder die Jacobi'schen Bezeichnungen einführt und

$$(10.)\quad \begin{cases} q = \psi(k^2) \;,\; q_1 = \psi(1 - k^2) \;,\; q_2 = \psi\left(\dfrac{k^2 - 1}{k^2}\right), \\ q_3 = \psi\left(\dfrac{1}{k^2}\right),\; q_4 = \psi\left(\dfrac{1}{1 - k^2}\right),\; q_5 = \psi\left(\dfrac{k^2}{k^2 - 1}\right); \end{cases}$$

$$(11.)\quad \begin{cases} x = \dfrac{u}{\vartheta_3^2(0, q)},\; x_1 = \dfrac{ui}{\vartheta_3^2(0, q_1)},\; x_2 = \dfrac{ui}{\vartheta^2(0, q_2)} \\ x_3 = \dfrac{u}{\vartheta_2^2(0, q_3)},\; x_4 = \dfrac{ui}{\vartheta_2^2(0, q_4)},\; x_5 = \dfrac{u}{\vartheta^2(0, q_5)} \end{cases}$$

setzt — wo dann

$$(12.)\quad \begin{cases} q = -q_5,\; q_2 = -q_1,\; q_4 = -q_3 \\ x_2 = x_1,\; x_4 = \varepsilon x_3,\; x_5 = x \end{cases}$$

ist — [illegible] specielle Formel-Systeme, die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt sind.

In den drei ersten Colonnen stehen unter $\sin\mathrm{am}(u,k)$, $\cos\mathrm{am}(u,k)$, $\Delta\,\mathrm{am}(u,k)$ die Zähler, und in der vierten Colonne der gemeinschaftliche Nenner der Brüche, durch welche diese Functionen in den sechs angegebenen Fällen ausgedrückt werden.

	$\sin\mathrm{am}(u,k)$	$\cos\mathrm{am}(u,k)$	$\Delta\,\mathrm{am}(u,k)$	
1.	$\frac{1}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\vartheta_1(x,q)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\vartheta_2(x,q)$	$\sqrt[4]{1-k^2}\cdot\vartheta_3(x,q)$	$/\,\vartheta(x,q)$
2.	$\frac{1}{i\sqrt[4]{k^2}}\cdot\vartheta_1(x_1,q_1)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\vartheta(x_1,q_1)$	$\sqrt[4]{1-k^2}\cdot\vartheta_3(x_1,q_1)$	$/\,\vartheta_2(x_1,q_1)$
3.	$\frac{1}{i\sqrt[4]{k^2}}\cdot\vartheta_1(x_2,q_2)$	$\frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\vartheta_3(x_2,q_2)$	$\sqrt[4]{k^2-1}\cdot\vartheta(x_2,q_2)$	$/\,\vartheta_2(x_2,q_2)$
4.	$\frac{1}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\vartheta_1(x_3,q_3)$	$\frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}}\cdot\vartheta_3(x_3,q_3)$	$\sqrt[4]{k^2-1}\cdot\vartheta_2(x_3,q_3)$	$/\,\vartheta(x_3,q_3)$
5.	$\frac{1}{i\sqrt[4]{-k^2}}\cdot\vartheta_1(x_4,q_4)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{-k^2}}\cdot\vartheta(x_4,q_4)$	$\sqrt[4]{1-k^2}\cdot\vartheta_2(x_4,q_4)$	$/\,\vartheta_3(x_4,q_4)$
6.	$\frac{1}{\sqrt[4]{-k^2}}\cdot\vartheta_1(x_5,q_5)$	$\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{-k^2}}\cdot\vartheta_2(x_5,q_5)$	$\sqrt[4]{1-k^2}\cdot\vartheta(x_5,q_5)$	$/\,\vartheta_3(x_5,q_5)$

Diese Ausdrücke der elliptischen Functionen gelten nun auch für reelle Werthe von k^2, wenn die vorkommenden Wurzelgrössen richtig bestimmt werden, worüber ich Folgendes bemerke.

Es ist oben angegeben worden, wie man für einen gegebenen reellen Werth von k^2 die Wurzelgrösse $\sqrt[4]{1-k^2}$, von welcher der Werth von $q=\psi(k^2)$ abhängt, sowie die Werthe von $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{q'}$ zu bestimmen habe, damit die Gleichungen

$$\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\sqrt[4]{k^2}\cdot\frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}=\sqrt[4]{1-k^2}$$

bestehen. Auf dieselbe Weise fixire man, wenn an die Stelle von k^2 die Grössen

$$(13.)\quad k_1^2 = 1 - k^2,\ k_2^2 = \frac{k^2-1}{k^2},\ k_3^2 = \frac{1}{k^2},\ k_4^2 = \frac{1}{1-k^2},\ k_5^2 = \frac{-k^2}{1-k^2}$$

treten, für $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$, die Werthe von

$$\sqrt[4]{1-k_\nu^2},\ \sqrt[4]{k_\nu^2},\ q_\nu,\ \sqrt[4]{q_\nu},$$

so dass man

$$(14.)\quad \frac{\vartheta_2(0,q_\nu)}{\vartheta_3(0,q_\nu)} = \sqrt[4]{k_\nu^2},\ \frac{\vartheta(0,q_\nu)}{\vartheta_3(0,q_\nu)} = \sqrt[4]{1-k_\nu^2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4, 5)$$

hat. Bestimmt man dann die Werthe, welche $\frac{\vartheta_2(0,q_\nu)}{\vartheta_3(0,q_\nu)}, \frac{\vartheta(0,q_\nu)}{\vartheta_3(0,q_\nu)}$ nach der vorstehenden Formeltabelle haben müssen, so ergiebt sich

$$(15.)\quad \begin{cases} \sqrt[4]{k_1^2} = \sqrt[4]{1-k^2}, & \sqrt[4]{1-k_1^2} = \sqrt[4]{k^2} \\ \sqrt[4]{k_2^2} = \sqrt[4]{\frac{k^2-1}{k^2}} = \frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_2^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{k^2}} \\ \sqrt[4]{k_3^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_3^2} = \sqrt[4]{\frac{k^2-1}{k^2}} = \frac{\sqrt[4]{k^2-1}}{\sqrt[4]{k^2}} \\ \sqrt[4]{k_4^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{1-k^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_4^2} = \sqrt[4]{\frac{-k^2}{1-k^2}} = \frac{\sqrt[4]{-k^2}}{\sqrt[4]{1-k^2}} \\ \sqrt[4]{k_5^2} = \sqrt[4]{\frac{-k^2}{1-k^2}} = \frac{\sqrt[4]{-k^2}}{\sqrt[4]{1-k^2}}, & \sqrt[4]{1-k_5^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{1-k^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen werden also die Werthe gegeben, die in den Formeln (1., 2.) die Grössen $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$, in den Formeln (3., 4.) ferner $\sqrt[4]{k^2-1}$, $\sqrt[4]{k^2}$, und in den Formeln (5., 6.) $\sqrt[4]{-k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$ haben müssen, wobei es nun keinen Unterschied macht, ob k^2 complex oder reell ist.

Gehört die Grösse $t = k^2$ dem oben (§. VI) mit T_0 bezeichneten Bereiche an, so wird man von den vorstehenden Ausdrücken der elliptischen Functionen am zweckmässigsten die unter (1.) aufgestellten anwenden, weil dann der absolute Betrag von q niemals die Grenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}\right)^{4n+1}$$

überschreitet und deshalb die ϑ-Reihen sehr rasch convergiren.

Gehört aber $t = k^2$ dem Bereiche T_ν an ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$), so liegt k_ν^2 im Bereiche T_0, und man gebraucht dann zur Berechnung der elliptischen Functionen am zweckmässigsten die in der $(\nu+1)$ten Horizontalreihe der Tabelle angegebenen Ausdrücke.

Ist k^2 reell und liegt im Bereiche T_ν ($\nu = 0, \ldots 5$), so sind in den unter No. $(\nu + 1)$ aufgestellten Formeln q_ν und die vorkommenden Wurzelgrössen sämmtlich reelle und positive Grössen.

Es ist noch zu bemerken, dass aus den Gleichungen

$$\vartheta_3(0, q_\nu) = \vartheta_3(0, q_\nu^4) + \vartheta_2(0, q_\nu^4), \quad \frac{\vartheta_2(0, q_\nu^4)}{\vartheta_3(0, q_\nu^4)} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - k_\nu^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - k_\nu^2}}$$

sich die folgenden Ausdrücke von $\vartheta_3(0, q_\nu)$, $\vartheta(0, q_\nu)$, $\vartheta_2(0, q_\nu)$ ergeben:

$$(16.)\quad \begin{cases} \vartheta_3(0,q_\nu) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot \vartheta_3(0, q_\nu^4) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot (1 + 2q_\nu^4 + 2q_\nu^{16} + \ldots) \\ \vartheta(0,q_\nu) = \dfrac{2\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot \vartheta_3(0, q_\nu^4) = \dfrac{2\sqrt[4]{1-k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot (1 + 2q_\nu^4 + 2q_\nu^{16} + \ldots) \\ \vartheta_2(0,q_\nu) = \dfrac{2\sqrt[4]{k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot \vartheta_3(0, q_\nu^4) = \dfrac{2\sqrt[4]{k_\nu^2}}{1+\sqrt[4]{1-k_\nu^2}} \cdot (1 + 2q_\nu^4 + 2q_\nu^{16} + \ldots). \end{cases}$$

Man erhält also insbesondere für die in den Gleichungen (11.) vorkommenden Grössen $\vartheta_3(0, q), \ldots \vartheta(0, q_5)$:

$$(17.)\quad \begin{cases} \vartheta_3(0, q) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{1-k^2}} \cdot (1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots) \\ \vartheta_3(0, q_1) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{k^2}} \cdot (1 + 2q_1^4 + 2q_1^{16} + \ldots) \\ \vartheta(0, q_2) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{k^2}} \cdot (1 + 2q_2^4 + 2q_2^{16} + \ldots) \\ \vartheta_2(0, q_3) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{k^2}-1+\sqrt[4]{k^2}} \cdot (1 + 2q_3^4 + 2q_3^{16} + \ldots) \\ \vartheta_2(0, q_4) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{1-k^2}+\sqrt[4]{1-k^2}} \cdot (1 + 2q_4^4 + 2q_4^{16} + \ldots) \\ \vartheta(0, q_5) = \dfrac{2}{1+\sqrt[4]{1-k^2}} \cdot (1 + 2q_5^4 + 2q_5^{16} + \ldots). \end{cases}$$

Berichtigungen.

Seite 95 Gl. (1.) muss auf der Rechten im Zähler q^2 statt q stehen:

" 105 Zeile 4 statt γ_n lies α_n

" 172 " 2 von unten muss es heissen:

$$e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta+1)\log\psi(t)}{(2\alpha+1)\pi i + 2\beta\log\psi(t)}\cdot\pi i}$$

" 413 " 14 " " statt nur überwiegenden lies aus überwiegendem

" 413 " 7 " " " das Gneiss lies der Gneiss

NAMENREGISTER.

AUWERS, Punta Arenas. Festrede zur Vorfeier des Geburtstages Seiner Majestät des Kaisers und Königs. 175—202.

BAGINSKY, Dr. B., in Berlin, zur Physiologie der Gehörschnecke. 407—410.

DU BOIS-REYMOND, CHARLES DARWIN. Nachruf. 27—29.

———————, Bericht des Curatoriums der HUMBOLDT-Stiftung. 203—204.

———————, über secundär-elektromotorische Erscheinungen an Muskeln, Nerven und elektrischen Organen. 205—266.

BURMEISTER, H., in Buenos Ayres, Beschreibung des Panzers von Eutatus Seguini. 565—583.

DAMES, W., Prof. in Berlin, über eine tertiäre Wirbelthierfauna von der westlichen Insel des Birket-el-Qurūn im Fajum (Aegypten). 35—59.

DARWIN, CHARLES. — Nachruf. 27—29.

FRENZEL, Dr. JOH., in Neapel, über die Mitteldarmdrüse (Leber) der Decapoden. 585—591.

FRITSCH, GUSTAV, Prof. in Berlin, Bericht über die Fortsetzung der Untersuchungen an elektrischen Fischen: Beiträge zur Embryologie von Torpedo. 107—111.

FUCHS, L., in Heidelberg, über Functionen einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale einer gleich grossen Anzahl gegebener Functionen entstehen. 309—318.

HAGEN, G., die wahrscheinlichen Fehler der Constanten. 599—602.

VON HELDREICH, Dr. TH., in Athen, Bericht über die botanischen Ergebnisse einer Bereisung Thessaliens. 61—70.

VON HELMHOLTZ, H., Bestimmung magnetischer Momente mit der Waage. 267—270.

———————, zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. Dritter Beitrag. Folgerungen die galvanische Polarisation betreffend. 373—391.

HILDEBRANDT, J. M., Mantipus und Phrynocara, zwei neue Batrachiergattungen von Madagascar. 71—74.

KIRCHHOFF, G., über die elektrischen Strömungen in einem Kreiscylinder. 319—324.

KOHLRAUSCH, F., Prof. in Würzburg, über ein Verfahren, elektrische Widerstände unabhängig von Zuleitungswiderständen zu vergleichen. 289—298.

KRAUSE, Dr. H., in Berlin, über die Beziehungen der Grosshirnrinde zu Kehlkopf und Rachen. 593—594.

KRONECKER, L., zur Theorie der elliptischen Functionen. 299—308. 325—330.

———— —, Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. 421—433. 513—520.

————, zur Theorie der Formen höherer Stufen. 521—524.

KUNDT, A., in Strassburg, über eine einfache Methode zur Untersuchung der Thermo-Elektricität und Piezo-Elektricität der Krystalle. 283—287.

LANDOLT, H., über die Existenzdauer der unterschwefligen Säure in wässer[illegible] Lösungen. 605—614.

Lipschitz, R., in Bonn, Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften. 75—94.

————, Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements. 331—350.

Mendelssohn, Dr. M., in Berlin, Untersuchungen über Reflexe. Zweite Mittheilung. 31—33.

Munk, Hermann, über die centralen Organe für das Sehen und Hören bei den Wirbelthieren. 469—503.

Oberbeck, A., Prof. in Halle a. S., über die magnetisirende Wirkung elektrischer Schwingungen. 539—548.

Peters, W., über Mantipus und Phrynocara, zwei neue Batrachiergattungen aus dem Hinterlasse des Reisenden J. M. Hildebrandt von Madagascar. 71—74.

Quincke, G., in Heidelberg, über die Änderung des Volumens und des Brechungsexponenten von Flüssigkeiten durch hydrostatischen Druck. 271—274.

- - - - -, über die Dielektricitäts-Constante und die elektrische Doppelbrechung isolirender Flüssigkeiten. 275—282.

Rammelsberg, C., Beiträge zur Kenntniss der vanadinsauren und phosphorsauren Salze. 1—26.

————————, über den Cuprodescloizit, ein neues Vanadinerz aus Mexico. 603—604.

Reusch, E., Prof. in Tübingen, über eine neue Spaltungsrichtung am Gypsspath. 157—162.

Roth, J., über geröllführende Gneisse von Obermittweida im sächsischen Erzgebirge. 411—417.

———, über die Vorkommen der Küste Labrador. 419—420.

Schmitz, Fr., Prof. in Bonn, Untersuchungen über die Befruchtung der Florideen. 113—156.

Schwendener, S., zur Theorie der Blattstellungen. 435—467.

Siemens, Werner, über die Zulässigkeit der Annahme eines elektrischen Sonnen-Potentials und dessen Bedeutung zur Erklärung terrestrischer Phänomene. 351—372.

Toepler, A., in Dresden, über einige Eigenschaften kreuzweise verbundener Magnetstäbe. 505—512.

————, über die Bestimmung der magnetischen Horizontalintensität mit Anwendung der Waage. 549—563.

Voigt, W., Prof. in Königsberg (jetzt in Göttingen), Bestimmung der Elasticitäts-Constanten des Kupfers. 525—537.

Weber, Rud., Prof. in Berlin, über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Depressions-Erscheinungen der Thermometer. 615—620.

Websky, über Jeremejewit und Eichwaldit vom Berge Soktuj in Daurien. 393—406.

Weierstrass, K., zur Theorie der elliptischen Functionen. 95—105. 163—173. 621—648.

Weingarten, J., Prof. in Berlin, über die Differentialgleichung der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden können. 595—598.

SACHREGISTER.

Astronomie. — Auwers, Mittheilung über die Expedition nach Punta Arenas zur Beobachtung des Venus-Durchgangs (Festrede). 175—202. — Siemens, über die Zulässigkeit der Annahme eines elektrischen Sonnen-Potentials und dessen Bedeutung zur Erklärung terrestrischer Phänomene. 351—372.

Bericht über die Humboldt-Stiftung. 203—204.

Birket-el-Qurun, eine tertiäre Wirbelthierfauna von der westlichen Insel desselben, von W. Dames. 35—59.

Blattstellungen, zur Theorie derselben, von S. Schwendener. 435—467.

Botanik. — von Heldreich, Bericht über die botanischen Ergebnisse einer Bereisung Thessaliens. 61—70. — Schmitz, Untersuchungen über die Befruchtung der Florideen. 113—156. — Schwendener, zur Theorie der Blattstellungen. 435—467.

Chemie. — Landolt, über die Existenzdauer der unterschwefligen Säure in wässerigen Lösungen. 605—614. — Rammelsberg, Beiträge zur Kenntniss der vanadinsauren und phosphorsauren Salze. 1—26. — Derselbe, über den Cuprodescloizit, ein neues Vanadinerz aus Mexico. 603—604.

Vergl. auch Physik.

Cuprodescloizit, ein neues Vanadinerz aus Mexico, von C. Rammelsberg. 603—604.

Decapoden, über die Mitteldarmdrüse (Leber) derselben, von Dr. Johannes Frenzel. 585—591.

Depressions-Erscheinungen der Thermometer, über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf dieselben, von Rud. Weber. 615—620.

Dielektricitäts-Constante und elektrische Doppelbrechung isolirender Flüssigkeiten, von G. Quincke. 275—282.

Differentialgleichung der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden können, von J. Weingarten. 595—598.

Eichwaldit vom Berge Soktuj in Daurien, von Websky. 393—406.

Elasticitäts-Constanten des Kupfers, Bestimmung derselben, von W. Voigt 525—537.

Elektrische Doppelbrechung isolirender Flüssigkeiten, von G. Quincke. 275—282.

Elektrische Fische, Bericht über die Fortsetzung der Untersuchungen an denselben, von Gustav Fritsch. 107—111.

Elektrische Schwingungen, über die magnetisirende Wirkung derselben, von A. Oberbeck. 539—548.

Elektrisches Sonnen-Potential, über die Zulässigkeit der Annahme eines so[illegible] und dessen Bedeutung zur Erklärung terrestrischer Phänomene, von W[illegible] Siemens. 351—372.

Elektrische Strömungen in einem Kreiscylinder, von G. Kirchhoff. 319—

Elektrische Widerstände, über ein Verfahren, dieselben unabhängig von Zu[illegible] widerständen zu vergleichen, von F. Kohlrausch in Würzburg. [illegible]—

Elliptische Functionen, Bemerkungen über die Multiplication derselben, von L. Kronecker. 421—433. 513—520.

Elliptische Functionen, zur Theorie derselben, von K. Weierstrass. 95—105. 163—173. 621—647.

Elliptische Functionen, zur Theorie derselben, von L. Kronecker. 299—308. 325—330.

Eutatus Seguini, Beschreibung des Panzers von —, von H. Burmeister. 565—583.

Festreden. — Zur Vorfeier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs. (Auwers). 175—202.

Florideen. Untersuchungen über die Befruchtung derselben, von Fr. Schmitz. 113—156.

Formen höherer Stufen, zur Theorie derselben, von L. Kronecker. 521—524.

Gehörschnecke, zur Physiologie derselben, von B. Baginsky. 407—410.

Geologie. — Dames, über eine tertiäre Wirbelthierfauna von der westlichen Insel des Birket-el-Qurûn im Fajum (Aegypten). 35—59.

Gneisse, über geröllführende von Obermittweida im Sächsischen Erzgebirge, von Roth. 411—417.

Grosshirnrinde, über die Beziehungen derselben zu Kehlkopf und Rachen, von Dr. H. Krause. 593—594.

Gypsspath, über eine neue Spaltungsrichtung desselben, von E. Reusch in Tübingen. 157—162.

Humboldt-Stiftung, Bericht des Curatoriums für das Jahr 1882. 203—204.

Hydrostatischer Druck, über die Änderung des Volumens und des Brechungsexponenten von Flüssigkeiten durch denselben, von G. Quincke in Heidelberg. 271—274.

Jeremejewit vom Berge Soktuj in Daurien, von Websky. 393—406.

Integrale von Functionen, über die Umkehrung derselben, von L. Fuchs in Heidelberg. 309—318.

Krystalle, über eine einfache Methode zur Untersuchung der Thermo-Elektricität und Piezo-Elektricität derselben, von A. Kundt in Strassburg. 283—287.

Krystallographie. — Reusch, über eine neue Spaltungsrichtung am Gypsspath. 157—162. — Websky, über Jeremejewit und Eichwaldit vom Berge Soktuj in Daurien. 393—406.

Kupfer, Bestimmung der Elasticitäts-Constanten desselben, von W. Voigt. 525—537.

Labrador, über die Vorkommen der Küste —, von J. Roth. 419—420.

Magnetische Horizontalintensität, über die Bestimmung derselben mit Anwendung der Waage, von A. Toepler. 549—563.

Magnetische Momente, über die Bestimmung derselben mit der Waage, von H. von Helmholtz. 267—270.

Magnetisirende Wirkung elektrischer Schwingungen, von A. Oberbeck. 539—548.

Magnetstäbe, über einige Eigenschaften kreuzweise verbundener —, von A. Toepler. 505—512.

Mantipus nov. gen., von W. Peters. 71—74.

Mathematik. — Fuchs, über Functionen einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale einer gleich grossen Anzahl gegebener Functionen entstehen. 309—318. — Hagen, die wahrscheinlichen Fehler der Constanten. 599—602. — Kronecker, zur Theorie der elliptischen Functionen. 299—308. 325—330. — Derselbe, Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. 421—433. 513—520. — Derselbe, zur Theorie der Formen höherer Stufen. 521—524. — Lipschitz, Untersuchungen über die Krümmungen von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse

betreffenden Eigenschaften. 75—94. — Derselbe, Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements. 331—350. — Weierstrass, zur Theorie der elliptischen Functionen. 95—105. 163—173. 621—648. — Weingarten, über die Differentialgleichung der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden können. 595—598.

Mineralogie. — Roth, über geröllführende Gneisse von Obermittweida im sächsischen Erzgebirge. 411—417. — Derselbe, über die Vorkommen der Küste Labrador. 419—420.

Vergl. auch Chemie und Krystallographie.

Mitteldarmdrüse der Decapoden, von Dr. Johannes Frenzel. 585—591.

Multiplication der elliptischen Functionen, Bemerkungen über dieselbe, von L. Kronecker. 421—433. 513—520.

Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften, über die Bestimmung derselben, von R. Lipschitz. 75—94.

Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements, über die Bestimmung derselben, von Lipschitz. 331—350.

Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden können, über die Differentialgleichung derselben, von J. Weingarten. 595—598.

Obermittweida im sächsischen Erzgebirge, über geröllführende Gneisse von —, von J. Roth. 411—417.

Organe, über die centralen, für das Sehen und Hören bei den Wirbelthieren, von Hermann Munk. 469—503.

Phosphorsaure Salze, Beiträge zur Kenntniss derselben, von C. Rammelsberg. 1—26.

Phrynocara nov. gen. 71—74.

Physik. — von Helmholtz. Bestimmung magnetischer Momente mit der Waage. 267—270. — Derselbe, zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. Dritter Beitrag. Folgerungen die galvanische Polarisation betreffend. 373—391. — Kirchhoff, über die elektrischen Strömungen in einem Kreiscylinder. 319—324. — Kohlrausch, über ein Verfahren elektrische Widerstände unabhängig von Zuleitungswiderständen zu vergleichen. 289—298. — Kundt, über eine einfache Methode zur Untersuchung der Thermo-Elektricität und Piezo-Elektricität der Krystalle. 283—287. — Oberbeck, über die magnetisirende Wirkung elektrischer Schwingungen. 539—548. — Quincke, über die Änderung des Volumens und des Brechungsexponenten von Flüssigkeiten durch hydrostatischen Druck. 271—274. — Derselbe, über die Dielektricitäts-Constante und die elektrische Doppelbrechung isolirender Flüssigkeiten. 275—282. — Toepler, über die Bestimmung der magnetischen Horizontalintensität mit Anwendung der Waage. 549—563. — Derselbe, über einige Eigenschaften kreuzweise verbundener Magnetstäbe. 505—512. — Voigt, Bestimmung der Elasticitäts-Constanten des Kupfers. [illegible]—537. — R. Weber, über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die De[illegible]ons-Erscheinungen der Thermometer. 615—620.

Physiologie und Anatomie. — Baginsky, zur Physiologie der Ge[illegible] 407—410. — du Bois-Reymond, über secundär-elektromotorische Ersch[illegible] an Muskeln, Nerven und elektrischen Organen. 205—266. — Frenzel, [illegible] Mitteldarmdrüse (Leber) der Decapoden. 585—591. — Fritsch, Ber[illegible] Fortsetzung der Untersuchungen an elektrischen Fischen. Beiträge von Torpedo. 107—111. — Krause, über die Beziehungen d[illegible]

Kehlkopf und Rachen. 593—594. — MENDELSSOHN, Untersuchungen über Reflexe. Zweite Mittheilung. 31—33. — MUNK, über die centralen Organe für das Sehen und Hören bei den Wirbelthieren. 469—503.

Piezo-Elektricität der Krystalle, über eine einfache Methode zur Untersuchung derselben, von A. KUNDT in Strassburg. 283—287.

Reflexe, Untersuchungen darüber, von Dr. MORITZ MENDELSSOHN. 31—33.

Secundär-elektromotorische Erscheinungen an Muskeln, Nerven und elektrischen Organen, von DU BOIS-REYMOND. 205—266.

Tertiäre Wirbelthierfauna von der westlichen Insel des Birket-el-Qurūn im Fajum (Aegypten), von W. DAMES. 35—59.

Thermodynamik chemischer Vorgänge, von VON HELMHOLTZ. 373—391.

Thermo-Elektricität der Krystalle, über eine einfache Methode zur Untersuchung derselben, von A. KUNDT in Strassburg. 283—287.

Thermometer, über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Depressions-Erscheinungen derselben, von RUD. WEBER. 615—620.

Thessalien, Bericht über die botanischen Ergebnisse einer Bereisung desselben, von TH. VON HELDREICH. 61—70.

Torpedo, Beiträge zur Embryologie derselben, von GUSTAV FRITSCH. 107—111.

Unterschweflige Säure, über die Existenzdauer derselben in wässerigen Lösungen, von H. LANDOLT. 605—614.

Vanadinsaure Salze, Beiträge zur Kenntniss derselben, von C. RAMMELSBERG. 1—26.

Venus-Durchgang vom 6. December 1882, Expedition nach Punta Arenas zur Beobachtung desselben. 175—202.

Wahrscheinliche Fehler der Constanten, über die Berechnung derselben, von G. HAGEN. 599—602.

Wirbelthiere, über die centralen Organe für das Sehen und Hören bei denselben, von HERMANN MUNK. 469—503.

Wirbelthierfauna, über eine tertiäre —, von der westlichen Insel des Birket-el-Qurūn im Fajum (Aegypten), von W. DAMES. 35—59.

Zoologie. — BURMEISTER, Beschreibung des Panzers von Euphractus Seguini. 565—583. — PETERS, über Mantipus und Phrynocara, zwei neue Batrachiergattungen aus dem Hinterlasse des Reisenden J. M. HILDEBRANDT von Madagascar. 71—74.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

QA
Q3
M38

MATHEMATISCHE

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARY

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT IX.

NOVEMBER 1883.

BERLIN 1883.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI FERD. DÜMMLER'S VERLAGSBUCHHANDLUNG.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Kö[illegible] Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört und [illegible] an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen f[illegible] Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaktion der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** [illegible]

§ 2.

1. [illegible]

2. [illegible]

§ 4.

2. [illegible]

§ 5.

1. [illegible] **druckfertig** [illegible]

§ 6.

2. [illegible]

3. [illegible]

Nothwendigen [illegible]

§ 7.

[illegible]

§ 8.

5. [illegible]

§ 9.

1. [illegible]

§ 11.

1. [illegible]

2. [illegible]

§ 5.

[illegible]

§ 29.

1. [illegible] **Für alle übrigen Theile derselben sind jeder Richtung nur die Verfasser verantw[illegible]**

42. Über die Mitteldarmdrüse (Leber) der Decapoden.

Von Dr. Johannes Frenzel
z. Z. in Neapel.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond am 1. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLII]; — ausgegeben am 8. November.)

Eine ausführliche Untersuchung über den Bau der Crustaceenleber ist erst vor wenigen Jahren von M. Weber[1] angestellt worden. Das vorzügliche Material, welches der Golf von Neapel besonders an Decapoden bietet, veranlasste mich, diese Untersuchung wieder aufzunehmen und zu erweitern. Zu grossem Danke bin ich dem Königl. Preussischen Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten verpflichtet, welches mir einen Arbeitstisch in der hiesigen Zoologischen Station zur Verfügung stellte; ferner sei es mir gestattet, an dieser Stelle der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin meinen Dank auszudrücken für die Unterstützung, welche sie mir gewährt hat, um die vorliegende Arbeit zum Abschluss bringen zu können.

Von den 26 verschiedenen Decapoden-Species, welche ich zur Untersuchung heranzog, wurden nachfolgend genannte in besonders eingehender Weise behandelt: *Squilla Desmerasti*, *Palaemon serratus*, *Crangon cataphractus*, *Lysmata seticaudata*, *Scyllarus ursus*, *Palinurus vulgaris*, *Dromia vulgaris*, *Maja verrucosa*, *M. squinado*, *Lupa hastata*, *Portunus arcuatus* und *Carcinus maenas*. In histologischer Beziehung berücksichtigte ich allein das Epithel der Leberschläuche, ausserdem fasste ich noch einige bisher wenig berücksichtigte physiologische Momente in's Auge. Die Untersuchung geschah zum Theil an frischen Zupfpräparaten, zum Theil an mikroskopischen Quer- und Längsschnitten, welche von einem Materiale herrührten, das in Pierinschwefelsäure, Alkohol von verschiedenem Grade, Sublimatwasser oder dergl. abgetödtet und in 90procentigem Alkohol conservirt worden war. Zur Einbettung der zu schneidenden Präparate wurde Paraffin verwandt, die Färbung wurde mit Boraxcarmin oder mit der sauren

[1] Über den Bau und die Thätigkeit der sog. Leber der Crustaceen. Archiv mikroskopische Anatomie. Bd. XVII. S. 385 ff.

Alkoholcarminlösung Grenacher's bewerkstelligt, schliesslich wurden die Schnitte theilweise nach der Methode Giesbrecht's, theilweise nach der von Phrelfall und mir angegebenen behandelt.

Das Epithel der Decapodenleber, welche zweckmässig wohl als Mitteldarmdrüse zu bezeichnen wäre, wird zunächst aus zweierlei Zellarten zusammengesetzt, welche Weber einerseits Leberzellen, andererseits Fermentzellen nannte. Die Bezeichnung der ersteren Zellen muss jedoch als irrthümlich betrachtet werden, sie mögen daher vorläufig der Kürze halber Fettzellen oder besser fetthaltige Zellen heissen.

1. Die fetthaltigen Zellen.

Wird ein Stückchen von der Mitteldarmdrüse in verdünntem Seewasser (circa $1^1/_2$ Procent) oder im Blute des betreffenden Individuums zerzupft, so schwimmen die Fettzellen meist als Kugeln umher, so bei *Squilla*, *Maja* und *Carcinus*: eine cylindrische Gestalt zeigen sie unter derselben Behandlung bei *Scyllarus*, *Dromia* und *Palinurus*, vielleicht weil sie in diesem Falle schneller absterben. In den Querschnitten erscheinen sie überall als typische Cylinderzellen, deren Form durch ihr Aneinandergedrängtsein sowie durch die eingeschobenen Fermentzellen bedingt ist.

Die Grösse dieser Zellen ist bei den verschiedenen Species eine annähernd gleiche und unabhängig von der Grösse des Individuums. So ist der Zelldurchmesser bei beiden Majen = 0.042 mm, bei dem bedeutend kleineren *Crangon* = 0.06 mm. Das Mittel ist = 0.05 mm wie bei *Lysmata* und *Palinurus*. Die Höhe der Zellen war bei *Carcinus* = 0.07 mm.

Am Querschnitt sieht man, dass das Lumen eines jeden Tubus von einem zarten Saum ausgekleidet ist. Im frischen Präparat trägt jede einzelne Zelle das ihr zugehörige Stückchen dieses Saumes. Seine Höhe und Deutlichkeit ist bei den einzelnen Arten verschieden: gut zu sehen ist er im frischen Zustande bei *Squilla Desmarasti*, *Carcinus*, *Palaemon*, *Scyllarus* und *Crangon*, wo er auch überall ziemlich hoch ist. Niedrig, aber deutlich ist er bei *Maja verrucosa*. Leicht geht er zu Grunde bei *Pagurus* und *Squilla mantis*, bei den anderen löst er sich erst nach einiger Zeit auf.

Dieser Zellsaum, welcher völlig farblos und nur schwer sichtbar ist, zeigt sich mehr oder weniger deutlich gestreift: besonders deutlich bei *Crangon*, *Maja* und *Scyllarus*. Oft erscheint er auseinandergebreitet und in einzelne feine Stäbchen oder Härchen zerfallen, gerade so, wenn auch nicht so schön, wie ich es am Darm der Insecten nach-

gewiesen habe.[1] Physiologisch hat er jedenfalls die Function einer porösen Cuticula.

Im oberen Theil der Zellen, d. h. unmittelbar unter dem Saume, findet sich eine Längsstreifung im Protoplasma, wie ich sie seiner Zeit ebenfalls in den Mitteldarmzellen der Insecten und auch der Krebse gefunden habe. Sie ist gerade dort am besten zu sehen, wo der Härchensaum am deutlichsten ist, nämlich bei mehreren *Crangon*-Species, bei *Dromia* und bei *Carcinus*; am Querschnitt erscheint sie sehr gut bei *Maja, Dromia* u. s. w. nach der Behandlung mit alkoholischer oder wässriger Sublimatlösung.

Diese Längsstreifung lässt sich eine kurze Strecke weit in der Zelle verfolgen, worauf der eigentliche Zellinhalt auftritt, nämlich starklichtbrechende Kügelchen, welche in mehr oder weniger grosser Anzahl die Zelle bis zum Kerne hier erfüllen. Die Grösse dieser Kugeln oder Tröpfchen ist variabel und daher auch ihre relative Menge, da fast stets der grösste Theil der Zelle von ihnen eingenommen wird. Bei *Palaemon* finden sich nur ein oder wenige grosse Tropfen; ähnlich ist es bei *Crangon* und *Squilla mantis*, wo meist ein grosser und ein ganz kleiner vorhanden ist. Mässig gross ist die Anzahl der annähernd gleich grossen Kugeln bei *Maja* (8 bis 15 Stück im Mittel) und *Scyllarus*. Bei *Carcinus* sind es mehrere grosse und sehr viele bedeutend kleinere; bei *Palinurus* ist die Anzahl schon 20 im Mittel, und noch grösser ist dieselbe bei *Dromia, Gebia* und *Pilumnus*, wo sich äusserst zahlreiche sehr kleine Kügelchen finden. Im letzteren Falle liegen dieselben eng aneinandergedrängt, ohne sich jedoch gegenseitig abzuplatten; sind weniger Kügelchen vorhanden, so bestehen weitere Zwischenräume zwischen ihnen, was an mikroskopischen Schnitten deutlich hervortritt. In diesen ist das Fett durch die Behandlung mit Terpentin oder dergleichen ausgezogen und das Protoplasma erscheint zwischen ihnen wie ein Netzwerk, dessen einzelne Fäden aus noch feineren zusammengesetzt sind, in denen kleine sich mit Carmin färbende stark brechende Granula vertheilt erscheinen.

Die besprochenen Kügelchen oder Tröpfchen sind meist farblos; sind sie sehr klein, so sehen sie allerdings immer bräunlich aus, doch kann dies eine durch Lichtbrechung bedingte optische Erscheinung sein. Stets ungefärbt fand ich sie bei *Squilla, Scyllarus* und *Carcinus*; und in der Regel bei *Maja verrucosa, Crangon* und *Dromia*. Wenn sie gefärbt sind, so haben sie eine dunkelgelbe oder braun-

[1] Johannes Frenzel. Bau und Thätigkeit des Darms der Larve des *Tenebrio molitor* u. s. w. Berliner Entomologische Zeitschrift 1882.

gelbe Farbe, doch kommen neben so gefärbten auch völlig farblose Kugeln in einer Zelle vor, z. B. bei *Dromia* und den Majen. Nur bei *Crangon, Munida, Pisa* und bei zwei Exemplaren von *Palinurus* waren sie sämmtlich braungelb, während sie bei anderen Individuen letzterer Art stets farblos sind.

Aus welcher chemischen Substanz diese Kugeln bestehen, lässt sich nicht sicher angeben. In ihren Eigenschaften stehen sie in vieler Beziehung dem Fett sehr nahe, verhalten sich aber zum Theil abweichend davon. Mit echtem Fett haben sie gemein, dass sie sich bei Zusatz von Osmiumsäure (1 Procent) schnell und stark bräunen, ferner, dass sie sich in Äther, Chloroform u. s. w. ohne Rückstand lösen. Das Ätherextract aus der Drüse giebt ferner, auf Papier gebracht, einen unverkennbaren Fettfleck. Es ist jedoch sehr auffällig, dass sie bei Behandlung mit Osmiumsäure, Sublimatlösung, Essigsäure u. s. w. eckig und runzlich werden, also schrumpfen (*Palaemon, Maja* und *Crangon*). Ferner färben sie sich bei Zusatz von Jodtinctur braun, z. B. bei *Maja*, und setzt man schliesslich zu einem Präparat concentrirte Schwefelsäure oder Essigsäure hinzu, so werden die Kugeln nach und nach matter glänzend, es bilden sich in ihnen vacuolenartige Gebilde von schwach violetter Farbe, während die Kugeln selbst allmählich gelbbraun werden. Die Vacuolen werden grösser und grösser, fliessen zusammen und schliesslich löst sich die ganze Kugel auf.

Im oberen Theil der Zelle, dort, wo schon die ersten der genannten Kugeln auftreten, liegt ein Ballen von kleinen Kügelchen oder Granulis, welche im frischen Zustande nur schwer zu erkennen sind und auch in manchen Zellen ganz fehlen. Deutlich sichtbar wird dagegen dieses Gebilde bei Zusatz von wässriger Sublimatlösung, ebenso ist es an den Schnitten deutlich zu erkennen, z. B. bei *Palaemon, Crangon* und *Maja*. Seine Grösse ist gering, der Durchmesser etwa $^1/_3$ der Zellbreite; bei Behandlung mit Sublimat wird es bräunlich, in den Schnitten zeigt es sich durch Carmin gefärbt. Welche Function oder Bedeutung dieser Ballen hat, lässt sich kaum vermuthen.

Unten an der Basis der Zelle findet sich nur Protoplasma, welches im Schnitt häufig wie ein Klumpen geballt und nach oben hin abgeschlossen erscheint. Es färbt sich auffällig stark mit Carmin. Dicht darüber liegt der Kern zum Theil von den Fettkugeln umgeben. Seine Form ist kugelig oder ellipsoïdisch, sein Durchmesser schwankt von 0.014 bis 0.0072 ^{mm}, meist ist er = 0.0099 wie bei *Palaemon*. Schon im frischen Zustand zeigt er ein deutliches Netzwerk, doch habe ich nie eine Theilungsfigur sehen können.

2. Die Fermentzellen.

Zwischen den oben besprochenen Zellen vertheilt liegt die zweite Zellart, die der Fermentzellen. — Ihre Anzahl ist eine äusserst variable und steht im directen Verhältniss zum Ernährungszustande des Individuums. Im Zupfpräparat nehmen sie meist Kugelgestalt an, so bei *Palaemon, Maja, Crangon* und *Carcinus,* während ihre Form bei *Squilla, Scyllarus* und *Dromia* erhalten bleibt. Im Schnitt zeigen sie eine Art Becherform: sie sind bauchig und spitzen sich zum Theil nach unten zu. Die völlig reifen Zellen sind isodiametrisch.

Ihre Grösse übertrifft etwas die der Fettzellen; zwar ist ihre Höhe nicht grösser oder sogar geringer, doch sind sie bedeutend breiter. Ihr Durchmesser ist 0.06^{mm} im Mittel, am grössten fand ich ihn bei *Carcinus* mit 0.111^{mm}, bei den Majen mit 0.07^{mm}, am geringsten bei *Palaemon* mit 0.035^{mm}.

Die Fermentzellen besitzen den gleichen Härchensaum wie die fetthaltigen Zellen; ferner zeigt sich gerade wie bei jenen im oberen Theil der Zelle eine Längsstreifung und zwar schön deutlich bei *Crangon, Scyllarus, Pagurus* und *Carcinus.* Etwas weiter nach unten treten dann im Protoplasma Kügelchen oder Bläschen auf, welche schwach lichtbrechend und oft gelblich gefärbt sind. Am besten sind sie im frischen Zustande zu sehen, während sie in den conservirten Präparaten verschwinden. Ihre Anzahl ist 15 bis 20, ihre Grösse gering, so dass sie nur eine schmale Zone der Zelle einnehmen.

Der grösste Theil der Zelle wird von dem eigentlichen Secretballen erfüllt, welcher fast Kugelgestalt hat. Im normalen Zustande stellt er meist eine körnige hell- oder dunkelbraune *(Dromia)* Masse dar; nur bei *Palaemon* war dieselbe grün und ebenso in einem Falle bei *Scyllarus.* — Sie ist von einer zarten Membran umhüllt; häufig enthält sie in ihrem Inneren Krystalle, und zwar feine Nadeln von strahliger Anordnung bei *Maja, Callianassa, Squilla* und namentlich bei *Carcinus.* Nach ihrem chemischen Verhalten sind es Tyrosinkrystalle. Bei *Dromia* dagegen zeigten sich oft sehr kleine, anscheinend braune, in Wasser unlösliche Würfel, deren Natur zweifelhaft ist.

Nur im normalen Zustande ist die Zelle bezw. die Blase mit dieser Masse erfüllt, denn beim Hungern schwindet dieselbe mehr und mehr und schliesslich kann sie ganz verschwinden, so dass die Blase völlig farblos aussieht.

Die braune Masse verhält sich chemisch-physikalisch wie folgt:

Bei Behandlung mit concentrirter, mit 10- und schliesslich mit 1 procentiger Salzsäure bleibt sie unverändert. — In einer ganz

dünnen Lösung dieser Säure ($^1/_{10}$ Procent) jedoch wird sie homogen und die Farbe verschwindet rasch, während die Zelle schnell gelöst wird. Setzt man zu einem Präparat ferner concentrirte Salpeter- oder Schwefelsäure hinzu, so wird der Blaseninhalt langsam entfärbt (in etwa 20 Stunden), ohne dass sich die Blase selbst jedoch löst. Dasselbe geschieht in $^3/_4$ procentiger Kochsalzlösung, während in 10 procentiger Lösung der braune Inhalt lange Zeit unverändert bleibt und nur die Zelle gelöst wird. In Alkalien, z. B. in Ammoniakwasser, quillt die Zelle und ihr Inhalt schnell und beides wird völlig gelöst. Zugleich bilden sich Krystalle von phosphorsaurer Ammoniakmagnesia. Von Wichtigkeit ist ferner, dass die braune Masse durch Überosmiumsäure kaum dunkler gefärbt wird, sowie dass der Farbstoff gegen Alcohol absol., Chloroform, Äther u. s. w. sehr widerstandsfähig ist, daher sich in den Schnitten die Blase und ihr Inhalt noch wohlerhalten vorfinden.

Unterhalb dieser Fermentblase liegt der meist elliptische Kern von einer nur geringen Menge Protoplasma umgeben.

Ausser diesen Zellen finden sich in jedem Tubus noch andere von besonderer Form und Beschaffenheit, welche man am besten in den Schnitten erkennt. Dies sind junge unreife Fermentzellen. Im jüngsten Stadium sind sie fast isodiametrisch und besitzen einen sehr grossen Kern und sich stark tingirendes Protoplasma. Der Kern zeigt ein deutliches Fadennetzwerk, niemals liess sich jedoch eine Theilungsfigur oder Ähnliches nachweisen. — Diese Zellchen, welche im Schnitt oft die Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks zeigen, wachsen nach oben, nach dem Lumen zu, spitz aus; dann schwellen sie oben mehr und mehr an, indem sich die Fermentblase bildet. Der ursprünglich breite Fuss wird dabei schmaler und der Kern wandert nach oben. Hierauf löst sich die Zelle von der Basalmembran los, die Fermentblase wächst mehr und mehr, und die Zelle rundet sich unten völlig ab. Dabei wird der Kern immer kleiner, er plattet sich etwas ab und verliert sein Netzwerk. Dies ist die oben beschriebene erwachsene Zelle, welche sich nun ganz loslöst und in das Lumen des Tubus gelangt. Der Kern ist jetzt nur noch als schmale Scheibe zu erkennen, das Protoplasma und die früher erwähnten kleinen Bläschen sind fast ganz verschwunden, so dass nur noch die Fermentblase übrig bleibt.

Wo der Ursprung dieser Zellen ist, ist noch nicht ganz sicher; wahrscheinlich gehen sie aus einem Keimepithel hervor, das sich am Ende eines jeden Tubus in Gestalt kleiner, kugeliger, grosskerniger Zellen vorfindet. Leider lassen sich jedoch auch an diesen Zellen keine Theilungsbilder nachweisen.

Wenn sich die Fermentzellen losgelöst haben, gelangen die Blasen mit ihrem Inhalt in den Magen und in den Darm. Befindet sich das Thier in normalen Verhältnissen, so wird nach und nach der Inhalt dieser Blasen ausgezogen und gelöst und im letzten Theil des Enddarms erscheinen die meisten derselben blass und collabirt. Im Koth sind auch sie kaum noch zu finden. Wenn jedoch die Ernährung oder Verdauung gestört ist, wie es in der Gefangenschaft häufig der Fall ist, so gehen die Fermentblasen fast unverändert durch den Darm hindurch und finden sich in reichlicher Menge im Koth.

Auch die anderen Zellen, die fetthaltigen, secerniren ihren Inhalt, doch gehen sie dabei nicht zu Grunde. Die Kügelchen färben sich im Lumen meist braun, dann lösen sich die meisten derselben und im Magen und Darm sind sie kaum noch nachweisbar. Dass auch sie die Träger eines Fermentes sind, ist sehr wahrscheinlich, jedoch noch nicht durch Experimente festgestellt. Als ein Leberproduct in dem gebräuchlichen Sinne kann man sie jedenfalls nicht auffassen, da ja das Haupteriterium fehlt, nämlich der Farbstoff, welcher in den meisten Fällen an die Fermentzellen gebunden ist. Ausserdem spricht bis jetzt nichts dafür, das Secret der Mitteldarmdrüse als ein gallenartiges zu bezeichnen, da sich in demselben weder Gallensäuren noch Gallenfarbstoffe nachweisen lassen.

43. Über die Beziehungen der Grosshirnrinde zu Kehlkopf und Rachen.

Von Dr. H. Krause
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Munk am 1. November: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLII]; — ausgegeben am 8. November.)

Zu den wenigen der Willkür unterstehenden Bewegungen des Körpers, welche durch elektrische Reizung der Grosshirnrinde noch nicht herbeigeführt worden sind, gehören die Bewegungen des Kehlkopfes und des Rachens. Bei der Regelmässigkeit, mit welcher nach unserer jetzigen Kenntniss die Körpertheile auf die Grosshirnrinde projicirt erscheinen, glaubte Hr. Prof. H. Munk das Rindengebiet für die Kehlkopfbewegungen in dem lateralen Theile der Nackenregion vermuthen zu dürfen, nachdem er von diesem Theile aus Bewegungen der vorderen Halsmusculatur, vom medialen Theile derselben Region aus Bewegungen der hinteren Halsmusculatur erlangt hatte. Ich habe die Vermuthung im physiologischen Laboratorium der hiesigen Thierarzneischule geprüft und richtig befunden.

Hat man an dem tief narkotisirten Hunde den *Gyrus praefrontalis* zwischen *Sulcus cruciatus* und Stirnlappen blossgelegt, so erhält man die gesuchten Bewegungen, wenn man den *Gyrus* an seiner steil nach unten abfallenden Fläche mit Inductionsströmen reizt. Die Inspection des Kehlkopfes kann ohne Weiteres bei Tageslicht erfolgen, wenn man die Zunge des Thieres kräftig hervorzieht und mit einer dünnen gekrümmten Sonde gleichzeitig das schlaff herunterhängende Gaumensegel hebt und den Kehldeckel an den Zungenrücken andrückt. Man beobachtet bei 11—7^{cm} Rollenabstand des du Bois'schen Schlitteninductoriums mit einem kleinen Daniell'schen Elemente ausser Contractionen der vorderen Halsmusculatur mit Hebung des Kehlkopfes: Schluckbewegungen, Hebung des Gaumensegels, Contractionen des oberen Rachenschnürers wie auch des hinteren Theiles des Zungenrückens und der *Arcus palatoglossi*, endlich partiellen oder totalen Verschluss der *Glottis* und des *Aditus laryngis*. Bei vorsichtigem Abtasten der bezeichneten Rindenfläche gelingt es, ausser der gewöhnlichen Phonationsstellung der Stimmbänder zuweilen auch die sogenannte Cadaverstellung zu sehen, bei welcher die Stimmbänder unter Spannung aller Kehlkopfmuskeln und Äquilibrirung der gesammten Muskelkräfte, welche an den Giesskannenknorpeln wirken, genau die Mitte zwischen Phonation und tiefster Inspiration einhalten.

Den Ergebnissen der Reizversuche entsprachen auch die Erfolge der Exstirpationsversuche, bei welchen die steil nach unten abfallende Rindenpartie des *Gyrus praefront.* zuerst linkerseits, nach einigen Wochen auch rechterseits entfernt worden war. In allen acht nach Ausweis der Section gelungenen Versuchen waren an den Hunden, welche vorher viel und in sonoren, kräftigen Brusttönen gebellt hatten, in den vier bis fünf Monaten, während welcher die Thiere nach der letzten Operation lebend erhalten wurden, wesentliche Veränderungen der Stimme zu constatiren. Einzelne Hunde bellten überhaupt nicht mehr. Andere, in dem offenbaren Bemühen zu bellen, öffneten und schlossen nur die Schnauze und brachten es höchstens hin und wieder zu einem leisen Winseln. Bei wieder anderen trat statt des Bellens ein kraftloses Quietschen oder ein heiseres Kreischen ein. Endlich zwei Hunde, welche anscheinend noch kräftig anschlugen, bellten unter äusserster Anstrengung und auffallender Luftverschwendung in kreischender Fistelstimme anstatt der früher mühelos geleisteten Brust-stimme. Im Gegensatze zu diesen Hunden hatten zwei andere, an welchen die Section die Exstirpationen als unzureichend ausgeführt erwies, ihre alte Stimme ohne wesentliche Änderung bewahrt: hier war die Exstirpationsstelle zu weit medialwärts gefallen oder die unterste Partie der grauen Rinde stehengeblieben. Offenbar hatten die glücklich operirten Hunde die Bewegungsvorstellungen für die zur Phonation erforderlichen Einstellungen der Stimmbänder verloren; geblieben war die reflectorische grobe Einstellung der Stimmbänder, wie sie schon das neugeborene Thier für seine quietschenden, kreischenden Laute besitzt.

Ich habe schliesslich noch nach einseitiger Exstirpation der bezeichneten Rindenpartie die secundären Degenerationen verfolgt. An den acht bis elf Wochen nach der Operation getödteten Hunden fanden sich im gleichseitigen Hirnschenkel Lücken, durch den Ausfall von Nervenfasern bedingt, und Degeneration des Axencylinders an ziemlich vielen Fasern. Ausserdem waren regelmässig der *Pedunculus corporis mammillaris* und das *Corpus mammillare* derselben Seite auffallend verkleinert. In letzterem bot sich besonders in der aufsteigenden Fornixwurzel, weniger im Vicq d'Azyr'schen Bündel, völliger Schwund oder Degeneration der Nervenfasern dar; die Fornixwurzel war um $^1/_3$—$^1/_2$ kleiner als normal. So dass das *Corpus mammillare* zu einem wesentlichen Theile als Durchgangsstation der von unserer Rindenpartie herkommenden Fasern sich zu erkennen gab.

44. Über die Differentialgleichung der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden können.

Von J. Weingarten.

(Vorgelegt von Hrn. Kronecker am 8. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLIII]: — ausgegeben am 15. November.)

Bei Untersuchungen auf sehr verschiedenartigen geometrischen Gebieten haben einzelne Gattungen von Flächen, deren Linienelement durch die Parameter u, v ihrer Krümmungslinien in die Form $\sqrt{f(u, v)}\,(du^2 + dv^2)$ gebracht werden kann, die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen. Die Flächen zweiten Grades, die Rotationsflächen, eine ausgezeichnete Gruppe von Orthogonalflächen, die Minimalflächen, die Flächen von constanter mittlerer Krümmung z. B. zeigen diese Besonderheit.

Schon vor geraumer Zeit deckte Christoffel eine merkwürdige geometrische Eigenschaft auf, welche allen Individuen der eben charakterisirten Flächenfamilie zukommt. (Crelle-Borchardt's Journal Bd. 67. Über einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen.) Mehrere Jahre später bemerkte Cayley, dass das Problem der Bestimmung dieser Flächenfamilie mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden zu sein scheine, welche bisher nicht geprüft seien. (Proceedings of the London Mathematical Society IV p. 8, 9.)

In Rücksicht auf diese Bemerkung Cayley's scheint die Mittheilung eines einfachen Criteriums, welches für eine Fläche von gegebener Gleichung über die Zugehörigkeit zu der in Rede stehenden Flächenfamilie durch blosse Differentiationen entscheiden lehrt, nicht ohne Interesse zu sein.

Dieses Criterium lässt sofort erkennen, dass die Bestimmung der Flächenfamilie von der Integration einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung abhängt, welche linear ist in Beziehung auf die Differentialquotienten dieser Ordnung; es präcisirt somit die Art der Schwierigkeit des Problems.

Es zeigt sich ferner, dass für jedes Individuum der betrachteten Flächenfamilie die Krümmungslinien durch Quadraturen allein zu bestimmen sind.

Bedeuten x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P einer krummen Fläche, X, Y, Z die Cosinus der Winkel, welche die in diesem Punkte nach der Seite der negativ gezählten Krümmungsradien errichtete Normale mit den Axen bildet, ferner r und r' die Hauptkrümmungen im Punkte P, und drückt allgemein dU den Unterschied der Werthe aus, welche eine Function U in dem Punkte P und in einem ihm unendlich nahe in der Fläche benachbarten Punkte P' annimmt, so lässt sich das erwähnte Criterium in folgender Form aussprechen:

> Damit das Linienelement einer krummen Fläche durch Einführung der Parameter u, v ihrer Krümmungslinien in die Form $\sqrt{f(u,v)}\,(du^2 + dv^2)$ transformirbar sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass der Differentialausdruck:
>
> $$\left\{\frac{\partial(r+r')}{\partial x}dX + \frac{\partial(r+r')}{\partial y}dY + \frac{\partial(r+r')}{\partial z}dZ - d(rr')\right\}(r-r')^{-2}$$
>
> das Totaldifferential einer Function des Orts in der Fläche sei.

Bezeichnet man nämlich den vorstehenden Differentialausdruck mit Ω, und, wie so eben, mit u, v die Parameter der Krümmungslinien, so ist das Quadrat des Linienelements der Fläche durch

$$\mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}dv^2$$

gegeben, und man erhält unter Zuhülfenahme der bekannten Beziehungen:

1. $$dX = r\frac{\partial x}{\partial u}du + r'\frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad dY = r\frac{\partial y}{\partial u}du + r'\frac{\partial y}{\partial v}dv,\quad dZ = r\frac{\partial z}{\partial u}du + r'\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{E}}{\partial v} = \frac{\frac{\partial r}{\partial v}}{r'-r},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{G}}{\partial u} = \frac{\frac{\partial r'}{\partial u}}{r-r'}$$

für den Werth des Differentialausdrucks Ω durch eine leichte Rechnung die Gleichung:

$$\Omega = \frac{1}{2}\left\{d\log(r-r')^2 + \frac{\partial \log \mathrm{G}}{\partial u}du + \frac{\partial \log \mathrm{E}}{\partial v}dv\right\}.$$

Gehört die betrachtete Fläche der in Rede stehenden Flächenfamilie an, d. h. ist $\mathrm{E} = \mathrm{G} = f(u,v) = \lambda$, so geht Ω in das Totaldifferential:

$$\frac{1}{2}d\log[\lambda(r-r')^2]$$

über. Soll umgekehrt für eine Fläche Ω das Totaldifferential einer Function der Variablen u, v sein, so ist das Bestehen der Bedingung

$$\frac{\partial^2 \log\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}\right)}{\partial u\,\partial v} = 0$$

nothwendig, welche offenbar ausdrückt, dass das Linienelement dieser Fläche durch Einführung geänderter Parameter der Krümmungslinien u', v' in die Form

$$\lambda(du'^2 + dv'^2)$$

gebracht werden kann.

Ist nunmehr die Gleichung einer Oberfläche

$$\phi(x, y, z) = c$$

gegeben, so sind die Grössen $r + r'$, rr', $(r - r')^2$ wohlbekannte Functionen der ersten und zweiten Derivirten der Function ϕ. Es ergiebt sich daher nach Ausführung der in Ω angedeuteten Differentiationen für Ω ein Werth:

$$\Omega = Udx + Vdy + Wdz,$$

in welchem die U, V, W aus den Differentialquotienten von ϕ bis zur dritten Ordnung inclusive zusammengesetzt sind. Die Bedingung für den Umstand, dass Ω für solche Differentiale dx, dy, dz, welche der Gleichung

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0$$

genügen, in ein Totaldifferential übergehe, ist bekanntlich die folgende:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0.$$

Der durch diese Bedingung gegebenen partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung müssen diejenigen Functionen ϕ genügen, durch deren constante Werthe eine Fläche der besprochenen Familie dargestellt wird. Sie ist daher die Differentialgleichung dieser Flächenfamilie.

Ist dagegen der Lauf einer Fläche derart bestimmt, dass die Coordinaten jedes Punktes derselben durch die Werthe zweier Variablen p, q gegeben sind, so transformirt sich Ω unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Differentialquotienten der Cosinus X, Y, Z linear durch die Differentialquotienten der entsprechenden Coordinaten ausdrückbar sind, sofort in die Form:

$$\Omega = Mdp + Ndq.$$

in welcher M, N Functionen der sechs durch GAUSS eingeführten Grössen E, F, G, D, D', D'' und ihrer ersten Differentialquotienten sind.

Die Bedingung, dass Ω ein Totaldifferential sei, ist nunmehr

$$\frac{\partial M}{\partial q} - \frac{\partial N}{\partial p} = 0$$

und, wenn sie sich als erfüllt erweist, ist der Coëfficient λ des, in

Parametern u, v der Krümmungslinien dargestellten, Quadrats des Linienelements der Fläche aus der Gleichung

$$2. \qquad \tfrac{1}{2} d \log [\lambda (r - r')^2] = M dp + N dq$$

zu ermitteln.

Was schliesslich die Auffindung der Krümmungslinien eines der Familie angehörigen Individuums betrifft, welche die Integration der Differentialgleichung

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & X & dX \\ dy & Y & dY \\ dz & Z & dZ \end{vmatrix} = 0$$

erfordert, so bemerkt man beim Hinblick auf die Gleichungen 1., dass sich die Determinante Δ durch Einführung der Parameter u, v in die Gestalt

$$\Delta = \lambda (r - r')\, du\, dv$$

setzen lässt. Nun ist Δ für das gegebene Individuum eine quadratische Form der Differentiale dp, dq, deren Coëfficienten $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ gegebene Functionen der Variablen p, q sind. Daher besteht die Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{E}}{\lambda (r - r')} dp^2 + 2 \frac{\mathfrak{F}}{\lambda (r - r')} dp\, dq + \frac{\mathfrak{G}}{\lambda (r - r')} dq^2 = du\, dv,$$

in welcher die Coëfficienten der quadratischen Form der linken Seite, nach geschehener Bestimmung von λ aus Gleichung 2. bekannte sind.

Sind $a\,dp + b\,dq$, $a^*dp + b^*dq$ zwei Factoren dieser Form, so zerfällt die vorstehende Gleichung in die zwei folgenden:

$$3. \qquad \begin{aligned} e^{\phi} (a\,dp + b\,dq) &= du \\ e^{-\phi} (a^*\,dp + b^*dq) &= dv, \end{aligned}$$

in welchen ϕ eine noch zu bestimmende Function der Variablen p, q bezeichnet. Die zwei Integrabilitätsbedingungen für das Bestehen dieser Gleichungen ergeben zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der Differentialquotienten $\frac{\partial \phi}{\partial p}, \frac{\partial \phi}{\partial q}$, und nach erfolgter Bestimmung derselben ergiebt sich ϕ durch Quadratur. Ist ϕ gefunden, so ergeben sich die Parameter u, v der Krümmungslinien des betrachteten Individuums durch neue Quadraturen aus den Gleichungen 3. selbst.

45. Die wahrscheinlichen Fehler der Constanten.

Von G. Hagen.

(Vorgetragen am 15. November; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLIV]; — ausgegeben am 22. November.)

Der wahrscheinliche Fehler eines aus mehreren Messungen berechneten constanten Coëfficienten eignet sich vorzugsweise zur Beantwortung der Frage, ob das Resultat einer Untersuchung als hinreichend begründet angesehen werden darf. Dieser Vorzug beruht darauf, dass man die Wahrscheinlichkeit kennt, mit der die Überschreitung jedes Vielfachen des wahrscheinlichen Fehlers zu besorgen ist. Hieraus lässt sich bestimmt entnehmen, wie klein der wahrscheinliche Fehler bleiben muss, damit das Resultat die in jedem Falle für nöthig erachtete Sicherheit bietet.

Absolute Sicherheit ist nie zu erreichen. Nach dem Gesetz über das Vorkommen der Fehler von verschiedener Grösse giebt es keine Grenze, die nicht überschritten werden könnte. Wenn man aber bei sorgfältiger Messung niemals sehr grosse Fehler bemerkt, so geschieht dieses nicht, weil solche unmöglich sind, sondern nur, weil ihre Wahrscheinlichkeit zu gering ist. Es verhält sich damit, wie mit anderen Erscheinungen, wie etwa mit derjenigen, dass beim Aufwerfen von hundert Münzen nie die Bildflächen von allen nach oben gekehrt sind. Die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist gleich Eins, dividirt durch eine Zahl, die mit 31 Ziffern geschrieben wird. Ein solcher Wurf ist unbedingt möglich, seine Wahrscheinlichkeit aber so gering, dass man nicht entfernt erwarten darf, ihn in Millionen Versuchen herbeizuführen.

In gleicher Weise ist man bei Messungen und Beobachtungen gegen grössere Fehler nie vollständig gesichert, und es bleibt daher nur übrig, in jedem Falle die passende Grenze der Wahrscheinlichkeit des Gelingens festzustellen. Gemeinhin werden in dieser Beziehung keine weitgehenden Anforderungen gemacht.

Wie man die wahrscheinlichen Fehler der aus einer Anzahl von Messungen berechneten Constanten findet, ist bekannt. Vielfach müssen aber bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate die gesuchten Constanten in anderer Form, wie etwa als Nenner eingeführt werden.

Man findet alsdann zwar den wahrscheinlichen Fehler von $\frac{1}{n}$, aus diesem ist aber noch derjenige von r herzuleiten. Andererseits ist nicht selten der wahrscheinliche Fehler einer Grösse zu bestimmen, die sich aus mehreren anderen zusammensetzt, deren wahrscheinliche Fehler man kennt. Im Folgenden sind diejenigen Fälle dieser Art behandelt, denen ich bei Ausführung von Wahrscheinlichkeits-Rechnungen begegnet bin.

Zur Prüfung der gefundenen Ausdrücke habe ich dieselben noch besonderen Proben unterworfen, die nichts anderes, als wirkliche Experimente waren, ähnlich den in der Physik üblichen, durch welche man sich überzeugt, dass die Resultate einer Untersuchung richtig sind. Beispielsweise ist der wahrscheinliche Fehler des Productes rs dadurch geprüft, dass für r wie für s Reihen fingirter Beobachtungen zusammengestellt wurden, aus denen sich sowohl die wahrscheinlichsten Werthe dieser Grössen, wie auch die wahrscheinlichen Fehler derselben ergaben. Die letzten drei Ziffern der sämmtlichen Zahlen, welche die einzelnen Messungen vorstellten, wurden dabei aber nach bestimmten Regeln aus der Anzahl der Augen beim Aufwerfen mehrerer Würfel hergeleitet. Die Abweichungen oder die Fehler blieben also, wie bei Beobachtungen, allein vom Zufall abhängig und den Gesetzen desselben unterworfen. Hierdurch wurde auch jede willkürliche Einwirkung auf die Fehler ausgeschlossen. Den aus diesen beiden Beobachtungsreihen berechneten wahrscheinlichen Fehler des Products verglich ich sodann mit demjenigen, den die Reihe der Producte selbst ergab, indem ich diese durch Multiplication der nebeneinander stehenden Werthe von r und s gefunden hatte. Diese Probe war jedesmal sehr sicher, sobald die Reihen aus einer grösseren Anzahl Beobachtungen (meist dreissig) bestanden. Dabei erwähne ich, dass ich durch diese Proben auf den sehr wesentlichen Unterschied des wahrscheinlichen Fehlers des Quadrates aufmerksam gemacht wurde, je nachdem die Breite und Höhe eines solchen wirklich gemessen, oder als übereinstimmend mit der anderen in Rechnung gestellt war.

Kam es aber darauf an, zwei Beobachtungsreihen zu bilden, die mit verschiedener Schärfe gemessen sein sollten, so wurden für eine derselben die durch Würfeln gegebenen Werthe verdoppelt oder in einem anderen Verhältniss vergrössert.

Zunächst suchte ich den wahrscheinlichen Fehler der Summe zweier Grössen r und s, die nicht mit gleicher Schärfe gemessen, für die also die wahrscheinlichen Fehler der Maasseinheit verschieden waren. Aus dem bekannten Satz, dass der wahrscheinliche Fehler der Summe von r gleichartigen Messungen gleich sei dem wahrschein-

lichen Fehler der einzelnen Messung multiplicirt mit der Quadratwurzel aus r, ergab sich jener gesuchte wahrscheinliche Fehler gleich

$$w(r+s) = \sqrt{w(r)^2 + w(s)^2}$$

indem der wahrscheinliche Fehler irgend einer Grösse R durch $w(R)$ bezeichnet wird. Der wahrscheinliche Fehler der Summe zweier Grössen r und s setzt sich also aus $w(r)$ und $w(s)$ zusammen. Bei ihrer Verbindung ist aber eine gewisse Ausgleichung der Fehler wahrscheinlich, und durch diese vermindert sich der gesuchte wahrscheinliche Fehler in demselben Verhältniss, wie die Summe der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks zur Länge der Hypotenuse. Kommt noch ein drittes Glied t hinzu, das wieder mit anderer Schärfe gemessen ist, so betrachte man die beiden ersten bereits verbundenen Glieder als erstes Glied. Man findet alsdann, dass zu jenen noch das Glied $w(t)^2$ unter das Wurzelzeichen tritt.

Hierauf wurde zu der besonders wichtigen Frage übergegangen, wie gross der wahrscheinliche Fehler eines Productes sei, und zwar zunächst unter der Voraussetzung, dass dasselbe nur aus zwei Factoren besteht. Ein solches Product rs ist die Fläche eines Rechtecks, dessen Breite und Höhe r und s sind. Man überzeugt sich leicht, dass der wahrscheinliche Fehler der Fläche sich aus den beiden Rechtecken $r \cdot w(s)$ und $s \cdot w(r)$ zusammensetzt, wenn von dem kleineren Rechteck $w(r) \cdot w(s)$ abgesehen wird, welches man zweimal oder gar nicht in Rechnung stellt. Bei Verbindung dieser beiden Glieder tritt wieder eine Ausgleichung der Fehler wie früher ein, falls wirklich beide Dimensionen r und s gemessen wurden. Man hat nämlich

$$w(rs) = \sqrt{r^2 \cdot w(s)^2 + s^2 \cdot w(r)^2}.$$

Dieser Ausdruck war bereits bekannt, er wird indessen ungültig, sobald einer der beiden Factoren nicht gemessen, sondern nur durch ein bestimmtes Verhältniss zum andern gegeben ist. Setzt man beispielsweise r gleich s, oder fragt allgemein, wie gross der wahrscheinliche Fehler eines Quadrats sei, so wird dabei nur eine Messung vorausgesetzt, und jene Ausgleichung der Fehler tritt nicht mehr ein. Man hat daher

$$w(rr) = 2r \cdot w(r).$$

Wenn dagegen die Seite r in beiden Richtungen wirklich gemessen und dabei auch vollkommen gleich befunden wurde, und sogar wenn die wahrscheinlichen Fehler in beiden Fällen mit einander übereinstimmten, so hat man

$$w(rr) = \sqrt{2} \cdot r \cdot w(r).$$

Diese Verschiedenheit der Resultate, welche durch die Proberechnungen vollständig bestätigt wurde, erklärt sich dadurch, dass im letzten Fall zwei Messungen vorlagen, bei deren Verbindung der wahrscheinliche Fehler im Verhältniss von $\sqrt{2} : 1$ oder von $2 : \sqrt{2}$ sich verringerte.

Kommt zu jenen beiden Factoren r und s ein dritter t hinzu, der gleichfalls gemessen ist, so darf man nur in dem obigen Ausdruck das Product rs als ersten Factor ansehen, und findet alsdann

$$w(rst) = \sqrt{r^2s^2 \cdot w(t)^2 + r^2t^2 \cdot w(s)^2 + s^2t^2 \cdot w(r)^2}.$$

Der wahrscheinliche Fehler des Cubus ist dagegen

$$w(rrr) = 3r^2 w(r).$$

Wenn aber die drei Dimensionen desselben besonders gemessen wurden,

$$w(rrr) = \sqrt{3} \cdot r^2 \cdot w(r).$$

Ferner wurde der wahrscheinliche Fehler einer Grösse r gesucht, wenn derjenige von $\frac{1}{r}$ bekannt ist. Derselbe ergiebt sich sehr einfach aus dem Fehler eines Products. Man hat nämlich:

$$w(r) = r^2 \cdot w\left(\frac{1}{r}\right).$$

Endlich ist man bei Benutzung der Methode der kleinsten Quadrate zuweilen gezwungen, zu den Logarithmen überzugehen, und es entsteht alsdann die Frage, wie gross der wahrscheinliche Fehler von r ist, wenn man denjenigen von $\log r$ kennt. Es ist mir nicht gelungen, für denselben einen einfachen Ausdruck zu finden, man stellt aber leicht einen Näherungswerth dafür dar, wenn man die beiden Zahlen aufschlägt, die zu

$$\log r + w(\log r)$$
$$\text{und zu } \log r - w(\log r)$$

gehören, und ihre Differenz halbirt. Dieses Resultat dürfte wohl in allen Fällen genügen. Es ist um so schärfer, je weniger die Differenzen zwischen r und diesen beiden Zahlen von einander verschieden sind.

46. Über den Cuprodescloizit, ein neues Vanadinerz aus Mexico.

Von C. Rammelsberg.

(Vorgetragen am 29. November: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLVIII]: — ausgegeben am 6. December.)

In der Sitzung der Akademie am 22. Juli 1880 berichtete ich über die Vanadinerze der Gegend von Cordoba in Argentinien, woselbst neben dem Vanadinit der bis dahin so seltene Descloizit vorkommt, dessen Form zwar von des Cloizeaux bestimmt war, von dessen Zusammensetzung jedoch die Analyse Damour's ein ganz unrichtiges Bild geliefert hatte. Ich zeigte, dass dieses Mineral ein wasserhaltiges Viertelvanadat von Blei und Zink ist, und erklärte hierdurch die Isomorphie des Descloizit mit den analog zusammengesetzten Phosphaten und Arseniaten des Kupfers, dem Libethenit und Olivenit.

Mexico, dasjenige Land, welches das erste Vanadinerz, den von Wöhler als solchen erkannten Vanadinit von Zimapan geliefert hat, ist zugleich der Fundort eines dem Descloizit sehr nahe stehenden Erzes, dessen Mittheilung ich Hrn. Dr. Schuchardt verdanke. Es stammt von S. Luis Potosi und wurde für Vanadinit gehalten.

Es bildet schwärzliche, an der Oberfläche undeutlich krystallinische, nierförmige, flachgewölbte, im Innern stänglige Massen, welche ein braunes Pulver geben und ist von Kalkspath begleitet. Sein V.G. ist 5.856. Es schmilzt leicht und löst sich in Salpetersäure mit grüner Farbe auf. Die Untersuchung zeigte, dass es ein chlorfreies Vanadat von Blei, Zink und Kupfer ist und beim Schmelzen Wasser verliert. Kleine Mengen Phosphor- und Arsensäure sind ausserdem vorhanden.

Bei der Analyse wurde das Blei als Sulfat bestimmt, das Kupfer (und Arsen) durch Schwefelwasserstoff gefällt und die Vanadinsäure mit kohlensaurem Natron geschmolzen. Beim Ausziehen mit Wasser blieb Zinkcarbonat zurück. Der geringe Phosphorgehalt ergab sich nach Abscheidung des Vanadins als $AmVO^3$ durch zugefügte Magnesiamischung.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin [illegible] «Sitzungsberichte» heraus. [illegible]

[illegible]

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. [illegible]

[illegible]

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann) in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 ℳ

[illegible]

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs [illegible]

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung [illegible]

QA
Q3
M38

MATHEMATISCHE

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES
MAY 7 1931
CSD

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT VIII.

OCTOBER 1883.

MIT TAFEL VI.

BERLIN 1883.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ UND GOSSMANN

40. Über die Bestimmung der magnetischen Horizontalintensität mit Anwendung der Wage.

Von A. Toepler
in Dresden.

(Vorgelegt von Hrn. G. Kirchhoff am 18. October; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 25. October.)

Man hat neuerdings Magnetstäbe, welche nach Art der Wage auf Schneiden schwingen, als Variations-Instrumente für die Verticalcomponente des Erdmagnetismus in Anwendung gebracht. Nach dem Princip der Wage gebaute Apparate für die absolute Bestimmung der Intensität, insbesondere der horizontalen, sind mir nicht bekannt. Man scheint um horizontale Axen drehbare Vorrichtungen für nicht recht geeignet zu halten, falls es sich um genaue Absolutbestimmungen handelt,[1] obwohl die Drehmomente, welche unter mittleren Breiten an starken Magneten von den beiden Componenten des Erdmagnetismus bewirkt werden, gross genug sind, um den Versuch einer Ermittelung durch Wägung zu rechtfertigen. Vielleicht fehlt es nur an geeigneten Methoden. Nachdem F. Kohlrausch in einer verdienstvollen Arbeit[2] auf die Schwierigkeiten und Ungenauigkeiten der Schwingungsbeobachtungen hingewiesen hat, nachdem H. v. Helmholtz durch sein sinnreiches Verfahren Stabmomente zu wägen[3] gezeigt hat, dass noch kleinere magnetische Kräfte als die in Rede stehenden der Bestimmung mittelst der Wage zugänglich sind, halte ich die Mittheilung der nachfolgenden Wägungsbeobachtungen nicht für überflüssig. Die dabei eingeschlagene Methode schien mir wegen ihrer Einfachheit und Bequemlichkeit der experimentellen Prüfung werth zu sein. Die Resultate stimmen, wenngleich ich dieselben mit Rücksicht auf die Unvollkommenheit der angewandten Hülfsmittel nur als vorläufige bezeichnen kann, sehr gut überein.

Die Tragsäule einer gewöhnlichen Wage sei sammt dem Glasgehäuse auf einem lothrechten Zapfen befestigt, mit welchem sie ohn[redacted]

[1] Vergl. Maxwell, El. and Magn. II. S. 111 und 112.

[2] F. Kohlrausch. »Absolute Messungen mittelst bifilarer Aufhängung, insbesondere zwei Methoden zur Bestimmung der erdmagnetischen Horizontalintensität ohne Zeitmessung«; Wiedemann's Ann. 1882, XVII. S. 737.

[3] Sitzungsberichte vom 5. April 1883. S. 405.

Erschütterungen um die Verticale gedreht werden könne. Für die genau senkrechte Einstellung der Drehaxe seien geeignete Vorrichtungen vorhanden. Die Drehungen seien an einem Theilkreise ablesbar.[1] Die Platten, auf welche sich die Mittelschneide stützt, seien vermittelst einer feinen Libelle genau in die Horizontalebene eingestellt. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass die beiden sogenannten Endschneiden mit der Mittelschneide in eine Ebene fallen. Dementsprechend mögen in dem theoretischen Schema der Wage die Bestandtheile Balken, Mittelschneide und Zeiger, als drei zu einander senkrechte starre Linien gedacht sein, auf welche sich die weitere Betrachtung bezieht. In der Mitte des Balkens sei ein Magnet befestigt. Die Projection seiner Axe auf die Schwingungsebene, d. h. diejenige Ebene, welche Balken und Zeiger enthält, bilde mit der Zeigerrichtung den Winkel α. Die Componente des magnetischen Momentes nach der Richtung der bezeichneten Projection sei M'. Sei ferner die Schwingungsebene in die Ebene des magnetischen Meridians eingestellt und endlich sei das System durch Belastungen Q_0 und Q_1 der Endschneiden so in's Gleichgewicht gebracht, dass der Balken nahe horizontal und zwar unter dem kleinen Neigungswinkel γ einspielt. Dann gilt eine Gleichung von der Form:

$$1.\quad Q_0 l_0 \cos\gamma + Ba\sin(\beta+\gamma) + VM'\sin(\alpha+\gamma) + HM'\cos(\alpha+\gamma) - Q_1 l\cos\gamma = 0.$$

Hierin bedeuten V und H die beiden Componenten des Erdmagnetismus, B das Gewicht des Balkens einschliesslich des Magnetes, a den Abstand des Schwerpunktes der fest verbundenen Bestandtheile von der Mittelschneide, β den Winkel dieses Abstandes mit der Zeigerrichtung, l_0 und l endlich die Abstände der Endschneiden von der Mittelschneide. Die Grössen Q_0, Q_1 und B sind selbstverständlich auf absolutes Maass bezogene Schwerkräfte.

Wird die Wage nun um 180° auf ihrem Zapfen gedreht, so ändert sich mit Bezug auf das System nur das Vorzeichen des Drehmomentes von H. Auf der einen Seite der Wage bleibe die Belastung Q_0 ungeändert; durch ein entsprechendes Gewicht Q_2 kann der Wagebalken unter demselben Neigungswinkel γ abermals zum Einspielen gebracht werden. Sei dies geschehen, so ist:

$$2.\quad Q_0 l_0 \cos\gamma + Ba\sin(\beta+\gamma) + VM'\sin(\alpha+\gamma) - HM'\cos(\alpha+\gamma) - Q_2 l\cos\gamma = 0.$$

Dass dieselbe Neigung des Balkens stattfindet, ist daran zu erkennen, dass der Zeiger der Wage vorher und nachher auf denselben Punkt

[1] Unter welchen Umständen der Theilkreis durch wenige Einstellungsmarken ersetzt werden kann, geht aus der weiteren Beschreibung hervor.

der Scala weist, da diese an der Drehung theilnimmt. Aus der Differenz der beiden Gleichungen verschwinden die Glieder mit Q_0, B und V, falls V und M' denselben Werth behalten. Nun ist M' im Allgemeinen verschieden wegen des inducirenden Einflusses der Erde. Dieser an sich geringe Einfluss kann jedoch als völlig gleich gelten, wenn die Magnetaxe in beiden Fällen nahe senkrecht auf der Richtung von H steht, d. h. wenn α und γ nicht gross sind. Unter letzterer Voraussetzung wird das V enthaltende Glied klein. Man kann also auch von dem Einflusse der Variationen von V selbst unter ungünstigen Umständen absehen.

Ich will zunächst den speciellen Fall im Auge behalten, dass die Magnetaxe in die Schwingungsebene fällt, dass also der Magnet beim Spielen der Wage ungefähr lothrecht steht. Dann ist M' das magnetische Moment M selbst. Die beiden Operationen, welche ich zusammen eine Doppelwägung nennen will, ergeben

$$HM(\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma) = \tfrac{1}{2}(Q_1 - Q_2)\,l.$$

Je kleiner α ist, desto mehr verschwindet der Einfluss von γ. Beträgt α weniger als zehn Minuten, so wird mit grosser Annäherung HM durch $\frac{1}{2}(Q_1 - Q_2)\cdot l$ gemessen, selbst wenn γ mehrere Winkelgrade beträgt.[1]

In dem obigen theoretischen Schema bedeutet der Zeiger ein Loth auf die Ebene der drei Schneiden. Dass derjenige Zeiger, welcher in Wirklichkeit die Einstellungen und Ausschläge markirt, mit diesem Loth nicht nothwendig zusammenfallen muss, braucht wohl kaum erwähnt zu werden. Die Wägungsoperationen können auch in der bekannten Weise mit schwingender Wage und Umkehrpunkten ausgeführt werden, wenn nur die aus den Umkehrpunkten abgeleiteten Einstellungen jedesmal auf denselben sonst willkürlichen Punkt der Scala bezogen werden. Bei den unten mitgetheilten Beobachtungen bestand der Zeiger aus einer am unteren Magnetende befestigten, sehr feinen Messingnadel, deren Bewegung vor einer kleinen Scala mit dem Fernrohr beobachtet wurde. Will man sich der Spiegelbeobachtung mit Fernrohr und Scala bedienen, so müssen letztere an der Umdrehung theilnehmen. Es ist nicht schwierig, eine dementsprechende Vorrichtung in kleinen Dimensionen an dem Gehäuse anzubringen,

[1] Von der Änderung von H in dem Zeitraume einer Doppelwägung ist abgesehen; diese Vernachlässigung scheint mir in den meisten praktischen Fällen erlaubt zu sein. Unter welchen Voraussetzungen und in welcher Weise gleichzeitig stattfindende Variationsbeobachtungen zu berücksichtigen sind, kann auf Grund der obigen Betrachtungen leicht angegeben werden.

ähnlich wie ich es an anderen Instrumenten mit Erfolg bereits versucht habe.

Wenngleich die Verticalcomponente V aus dem Resultat der Doppelwägung verschwindet, so übt sie doch einen Einfluss aus und zwar auf die Empfindlichkeit. Da diese nur bei der Bestimmung der kleinsten Bruchtheile der Gewichte in Frage kommt, so genügt eine Näherungsformel. Man findet aus 1. oder 2. leicht, dass eine kleine Gewichtszulage Δ an der spielenden Wage eine Drehung δ hervorruft, welche durch

$$3. \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{l \cdot \Delta}{B \cdot a \cdot \cos\beta + VM}$$

bestimmt ist. Wird die Wage in bekannter Weise auf grosse Empfindlichkeit eingestellt, so rückt der Schwerpunkt der fest verbundenen Massen über die Mittelschneide, ohne dass das System aufhört stabil zu sein. Den Einfluss des V enthaltenden Gliedes beobachtet man leicht, indem eine erhebliche Schwächung des Magnetes sofort eine Erhöhung der Empfindlichkeit zur Folge hat. Da bei den Beobachtungen immer nur kleine Belastungen vorkommen, so kann der Balken sehr dünn sein, so dass die Masse des beweglichen Systems sich hauptsächlich auf den Magnet beschränkt. Namentlich ist zu beachten, dass die Schalen sehr leicht sein können. Der letztere Umstand kommt wenn auch nicht der oben definirten Empfindlichkeit, so doch der Beweglichkeit der Wage zu Gute. Die Adhäsion und Reibung an den Endschneiden wird klein, das Instrument giebt selbst bei nicht ganz vollkommener Beschaffenheit dieser Schneiden kleine Veränderungen der Drehmomente sicherer an. Die Schalen der zu den unten mitgetheilten Beobachtungen benutzen Wage bestanden aus leichten Metallscheibchen, welche mittelst sehr zarter, federnder Kupferblechbügel direct an die Endschneiden angehängt waren. Die Masse einer Schale sammt Bügel betrug nur 0.41^{gr}. Die Endschneiden waren Ringschneiden aus Messing, welche ich übrigens durchaus nicht als zweckmässig empfehlen will. Theoretisch würde dem Bedürfniss durch eine einarmige Wage genügt werden. Aus nahe liegenden Gründen habe ich die symmetrische Gestalt des Balkens beibehalten.

Von der nahe richtigen Einstellung des Magnetes überzeugte ich mich auf folgende Weise. Der Magnet bestand aus zwei gleichgrossen Lamellen von zusammen 332^{gr} Gewicht. Dieselben waren mitten durchbohrt und parallel zu einander diesseits und jenseits des Messingbalkens so an diesem befestigt, dass die Drehkante der Mittelschneide thunlichst genau durch die Mitten der Lamellen ging. Die Lamellen waren nach der bekannten, von Lamont häufig benutzten Form an den

Enden dachförmig zugespitzt. Ihre Länge betrug etwa 250 mm und war nahe gleich der Entfernung der Endschneiden von einander. Die von dem Balken und den Lamellen gebildete kreuzförmige Anordnung wurde mit passender Unterlage auf die drehbare Platte des Theilkreises gelegt und die Mittelschneide mit der Drehaxe parallel gerichtet. Diese Einstellung geschah mit Benutzung der Spiegelbilder auf den beiden polirten Schneidenflächen ähnlich wie beim Reflexionsgoniometer. Zugleich wurde die Kante in die Drehaxe selbst gerückt. Nun wurde ein Fernrohr mit Fadenkreuz so eingestellt, dass bei der Drehung am Theilkreise nacheinander die Bilder der Endschneiden und der Lamellenenden durchs Gesichtsfeld liefen. Passiren die Enden ein und derselben Lamelle das Sehfeld in gleicher Höhe, so steht die Lamelle senkrecht zur Schneide, sind die Drehwinkel, gemessen zwischen je einem Lamellenende und den beiden Endschneiden gleich gross, so steht die Lamellenaxe senkrecht auf der Ebene der Endschneiden. Es ergab sich, dass keine für die Zwecke meiner Beobachtungen in Betracht kommenden Abweichungen vorhanden waren. Zugleich ergab sich, dass der Winkelabstand der Endschneiden nahe 180° betrug. Die Lamellen waren in der Axe einer Spirale magnetisirt worden. Da das beschriebene Verfahren das Zusammenfallen der magnetischen mit der geometrischen Axe voraussetzt, so muss es bei strenger Anforderung durch ein besseres ersetzt werden. Ich habe andere Prüfungsmittel bisher nicht untersucht, will aber bemerken, dass mir eine einfache und den Anforderungen entsprechende Probe in der bifilaren Aufhängung geboten zu sein scheint. Der Balken darf an einer empfindlichen Bifilarsuspension in keiner Stellung zum Meridian ein horizontales Drehmoment zeigen, falls er so aufgehängt ist, dass die Ebene der Schneiden horizontal liegt. Von dem letzteren Umstande könnte man sich durch Libellen versichern, welche vorher in geeigneter Weise an der Wage regulirt sind.[1]

Die Länge des Hebelarmes l, an welchem die Bestimmung von $Q_1 - Q_2$ vorgenommen wurde, ergab sich aus der Entfernung der Endschneiden und dem durch vertauschte Wägung in bekannter Weise ermittelten Verhältniss $l_0 : l$.

[1] Die Wage selbst giebt übrigens ein indirectes Hülfsmittel an die Hand, um die Stellung des Magnetes in der Hauptsache zu controliren. Man bestimme HM zunächst, indem der Arm l um einen beliebigen aber bei beiden Wägungen übereinstimmenden kleinen Winkel γ nach aufwärts einsteht; dann wiederhole man die Doppelwägung, indem derselbe Arm ein Wenig nach abwärts neigt. Die beiden Doppelwägungen unterscheiden sich durch Grösse und Vorzeichen von γ; ergeben beide dasselbe Resultat, so ist die Einflusslosigkeit von γ d. h. die genügende Kleinheit von α bewiesen. Selbstverständlich würde die Ausführung eine vorzügliche Schneide voraussetzen.

Über die Operation des Wägens ist noch das Folgende zu bemerken. Selbstverständlich darf die Wage nicht, während sie schwingt, gedreht werden. Das Abheben und Wiederaufsetzen des Balkens mittelst der Arretirungsvorrichtung halte ich für unsicher, falls es sich um sehr feine Differenzwägungen handelt, da bei dieser Manipulation aus leicht ersichtlichen Gründen häufig kleine Ruhelagenverschiebungen vorkommen. Ich verfuhr daher folgendermassen. Nachdem die erste Wägung vollendet war, legte ich auf die Schale eine Zulage von 2^{gr}, so dass sich das betreffende Balkenende auf einen mit der Tragsäule verbundenen festen Anschlag mit Korkpolster auflegte. In diesem Zustande wurde die Drehung um 180° bewerkstelligt. Nach Entfernung der obigen Zulage fand dann die zweite Wägung statt. Aus denselben Gründen wurde das Auflegen und Abheben der kleinen Gewichtsstücke wenn nöthig bei frei schwingender Wage vorgenommen, was bei der elastischen Beschaffenheit der Schalenaufhängung ganz unbedenklich war. Das Gehäuse war zu diesem Zwecke mit kleinen verschliessbaren Öffnungen versehen.

Endlich ist zu erwähnen, dass eine Wage, welche den angegebenen Constructionsbedingungen entspricht, keines anderweitigen Hülfsmittels zur Orientirung bedarf. Um die Schwingungsebene in den Meridian zu stellen, dreht man entweder die Wage versuchsweise auf dem Theilkreise, bis die das Gleichgewicht herstellende Belastung einer Schale ein Maximum oder Minimum wird, oder — zweckmässiger — man bringt die Wage in irgend einer Stellung durch Gewichte zum Einspielen und dreht sie dann unter Anwendung der besprochenen Vorsichtsmassregel so lange, bis sie bei *demselben* Gewichte wieder einspielt. Die Halbirung des Drehwinkels ergiebt die Meridianstellung mit erheblicher Genauigkeit.

In dem Folgenden will ich einige Zahlenergebnisse aus meinen Beobachtungen mittheilen, um die Sicherheit und Genauigkeit der Wägungsoperationen darzuthun. Die oben beschriebene Wage hatte ich anfänglich zu Vorlesungszwecken bauen lassen: die Mittelschneide[1] ruhte auf Stahllagern. Da ich bemerkte, dass das Instrument trotz seiner rohen Beschaffenheit bis auf etwa $^1/_{1000}$ übereinstimmende Wägungen ergab, so liess ich die Mittelschneide sorgfältig bearbeiten und versah sie mit genau justirten, ebenen Unterstützungsplatten aus Achat. Die Endschneiden blieben unverändert, jedoch vertauschte ich die constant belastete Schale (Q_0) durch einen etwas schwereren Messingbügel, dessen nach innen zugeschärfte Biegung auf der betreffenden Endschneide auflag.

[1] Dieselbe bestand aus glashartem Stahl; selbstverständlich ist die Anwendung eines unmagnetischen Materials vorzuziehen.

In den folgenden Tabellen ist die »nördliche« resp. »südliche« Richtung des Armes l, an welchem die zu belastende Schale hing, durch n resp. s gekennzeichnet. Das Nordende des Magnetes zeigte abwärts, so dass $Q_1 > Q_2$ war.

Die Empfindlichkeit wurde vermittelst einer am oberen Magnetende befindlichen Schraube so regulirt, dass bequem mit schwingender Wage gearbeitet werden konnte. Bei den unten mitgetheilten Beobachtungen entsprach einer Zulage von 1^{mg} eine mittlere Verschiebung des Einstellungspunktes von 3.63 Scalentheilen. Die Mitte der Scala entsprach der Lesung 12.5. Bei jeder Wägung wurde die Schale soweit mit ganzen Milligrammstücken belastet, dass der Zeiger hinreichend nahe der Mitte oscillirte. Die Decimalen ergaben sich für die Bestimmung von $Q_1 - Q_2$ aus der auf mg reducirten Differenz der beiden Einstellungen des Zeigers. In den Tabellen ist diese Differenz zu der Differenz der Schalenbelastungen zu addiren, da die Scala von links nach rechts getheilt war und der Beobachter den Arm l zur Rechten hatte

Die eben besprochene Art, kleine Bruchtheile des Milligramms durch grossen Zeigerausschlag zu messen, will ich jedoch keineswegs als zweckmässig bezeichnen. Die Discussion der Gleichung 3. ergiebt, dass der durch 1^{mg} bewirkte Ausschlag um so mehr von den Variationen der im Nenner vorkommenden Grössen, also auch von der Temperatur beeinflusst wird, je grösser dieser Ausschlag ist. Der oben angegebene Mittelwerth gilt bei den nachstehenden Beobachtungen auch nur innerhalb der engen Grenzen, in denen sich die Beobachtungstemperaturen bewegten. Viel zweckmässiger ist es ohne Zweifel, die Empfindlichkeit der Wage herabzustimmen, dafür aber die Winkelablesung durch optische Hülfsmittel zu verfeinern, welche meinem Instrument fehlten.

Wenn ich nun rasch nach einander eine grössere Anzahl von Wägungen jedesmal bei umgekehrter Stellung des Balkens vornahm, so bemerkte ich meistens eine allmälige Zu- oder Abnahme von $Q_1 - Q_2$. Es ist nöthig zu entscheiden, ob diese Veränderungen dem zu messenden Drehmomente HM oder etwaigen Veränderungen in dem Zustande der Wage zuzuschreiben sind. In der Hauptsache liefert die Methode selbst ein bequemes Hülfsmittel der Controle, welches ich an den Beobachtungen in Tabelle I erläutern will. Diese Beobachtungen fanden unter ungünstigen Verhältnissen nämlich Vormittags bei rasch zunehmender Temperatur statt, indem das nach Süden gelegene Beobachtungslocal zum Theil den directen Sonnenstrahlen ausgesetzt war.

I.

Richtung von l	1 Belastung der Schale mg	2 Einstellung des Zeigers Sc.Th.	3 Differenzen der Einstellungen Sc.Th.	4 Differenzen der Einstellungen mg	5 Reducirte Werthe mg	6 Mittel der Einstellungen
n	342	14.66				
			2.71	0.75	0.75	13.31
s	164	11.95				
			2.70	0.74	0.76	13.30
n	342	14.65				
			2.61	0.72	0.75	13.35
s	164	12.04				
			2.44	0.67	0.72	13.26
n	342	14.48				
			2.30	0.63	0.70	13.33
s	164	12.18				
			2.32	0.64	0.73	13.34
n	342	14.50				
			2.16	0.60	0.70	13.42
s	164	12.34				
			2.26	0.62	0.74	13.47
n	342	14.60				
			2.27	0.63	0.77	13.46
s	164	12.33				
			2.19	0.60	0.75	13.42
n	342	14.52				
			2.18	0.60	0.77	13.43
s	164	12.34				
			2.03	0.56	0.75	13.36
n	342	14.37				
Mittel					0.74	13.37

Die Einstellungen in Columne 2 sind aus je fünf Umkehrpunkten erhalten. Aus den Beobachtungen in 1 und 2 folgen zwölf Werthe der Differenz $Q_1 - Q_2$, welche man in mg erhält, indem man zu $342 - 164 = 178$ die betreffenden Decimalen aus 4 addirt. $Q_1 - Q_2$ nimmt also langsam von 178.75^{mg} bis 178.56^{mg} ab. Je zwei benachbarte Werthe stimmen jedoch sehr nahe überein. Nimmt man von irgend zwei benachbarten Zahlen der Columne 2 nicht die Differenz, sondern das arithmetische Mittel, so erhält man denjenigen Punkt der Scala, bei welchem die Wage durch die Belastung $\frac{1}{2}(342 + 164)^{mg}$ einspielen würde, falls sie bei der betreffenden Beobachtung von dem Einflusse der Horizontalintensität befreit wäre.[1] Nun sind in Columne 6

[1] Bezeichnet man mit G_1 resp. G_2 die Belastungen, welche bei nördlicher resp. südlicher Stellung der Schale vom Gewichte S auf diese aufgelegt wurden, mit q_1 resp. q_2 die zugehörigen Einstellungen des Zeigers, die Scalentheile jedoch in mg umgerechnet, so ergeben sich diejenigen Gesammtbelastungen der Endschneide, welche vor und nach der Umdrehung den Zeiger auf den mittleren Theilstrich bringen würden, wie folgt:

$$Q_1 = G_1 + \frac{q_1 - q_2}{2} + S$$

$$Q_2 = G_2 - \frac{q_1 - q_2}{2} + S.$$

Hieraus folgt $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) = \frac{1}{2}(G_1 + G_2) + S$. Innerhalb je zweier benachbarter Ein-

die successiven Mittelwerthe der Einstellungen zusammengestellt. Sie sind als constant zu betrachten, da eine Einheit der letzten Decimale $^1/_{363}{}^{mg}$ bedeutet und somit die grösste Abweichung vom Mittel ($^1/_{36}{}^{mg}$) auf Lesungsfehlern beruhen kann. Die von der Horizontalkraft befreite Wage hat also während der Versuchsdauer keine merkliche Störung der Gleichgewichtslage erfahren. Eine solche Störung bemerkt man an den Mittelzahlen sofort, z. B. wenn der Balken abgehoben und wieder aufgesetzt worden ist (s. unten). Die Constanz der mittleren Einstellung sagt selbstverständlich über den Temperatureinfluss auf das messende Drehmoment $\frac{1}{2}(Q_1 - Q_2) \cdot l$ Nichts aus. Dieser Einfluss ist im Allgemeinen zu berücksichtigen, kommt aber bei einer beschränkten Anzahl rasch wiederholter Wägungen nicht in Betracht. Die Temperatur stieg während der reichlich dreiviertelstündigen Zeitdauer der obigen Versuchsreihe um etwa $2^1/_2°$. Die daraus berechnete Verlängerung von l würde nur einen Unterschied von 0.008^{mg} des ersten und letzten Wägungsresultats erklären. Die beobachtete Veränderung scheint mir übrigens im vorliegenden Falle schon aus dem Temperatureinflusse auf das magnetische Moment M hinreichend erklärlich zu sein.[1] Ein Umstand kann allerdings noch in Frage kommen. Ich bin nicht ganz sicher, ob nicht der Balken bei dem zwölfmaligen Stellungswechsel gegen seine Unterstützung und somit auch gegen den Meridian eine kleine Verdrehung erfahren hatte, welche aus der mittleren Einstellung selbstverständlich nicht erkannt werden konnte. Der Einfluss einer solchen Verdrehung würde jedenfalls klein sein, da dieselbe mit dem cos in das Resultat eingeht. Bei den späteren Beobachtungen habe ich mich von ihrer Abwesenheit durch Marken an der Arretirungsvorrichtung, welche den Balken vor und nach sämmtlichen Wägungen abhob, überzeugt. Fehler der bezeichneten Art würden übrigens bei der Benutzung einer geeigneten Spiegelablesung sofort mit Schärfe erkannt werden.

Wenn man voraussetzt, dass die beobachtete Veränderung eine gleichförmige gewesen sei, und danach die Zahlen in Columne 4 durch Addition von $(n-1) \cdot 0.017^{mg}$ zum $n$ten Gliede auf den Anfangszustand reducirt, so erhält man die sehr gut übereinstimmenden Zahlen der Columne 5. Zuweilen ergaben sich Beobachtungen, bei welchen

---

stellungen kann man von der Änderung von HM absehen. Daher fällt, wenn man nach Analogie der früheren Formeln 1 und 2 die Gleichgewichtsgleichungen für die beiden Stellungen der Wage aufstellt und addirt, das Glied mit HM heraus. Die halbe Summe der Gleichungen enthält $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)$ und drückt den oben bezeichneten Gleichgewichtsfall aus.

[1] Ein Intensitätsvariometer war nicht aufgestellt.

durch längere Zeit Veränderungen des magnetischen Drehmomentes nicht bemerklich waren. So erhielt ich z. B. an einem anderen Tage rasch nach einander die Wägungen:

179.15 mg	179.12 mg
179.12	179.13
179.12	179.09
179.10	179.10
179.11	—

Hier sowohl als auch in Columne 5 der Tabelle I beträgt die grösste Abweichung vom Mittel noch nicht $^1/_{4000}$ der zu wägenden Grösse. Man kann danach ungefähr die Sicherheit einer einzelnen Doppelwägung bemessen, freilich unter Voraussetzung sehr vorsichtiger Behandlung der Wage. Grössere Übereinstimmungen erhalte ich auch nicht bei Ablenkungsbeobachtungen am Magnetometer mit Spiegel und Scala, von ganz besonders günstigen Umständen vielleicht abgesehen. Jedoch zweifele ich nicht, dass Wagen gebaut werden können, welche unter den in Rede stehenden Verhältnissen noch genauere Resultate ergeben.

Es giebt übrigens ein einfaches Mittel, um die vorhergehenden Angaben zu bestätigen. Stellt man die Schwingungsebene in die Westost-Richtung ein und überlässt die Wage sich selbst, so ist sie den Declinationsvariationen unterworfen. Unter Voraussetzung der oben bezeichneten Genauigkeit muss eine Declinationsschwankung von einer Minute einen wahrnehmbaren Einfluss auf die Einstellung haben. Dies war in der That der Fall. Ich äquilibrirte die Wage in der bezeichneten Lage durch geeignete Schalenbelastung und liess sie durch 48 Stunden auf der Schneide balanciren. In zehn ganz willkürlichen Zeitpunkten wurde der Stand des Zeigers mit starker Fernrohrvergrösserung bis auf $^1/_{20}$ Sc. Th. abgelesen und zugleich der Stand einer gedämpften Spiegelbussole notirt, welche selbstverständlich dem Einflusse der Wage entzogen war. Die Zahlen der Tabelle II, bei denen die Ablesungen an der Spiegelbussole zugleich Winkelminuten bedeuten, sind ohne Weiteres verständlich.

II.

Zimmer-temperatur C°	Ablesungen an der Bussole	Ablesungen an der Wage	Änderungen der Declination	Änderungen des Standes der Wage
20.3	508.6	11.35	— 1.7	— 0.15
20.8	508.0	11.25	— 2.3	— 0.25
19.1	517.6	12.10	+ 7.3	+ 0.60
19.4	511.0	11.55	+ 0.7	+ 0.05
19.5	506.9	11.15	— 3.4	— 0.35
20.0	507.0	11.20	— 3.3	— 0.30
20.2	510.3	11.50	± 0.0	± 0.00
20.0	513 6	11.80	+ 3.3	+ 0.30
19.4	514.5	11.90	+ 4.2	+ 0.40
18.6	520.6	12.30	+10.3	+ 0.80

Bezieht man die Änderungen auf irgend eine der Beobachtungen als Ausgangspunkt, z. B. auf die für die Lesungen an der Wage bequem gelegene siebente Beobachtung, so erkennt man aus den betreffenden Zahlen der beiden letzten Columnen, dass die Variationen der Declination mit denen der Wagenstände so nahe proportional gehen, als es überhaupt erwartet werden konnte. Die Scalenablesungen an der Wage geben die Declinationsvariationen in durchschnittlich etwas mehr als zehnfach verkleinertem Maassstabe wieder, was auch der Rechnung entspricht. Die geringe Veränderlichkeit der Beobachtungstemperatur mag dem Experimente allerdings günstig gewesen sein.[1]

In dem Folgenden gebe ich ein Beispiel für die Bestimmung der Horizontalintensität. Der Raum, in welchem die Beobachtungen stattfanden, war keineswegs für erdmagnetische Arbeiten bestimmt. Derselbe war aussergewöhnlich starken magnetischen Localeinflüssen unterworfen, welche den niedrigen Stand der mittleren Intensität völlig erklären.[2] Selbstverständlich waren veränderliche Localeinflüsse

[1] Nachdem diese Mittheilung bereits abgeschlossen war, hat mein Assistent J. FREYBERG den oben erwähnten Einfluss der Declinationsschwankungen durch genauere Beobachtungen mit Spiegelablesung bestätigt.

[2] Der betreffende Gebäudetheil enthält eiserne Deckenbalken, deren Längsrichtung ungefähr in den Meridian fällt. Ausserdem befindet sich, von anderen Eisenmassen abgesehen, unter dem Raume eine grosse Luftheizungsanlage mit etwa 50 eisernen Heizrohren von 260^{mm} Durchmesser und mehr, welche ebenfalls die angegebene Rich-

soweit ausgeschlossen, dass zufällige Störungen bei den Beobachtungen nicht stattfanden. Am 14. Juli waren von J. Freyberg in demselben Raume unmittelbar nach einander zwei Bestimmungen nach der Gauss'schen Methode ausgeführt worden, bei welchen die Schwingungen registrirt und die wichtigsten Correctionen mit Einschluss des inducirten Magnetismus berücksichtigt waren. Dabei hatten sich für H die Zahlen 1.8260 und 1.8283 $\left[\text{mm}^{-\frac{1}{2}}\,\text{mg}^{\frac{1}{2}}\,\text{sec}^{-1}\right]$ ergeben. Auch mit dem Silbervoltameter und der Tangentenbussole war nahe derselbe Werth gefunden worden. An dem Orte des Schwingungsapparates wurde die Wage aufgestellt; das Ablenkungsmagnetometer blieb an seinem Platze. Es war Vorsorge getroffen, dass der Magnet sammt Wagebalken sofort nach der Wägung auf einem mit Einstellungsmarken versehenen Schlitten befestigt und dem Magnetometer, einer kleinen Spiegelbussole, in erster Hauptlage gegenübergestellt werden konnte. Die Berechnung von H geschah nach den Formeln:

$$HM(1+k) = \tfrac{1}{2}(Q_1 - Q_2)\cdot l \cdot g$$

und

$$2M\left(1+\frac{\varkappa}{r^2}\right) = H\cdot r^3(1+\Theta)\,\text{tg}\,\phi\,,$$

worin die beiden Q nunmehr die Bedeutung von Massengrössen haben. Der bei der Wägung durch die Verticalintensität inducirte Magnetismus ist durch die Correction k berücksichtigt, welche für vorliegenden Zweck mit hinreichender Annäherung als constant gelten kann. Sie wurde nach bekannter Methode bestimmt und betrug für meine Lamellen 0.00877. Die ein für alle Male bestimmte Constante $\varkappa$ des zweiten Gliedes der Ablenkungsbeobachtung betrug 20669.74 mm²; sie stimmt gut mit der Angabe von Kohlrausch überein, dass der aus dem zweiten Gliede gefolgerte »Polabstand« auf $\frac{5}{6}$ der Stablänge zu schätzen sei. Ferner kommen in Rechnung:

Schwerebeschleunigung für Dresden..... $g = 9809.81$ mm sec^{-2}
Torsionsverhältniss der Ablenkungsbussole $\Theta = 0.00129$
Länge des Hebelarmes ..... $l = 124.95^{\text{mm}}$

Am 1. September Vormittags wurden unmittelbar nach einander zwei vollständige Bestimmungen ausgeführt, jede aus vier Wägungen und vier Ablenkungen bestehend. Letztere beziehen sich auf den mittleren Abstand $r = 965.3^{\text{mm}}$. Der Kürze halber sind für die Ablenkungen nur die Mittel angegeben.

tung haben. Dass die Intensität am Orte des Magnetometers vermuthlich einen merklich anderen Werth besass, als bei der Wage, kommt nicht in Betracht, da es mir nur auf die vergleichsweise Prüfung der Wägungsoperationen ankam. Für die Wahl des Locals entschied die Abwesenheit von Erschütterungen.

III.

Erste Bestimmung					Zweite Bestimmung				
1	2	3		4	1	2	3		4
Belastung der Schale mg	Einstellung des Zeigers	Differenz der Einstellungen Sc.Th.	mg	Mittel der Einstellungen	Belastung der Schale mg	Einstellung des Zeigers	Differenz der Einstellungen Sc.Th.	mg	Mittel der Einstellungen
(*n*) 342	14.87				(*s*) 164	11.48			
		3.19	0.88	13.28			2.86	0.79	12.91
(*s*) 164	11.68				(*n*) 342	14.34			
		3.12	0.86	13.24			2.79	0.77	12.95
(*n*) 342	14.80				(*s*) 164	11.55			
		3.03	0.84	13.29			2.76	0.76	12.93
(*s*) 164	11.77				(*n*) 342	14.31			
Mittelwerth $Q_1 - Q_2 = 178.86$					$Q_1 - Q_2 = 178.77$				
Mittlere Ablenkung $\phi = 4° 13' 10''$					$\phi = 4° 13' 0''$				
Anfangstemperatur $= 21°2$					Endtemperatur $= 22°3$				
$[mm^{-\frac{1}{2}} mg^{\frac{1}{2}} sec^{-1}]$ $H = 1.82847$					$H = 1.82862$				

Auch hier sieht man aus den Columnen 3, dass die Wage während der Wägungsoperationen eine langsame Veränderung des magnetischen Drehmomentes anzeigte, welche sich aus der ersten Bestimmung in die zweite hinein fortsetzte und zwar über die inzwischen stattgehabte erste Ablenkungsbeobachtung hinweg. Die grosse Regelmässigkeit dieser Veränderung ist allerdings als Zufall anzusehen. Zugleich zeigen die zur Controle gerechneten Zahlen unter 4, dass sich innerhalb eines und desselben Wägungssatzes die Einstellung der von der Horizontalkraft befreiten Wage durchaus nicht geändert hatte. Wohl aber war durch das Abheben und Wiederaufsetzen des Balkens eine dauernde Verschiebung des mittleren Einstellungspunktes vor sich gegangen. Auf die Wägungen innerhalb des zweiten Satzes hat das keinen Einfluss; höchstens hat man in solchem Falle durch Zulage von 1^{mg} zu prüfen, ob die Empfindlichkeit unverändert geblieben ist.

Der Umstand, dass je eine Wägungsbeobachtung mit je einer nachfolgenden Ablenkung combinirt wurde, ist dadurch gerechtfertigt, dass es weniger Zeit kostete, die Wage auseinander zu nehmen, als sie wieder zusammenzusetzen. Übrigens ergiebt die Combination der ersten Ablenkungsbeobachtung mit der zweiten Wägung einen Werth für H, welcher sich von den in der Tabelle angegebenen Zahlen auch nur in den Einheiten der vierten Decimalstelle unterscheidet. Diese gute Übereinstimmung ist nicht Zufall. Die Resultate, welche ich an zwei anderen Tagen aus unmittelbar nacheinander angestellten Beobachtungen erhielt, zeigten ebenfalls den oben bezeichneten Grad der Übereinstimmung. Am 30. August erhielt ich nacheinander 1.8284 und 1.8291, Tags darauf übereinstimmend

1.8295 und 1.8295. Leider konnten gleichzeitige Variationsbeobachtungen, um alle Resultate auf einander zu beziehen, nicht angestellt werden. Überhaupt will ich nicht in Zweifel ziehen, dass das beschriebene Wägungsverfahren noch in manchen Einzelheiten zu verbessern wäre. Dass die Umdrehung der Wage genügend langsam und zwar mit einem geeigneten Kurbelmechanismus zu geschehen hat, ist selbstverständlich. An meiner Wage war ein solcher vorhanden.

Die von F. Kohlrausch angegebene bifilargalvanische oder bifilarmagnetische Methode[1] bietet den Vortheil, dass man das Product und den Quotienten aus *H* und *M* gleichzeitig beobachtet, womit zugleich die Bestimmung des inducirten Magnetismus wegfällt. Ich glaube, dass dieser Vortheil auch bei der Wägungsmethode erzielt werden könnte. Man stelle sich vor, der Magnet bilde mit der Mittelschneide einen Winkel von etwa 45°, seine Axe liege bei horizontal gestelltem Balken in der durch die Mittelschneide gelegten Verticalebene. Sei die Wage wieder wie oben in den Meridian gestellt, so geht die in die Schwingungsebene fallende Componente des magnetischen Momentes nach Gl. 1. und 2. in die Wägungsbeobachtung ein, während die Componente nach der Schneidenrichtung hauptsächlich die Fernewirkung des Magnetes in dieser Richtung bestimmt. An einem in dieser letzteren Richtung aufgestellten Magnetometer würde zugleich mit der oben besprochenen Doppelwägung der doppelte Ablenkungswinkel beobachtet werden können. Für die Ermittelung des Winkels zwischen der Magnetaxe und der Schneide und für die genaue Einstellung des Magnetometers, auf welche es freilich ankommen würde, lassen sich geeignete Methoden vorschlagen.

Dass für die Bestimmung der verticalen Componente des Erdmagnetismus ein ähnliches Wägungsverfahren eingeschlagen werden kann, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Man benutzt, wie beim Wild'schen Variationsinstrument,[2] einen in horizontaler Lage auf einer Schneide spielenden Magnet, welcher jedoch mit Schalen zu versehen ist. Die Einflüsse der Horizontalintensität werden dadurch beseitigt, dass die Wägungen bei westöstlicher Stellung des Magnetes stattfinden. In die Doppelwägung tritt an Stelle der Umdrehung die Ummagnetisirung des Magnetes ein, welche vermittelst einer Magnetisirungsspirale

[1] Vergl. die oben citirte Abhandlung. Ich kann über die Methode nicht aus eigner Erfahrung sprechen, möchte jedoch zu Gunsten der Wägung bemerken, dass dieselbe nur eine Längenmessung, nämlich die des Schneidenabstandes, anstatt dreier beim Bifilarapparat fordert.

[2] Vergl. Th. Edelmann: die erdmagnetischen Apparate der Polarexpedition im Jahre 1883. München 1882.

nöthigenfalls ohne Zerlegung des Instrumentes bewerkstelligt werden kann. Das Product $(Q_1 - Q_2) \cdot l$ misst die Grösse $V \cdot (M_1 + M_2)$, unter M_1 und M_2 die im Allgemeinen verschiedenen magnetischen Momente vor und nach dem Unmagnetisiren verstanden. Das Verhältniss dieser Momente kann gleichzeitig mit den Wägungen aus der Wirkung auf ein in der Richtung des Balkens aufgestelltes Magnetometer erkannt werden, zu welchem Zwecke die Wage um die verticale Axe drehbar zu machen ist. Der absolute Werth von M_1 oder M_2 kann vorher oder nachher durch Vergleich mit einem Magnete von bereits bekanntem Moment bestimmt werden. Aus vorläufigen Versuchen glaube ich schliessen zu dürfen, dass das angedeutete Verfahren sich bei der praktischen Ausführung hinreichend einfach gestalten werde, um auch für die Verticalintensität brauchbare Bestimmungen zu ergeben.

41. Beschreibung des Panzers von Eutatus Seguini.

Von H. Burmeister
in Buenos Ayres.

(Vorgelegt am 19. Juli; — gedruckt im Bericht vom 18. October [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 25. October.)

Hierzu Taf. VI.

Das eigenthümliche quaternäre Gürtelthier, dem P. Gervais obigen Namen gab, wurde von ihm im Jahre 1867 in den Comptes rendus des séanc. hebdom. etc. tom. LXV bekannt gemacht und 1873 in den Mém. de la Société Géolog. d. Fr. II. Sér. tom. IX pl. 28 & 29 ausführlicher dargestellt, indem er Abbildungen des Schädels und der Knochen beider Extremitäten vorlegte, welche die genaue Vergleichung mit denen lebender Arten gestatten.

Unser Museum in Buenos Ayres besass damals von dem fraglichen Thiere nur einen halben Unterkiefer und erhielt erst viel später, im Jahre 1879, einen Vorderfuss der rechten Seite: Theile, die es mir nicht möglich machten, die Art weiter zu schildern, als ich es im dritten Bande meiner Descr. phys. de la Rép. Argent. p. 443 gethan habe. Endlich erwarb ich, zu Anfang des laufenden Jahres (1883) für das Museum zwei fast vollständige Panzer, nebst zahlreichen Knochen des Skelets, welche eine allseitige Schilderung erlauben.

Da der eine Panzer mit der ganz unversehrten rechten Hälfte vorliegt, so ist es mir vergönnt, der Königl. Akademie die Beschreibung und Abbildung dieses bisher unbekannten Körpertheiles als eine interessante Novität anzukündigen.

Gervais sagt in seiner kurzen Nachricht über die Knochen des Schädels und der Extremitäten vom Panzer nichts weiter, als dass er Gürtel besitze, ohne ihre Zahl anzugeben; er lässt die weitere Form desselben unbestimmt und verweist auf seine spätere Schilderung, die nicht erschienen ist. Nach Angabe eines kundigen Gehülfen am hiesigen Museum, der kürzlich die Pariser Sammlung genau betrachtet hat, befinden sich in derselben nur einige Trümmer des Panzers, welche es nicht gestatten, seine Gestalt vollständig wiederzugeben oder sachgemäss zu schildern. Daher schien es mir passend, eine Beschreibung des hier gut restaurirten alsbald zu veröffentlichen. Zuvor einige allgemeine Angaben.

Die lebenden Gürtelthiere, bekannt unter dem besonderen Namen der *Armadillos*, sind eine südamerikanische Thierform, die nordwärts bis Texas verbreitet ist und vorzugsweise in den weiten Ebenen des Binnenlandes sich aufhält. Sie führen in Brasilien die Benennung *Tatus* und zerfallen, ihrem Baue nach, in zwei durchgehends verschiedene Abtheilungen, welche sich schon nach der äusseren Bedeckung des Panzers gut unterscheiden, indessen bisher von den meisten Zoologen nicht nach ihrem wahren Werthe erkannt worden sind.

Die eine der beiden Gruppen, zu welcher die grössere Zahl der Arten gehört, zeigt über jeder knöchernen Platte des Panzers nur ein einziges, ebenso geformtes Hornschild, neben dem die etwa vorhandenen Haare hervorsprossen, welche im Rande der Knochenplatten ihren Sitz haben.

Die andere Gruppe besitzt über den Knochenplatten des Panzers zweierlei verschiedene Hornschilder, von denen ein grösseres auf der Mitte einer jeden Knochenplatte ruht, während andere kleinere Schilder über den Nähten zwischen den Knochenplatten liegen und die Haare, welche aus den Fugen zwischen den Hornschildern hervorwachsen, in der Fläche der Knochenplatten ihren Sitz haben.

In meiner »Systemat. Übers. der Thiere Brasiliens« behielt ich für die Arten der ersten Gruppe den alten Gattungsnamen *Dasypus* bei, und belegte die der zweiten Gruppe mit dem neuen Namen *Praopus* (a. a. O. I. Bd. Seiten 276 und 295).

Da die ziemlich zahlreichen Arten der ersten Gruppe auffallende äussere Verschiedenheiten, bei gleichem Organisationstypus, zumal im Bau der Vorderfüsse an den Tag legen, so hat man sie unter verschiedenen Namen in mehrere Gattungen getrennt, welche sich als Untergattungen wohl festhalten lassen, aber durchaus nicht den gleichen Rang beanspruchen dürfen mit dem der zweiten Gruppe, die übrigens nur aus vier gut unterscheidbaren Arten besteht, welche äusserlich einander viel ähnlicher sehen, als die 8—10 Arten der ersten Abtheilung.[1]

Das hier zu besprechende quaternäre Gürtelthier gehört, seinen Eigenschaften zufolge, der ersten Abtheilung oder Gattung *Dasypus* an, kann aber mit demselben Rechte, wie die bisher darin aufgestellten Untergattungen eine eigne Section bilden; denn sowohl sein Panzer, als auch sein Skelet zeigen Verhältnisse, die vereinigt keiner lebenden Art zukommen. Dennoch schliesst es sich mit allen seinen besonderen

[1] Bei Gelegenheit meiner Schilderung der Vorderfüsse beider Gruppen in Reichert's und du Bois-Reymond's Archiv, Jahrg. 1871, S. 701 und 713, habe ich die Unterschiede derselben, deren sämmtliche 12—14 Arten ich grossentheils lebend untersuchen konnte, weiter angegeben.

Eigenschaften an lebende Arten an, bildet aber ein Gemisch derselben, das in dieser Weise bisher noch nicht beobachtet gewesen ist.

Als Ganzes betrachtet weicht sein Panzer durchaus nicht vom Typus des Panzers der lebenden *Armadillos* ab; er hat ein gesondertes Kopfschild; einen grossen Rumpfpanzer, der aus drei Abtheilungen besteht, welche wie bei den lebenden Arten sich als Schulterschild, Rückengürtel und Kreuzschild darstellen; ferner einen davon abgesonderten Schwanzpanzer und noch andere Panzertheile auf den Vorder- wie Hinterbeinen, welche die Aussenseite genannter Gliedmaassen bedecken. Alle diese Panzerstücke werden aus Knochenplatten oder Knochenwarzen zusammengesetzt, deren Verbindung unter einander durch Nähte, mit zwischengelagertem Bindegewebe während des Lebens, bewerkstelligt wird, die gegen einander aber, als in sich geschlossene Schilder oder nach unten offene Gürtel, beweglich bleiben. Jeder Knochenplatte oder Warze entspricht ein ebenso geformtes Hornschild, das zwar gegenwärtig, als in Folge der Zersetzung des organischen Gewebes verloren gegangen, fehlt, aber sicherlich vormals, wie das Thier lebte, vorhanden war und die nach aussen gewendete Fläche des Knochenschildes bedeckte, an seinem Rande einen schmalen freien Raum lassend, in dem die Haare ihre Stellung fanden; denn fast alle Knochenplatten haben an ihrem nach hinten gewendeten Umfange mehrere deutliche, offene Grübchen in ihrer Substanz, worin die Wurzeln der Haare, die zwischen den Hornschildern hervortraten, sich verbargen.

Die sämmtlichen Knochenplatten und Warzen zeigen auf dieser äusseren, vormals von Hornschildern bedeckten Oberfläche eine feine, unregelmässig wellenförmige oder körnige Structur, mit ganz feinen Poren in ihren Vertiefungen, welche den Blutgefässen und Nerven der darüber befindlichen Matrix für die Hornschilder zum Durchgang dienten. Ausserdem sind die grösseren Platten mit leichten Erhabenheiten und Eindrücken dazwischen versehen, welche ihnen eine charakteristische Zeichnung der Oberfläche verleihen, mit kleinen Verschiedenheiten je nach der Stellung der Platten in den verschiedenen Panzertheilen. Darin erkennt man an allen Platten mehr oder weniger deutlich eine mittlere gewölbte, länglich ovale Figur, von deren fein vertieftem Umfange andere etwas schwächere Furchen nach beiden Seiten ausgehen, die den peripherischen Saum der Platte in kleine, ziemlich quadratische Felder theilen. Die Anzahl solcher Feldchen ist verschieden: sie hängt von der Grösse der Platten ab. Gewöhnlich haben beide Langseiten jeder Platte gleich viel Felder, 3—5 und die schmäleren Endseiten 2—3, in welchem Fall die Eckfelder für beide Seiten mitgezählt werden. In allen diesen Structur-

verhältnissen stimmen die Panzerplatten von *Eutatus* mit denen lebender Arten überein, harmoniren aber darin am meisten mit den Untergattungen des Encubert *(Euphractus)* und des Mataco *(Tolypeutes)*, welche ebenfalls wie *Eutatus* mit offenen Grübchen für Haarbälge am Hinterrande jeder Platte versehen sind.

Das Kopfschild (Fig. 1 *A*) hat die allgemeine Gestalt eines Kartenherzens, doch mit mehr vorgezogener Spitze und weiter von einander abstehenden Seitenlappen. Es bedeckt nur die obere Seite des Schädels und zeigt, wie diese, eine leichte Wölbung nach oben. Das mir vorliegende, bis auf einen Theil des fehlenden Hinterrandes vollständige Exemplar, ist einschliesslich des letzteren 22^{cm} lang und 16^{cm} zwischen den Hinterlappen breit Es beginnt schmal, aber nicht ganz spitz, sondern mit kurzem Bogen auf der Nase, und besteht hier aus sehr hohen warzenförmigen Platten, sich vom Anfange bis zur Augenpartie allmählich verbreiternd. Hier misst das Kopfschild 10^{cm} in der Breite. Über den beiden Orbitalrändern beschreibt es an jeder Seite eine 5^{cm} breite, einwärts gewendete Bucht, die mit einer scharfen Ecke vorn wie hinten endet, und von dieser geht der breite Lappen an jeder Seite nach hinten aus, worunter die Musculatur für den Unterkiefer in der Schläfengrube sich befand. Beide Lappen werden von einem 7^{cm} breiten Bogenrande, der über der Occipitalkante schwebte und sie etwas überragte, auseinander gehalten; sie selbst haben einzeln eine Breite von 4.5^{cm}.

Die schon erwähnten warzenförmigen Knochenplatten an der Spitze des Kopfschildes sind nahezu 2^{cm} lang und 1^{cm} breit, doch ist das erste Paar im Endbogen etwas kleiner. Alle zeigen die allgemeine, früher beschriebene Oberflächensculptur, freilich mit dem Unterschiede, dass die von Furchen abgesonderten Felder auf jeder Platte sich stärker wölben, zumal das Mittelfeld sich zu einem wahren Höcker erhebt. Man zählt am Schnautzenrande bis zur vorderen Orbitalecke acht Querreihen von Platten, wovon zwei Platten die erste Reihe, drei die zweite, vier die dritte, fünf die vierte bilden und so allmählich mehr Platten bis zur achten, die aus elf Platten besteht. Zwischen beiden Orbitalbuchten bleibt diese Zahl ungeändert im Kopfschilde, steigt aber an der hinteren Orbitalecke auf dreizehn und nimmt von hier stetig zu bis auf zwanzig oder einundzwanzig in der breitesten Gegend des Schildes an beiden Lappen, wobei indess die Platten zugleich etwas kleiner werden, besonders gegen die Mitte hin. Aus dieser Gegend sind die sechs in Fig. 7 dargestellten Platten entnommen; die grösseren der Figur liegen am vorderen Rande der Seitenlappen des Schildes, unmittelbar hinter der Orbitalecke. Man erkennt an jeder Platte die Grübchen der Haarbälge, deren Anzahl zwei nicht

überschreitet, bei den höher gewölbten vordersten Platten aber auf ein Grübchen, das dem am stärksten gewölbten höckerartigen Mittelfelde entspricht, sich beschränkt.

Eigenthümlicher gestalten sich die Platten am Umfange des Kopfschildes; sie besitzen einen besonderen aufgeworfenen Rand, der als hoch gewölbte Kante über die Fläche der Platte hervorragt, aber in der Mitte dieser Kante eine Kerbe oder Bucht besitzt, die den Kamm in zwei Buckel trennt. Ein solcher Rand zeigt sich am ganzen Umfange des Kopfschildes bis zur hinteren Orbitalecke und verschwindet wieder am Umfange der Seitenlappen nebst der mittleren Occipitalportion, deren Randplatten in eine ziemlich scharfe horizontal vortretende Kante ausgehen.

Mitten auf dem Scheitel ist hinten zwischen den Seitenlappen des Schildes eine leichte Vertiefung des Kopfpanzers bemerkbar, gleichsam als wäre derselbe etwas eingesunken, und hierin stehen die kleinsten Platten.

Die Unterfläche der Platten ist innig mit der freien, von keiner Musculatur bedeckten Oberfläche des Schädels verwachsen; sie kann nur gewaltsam davon getrennt werden. An einem zweiten zertrümmerten Exemplar des Schädels ist diese Verwachsung des Panzers und Schädeldachs deutlich erkennbar, denn wo an ihm Platten des Kopfschildes fehlen, da ist auch die dünne Schädelwand mit herausgerissen und verloren gegangen.

Der Rumpfpanzer (Fig 1 *B*) besteht aus den drei schon genannten Bestandtheilen, welche auch den lebenden *Armadillos* zukommen; sie zeigen indessen, wenigstens der erste und dritte Abschnitt, gewisse Eigenthümlichkeiten, welche bei lebenden Arten nicht wahrgenommen werden. Darunter erscheinen die des Schulterschildes mir als die merkwürdigsten.

Dasselbe ist zwar auch bei allen lebenden Arten kleiner als das Kreuzschild, aber nie so stark verkleinert wie bei *Eutatus*, wozu kommt, dass seine vordere Hälfte sich in bewegliche Gürtel auflöst und das Übrige in der Mitte des Rückens nur aus einer einzigen Plattenreihe besteht, was bei lebenden Arten nicht vorkommt. Die Absonderung der vordersten Plattenreihen des Schulterschildes findet sich gegenwärtig auch bei *Dasypus gigas* und *D. villosus*, aber sie ist nur angedeutet, nicht zur wirklichen Gürtelbildung entwickelt. *D. gigas* hat am Nacken, vor dem Schulterschilde, mehrere abgekürzte Bogenreihen der Platten, von denen die erste 9, die zweite 12, die dritte 14, die vierte 16 Platten umfasst, während die folgenden Reihen 20, 24, 28, 32, 36, ja zuletzt gar 40 Platten begreifen: aber selbst die drei ersten, scheinbar ganz von den übrigen getrennten Reihen

sind nicht für sich beweglich, also keine wahren Gürtel, sie hängen durch feste Nähte an den folgenden und können nur ein wenig gebogen werden. *D. villosus* besitzt scheinbar die beiden ersten unverkürzten Plattenreihen des Schulterschildes gürtelförmig erhaben, aber eine verschiebbare Gürtelbildung findet auch bei ihm nicht statt; die Reihen hängen in festen Nähten an einander wie an den folgenden: es fehlt ihnen der freie unterschiebbare vordere Saum, der wirkliche Gürtel auszeichnet und sie beweglich macht.

Bei *Eutatus* findet sich ein solcher Saum an den vordersten Plattenreihen des Schulterschildes, also eine wirkliche Gürtelbildung, mithin ein ganz anderer ihm eigenthümlicher Bau. Sein Schulterschild besitzt vorn vier freie, für sich bewegliche Gürtel, die einzeln bis zum Seitenrande des Schildes hinabreichen und von denen nur der erste keinen unterschiebbaren Saum zeigt, weil er sich unter keinen ihm vorliegenden Gürtel zu schieben hatte, sondern mit seinem freien Rande an die Nackenhaut des Halses stiess. Die drei anderen besitzen einen solchen Saum zum Unterschieben unter den vorhergehenden Plattenring. Hierzu kommt noch ein fünfter etwas breiterer Ring, mit dem das Schulterschild in der Mitte des Rückens über den Schulterblättern abschliesst, der sich aber an beiden Seiten zu einem breiten, zuletzt aus sechs Plattenreihen bestehenden Schilde erweitert. Auf diese Weise besteht das Schulterschild in der Mitte, ähnlich wie die Mittelportion des Rumpfpanzers, aus Gürteln, und nur seine Seiten bilden nach hinten ein wirkliches Schild wie bei den lebenden Arten.

Zur näheren Betrachtung dieses eigenthümlichen Verhaltens übergehend, bemerke ich, dass, wie es die Abbildung zeigt, der erste von den fünf Gürteln aus sehr kleinen Knochenplatten ohne freien Saum gebildet wird, die einzeln eine Länge von nur 1^{cm} und $^1/_2{}^{cm}$ Breite haben. Es sind ihrer nur 8 Platten an der rechten Seite des Panzers vorhanden, aber aus ihrer Form und Grösse ist zu entnehmen, dass die fehlenden nach oben hinauf allmählich immer kleiner wurden und zuletzt wohl wenig mehr als die halbe Grösse der unteren besassen. Ihr vorderer Rand ist abgestumpft, nicht zugeschärft, wie an den folgenden, also auch ohne den unterschiebbaren Saum, weil er sich mit der weichen Nasenhaut verband. Die Platten der folgenden Gürtel sind beträchtlich grösser, aber nicht genau gleich, denn jeder spätere Ring übertrifft den vorhergehenden etwas an Breite. Die des zweiten Gürtels haben etwa 2^{cm} Länge und 1^{cm} Breite; der vordere Rand trägt den unterschiebbaren, zugeschärften Saum von $4—5^{mm}$ Durchmesser. Dieser Saum von keilförmiger Dicke endet frei nach vorn und wird von dem hinter ihm befindlichen grösseren Theil jeder Platte durch eine ziemlich tiefe Querfurche gesondert, deren vorderer

Rand scharf abfällt, während der hintere sanft in die darauf folgende Oberfläche der Platte übergeht. Jeder der drei Gürtel wird nach den Seitenrändern hin etwas breiter und verschmälert sich aufwärts allmählich bis zu einem Busen neben der Mitte seines Umfanges, welcher einen Theil des Gürtels zwischen beiden Busen, von der Breite des Occipitalrandes am Kopfschilde, absondert. In diese Busen legten sich, wenn der Kopf zurückgezogen wurde, die offenbar wie bei den lebenden Arten sehr grossen Ohrmuscheln, während der etwas mehr nach vorne vortretende breitere Mitteltheil der Gürtel an den entgegengesetzten Occipitalrand des Kopfschildes sich anschloss, wobei der erste Gürtel sich etwas unter den besagten Rand des Kopfschildes schob. Dazu diente der mittlere Vorsprung des oberen Randes der Gürtel; er bildet eine Art Kappe, wie solches aus meiner Zeichnung Fig. 1 zu ersehen ist, die mit dem Occipitalrande des Kopfschildes zusammentraf, wenn der Kopf sich in den Eingang des Rumpfpanzers zurückzog und sein Schild gleichsam als Deckel in diesen Eingang einklemmte. So wenigstens gebahren sich die lebenden Arten, von denen ich mehrere längere Zeit in meiner Umgebung zur Beobachtung gehalten habe. Namentlich ist die entsprechende Gegend des Panzers von *D. villosus* ganz ähnlich gestaltet, wie am Panzer von *Eutatus*, daher es wohl keinem Zweifel unterliegen kann, dass auch das lebende Geschöpf seiner Zeit dieselben Bewegungen gemacht hat.

Im Einzelnen die Gürtel näher betrachtend ergiebt sich, dass die Anzahl ihrer Platten eine sehr beträchtliche ist. Zwar liegen mir vom ersten Gürtel nur 8 Platten der rechten Seite vor, aber ihre nach oben abnehmende Grösse lässt annehmen, dass deren etwa 60 im ganzen Gürtel vorhanden waren. Der genau bis zur Mitte, also halb vollständig erhaltene zweite Gürtel besteht bis dahin aus 28 einzeln beträchtlich grösseren Platten, seine volle Anzahl war also 56. Vom dritten, noch etwas weiter unverschrten Gürtel sind 30 Platten da, wovon zwei jenseits der Mittellinie des Rückens stehen, es mögen also 58 Platten den ganzen Gürtel gebildet haben. Der vierte Gürtel zeigt 33 erhaltene Platten und davon drei jenseits der Mittellinie; die Gesammtzahl der Platten des Gürtels war also 60, wie im ersten Gürtel. Der fünfte, breiteste Gürtel besteht noch aus 35 Platten, wovon vier über die Mittellinie hinausreichen, seine vollständige Zahl der Platten betrug mithin 62.

An diesen Gürtel schliesst sich nun der erweiterte Lappen jeder Seite, von dem ich schon früher gesprochen habe; er bildet das grosse Schild zum Schutz der Oberarme, wie es in meiner Figur dargestellt ist. Dasselbe gestaltet sich am Gürtel ganz allmählich von oben herab, indem die in der Mitte einfache Reihe der Gürtelplatten alsbald an

jeder Seite sich in zwei Reihen auflöst, zwischen denen nach kurzem Verlaufe sich zwei neue Plattenreihen einschieben. Diesen folgen von dem Punkte an, wo der Lappen seine grösste Breite erreicht, noch zwei ungleiche Plattenreihen, von denen die eine längere sich in die Mitte der vorderen secundären Reihe eindrängt, die kürzere zwischen dieser secundären neuen und der vorderen der früheren. Ich zähle von der Mittellinie des Rückens abwärts 15 Platten an der rechten Seite; die einfache Portion der fünften Plattenreihe bestand also aus 30 Platten. In jeder der beiden sich daran schliessenden neuen Reihen liegen, bis zum Einschieben der secundären Reihen, 8 Platten. Die Theilung der vorderen secundären Reihe erfolgt nach ihrer fünften Platte und die dritte Theilung, d. h. die zweite eben dieser Reihe, nach ihrer vierten Platte. Diese letzte eingeschobene Zwischenreihe besteht aus 5 Platten, und ebenso viele haben die Reihen daneben bis zum Endrande. Letzterer schliesst an allen Plattenreihen mit einer eigenthümlich gestalteten, beinahe halbmondförmigen, scharfkantigen Platte, ohne Sculptur auf der Oberfläche, welche mit ihrer spitzen Endzacke nach hinten vortritt und dem freien Rande des Schildes ein grob-sägeförmiges Ansehen giebt.

Auf das Schulterschild folgen 9 frei-bewegliche Gürtel mit unterschiebbarem Vordersaum, genau von der Bildung der Gürtel des Schulterschildes, nur aus etwas grösseren Platten bestehend; doch übertrifft der fünfte Gürtel des Schulterschildes den ersten Gürtel der Mittelportion des Panzers um ein Geringes an Breite. In Fig. 8 habe ich drei solcher Gürtelplatten in natürlicher Grösse und Lage dargestellt. Jede von ihnen ist 3.8—4^{cm} lang und 1.2—1.4^{cm} breit; sie hat einen sanftabfallenden 1—1.2^{cm} messenden, zugeschärften Saum, der mittelst einer ziemlich tiefen, 3^{mm} breiten Furche, mit vorderem scharfen und hinterem verstrichenen Rande von der übrigen Platte abgesondert wird. Dann beginnt die eigenthümliche, wellig chagrinirte Oberfläche des dickeren Theils der Platte, welche von senkrecht abfallenden Rändern, als leicht granulirten Nähten begrenzt wird. Auf der Mitte dieses Theils der Platte sieht man eine von feiner Furche umschriebene Längsschwiele und daneben an jeder Seite vier oder fünf durch Querfurchen abgesonderte, quadratische Feldchen. Vor dem nach hinten gewendeten dicksten Rande der Platte befindet sich eine Reihe von meistens fünf, mitunter nur vier, tiefen, etwa 2^{mm} weiten Grübchen, mit feinen scharfen Scheidewänden zwischen ihnen. In diesen Grübchen sassen offenbar Haarzwiebeln für ziemlich lange steife Borsten, die zwischen den Platten hervorwuchsen.

Jeder Gürtel besteht aus 60—70 solcher Platten; er ist nicht völlig ringförmig geschlossen, sondern lässt an der Bauchseite des

Thieres eine breite Lücke, nebenbei mit einem scharfen Rande endend, der ebenfalls, wie an den Gürteln und Plattenreihen des Schulterschildes, von einer grösseren, mondförmigen, dünneren Platte ohne Skulptur auf der Oberfläche gebildet wird. Die untersten Platten jedes Gürtels, vor und neben der Endzacke, sind die längsten; sie zeichnen sich vor den übrigen dadurch aus, dass die Grübchen für die Haarbälge in einer schief vor die untere Endecke gezogenen kürzeren Querreihe stehen und der oberen Hälfte des hinteren Endrandes fehlen; erst mit der sechsten Platte vom Ende läuft die Reihe der Grübchen dem Hinterrande der Platten parallel. Gegen den Rücken hinauf werden die Platten etwas kürzer, aber der Unterschied ist gering, kaum mehr als $1-2^{mm}$.

Etwas eigenthümlicher gestaltet sich der erste Gürtel, unmittelbar hinter dem Schulterschilde; denn obwohl er auf der Mitte des Rückens der schmälste von allen ist, so hat er doch weiter abwärts an beiden Seiten, neben dem Busen des Schulterschildes, mit dem der Seitenlappen seinen Anfang nimmt, eine grössere Breite als die übrigen, indem er hier in dem Busen entgegengesetzter Richtung sich nach hinten etwas ausdehnt und eine länglich elliptische Erweiterung seiner Fläche darstellt, welche den genannten Busen des Schulterschildes ausfüllt und seinen eigenen Rand etwas vortreten macht. Eine ähnliche aber viel schwächere Biegung des Randes nach hinten zeigt auch der zweite Gürtel; erst am dritten verliert sich die besagte Erweiterung vollständig.

Auf die neun Gürtel der Mitte des Panzers folgt nach hinten, über der Beckengegend, das grosse Kreuzschild, welches einen Theil der Lendenwirbel, das Becken und die oberen Abschnitte der Hinterbeine bedeckt. Es ist in Fig. 2 von hinten darsgetellt, woraus sein völlig halbkreisförmiger Umfang und mit Fig. 1 sein etwas mehr als einer Viertelskugel gleicher Inhalt sich entnehmen lässt. Seiner Zusammensetzung nach wird es aus lauter gleichen, ziemlich regelmässig oblongen Platten gebildet, welche in Querreihen durch Nähte aneinander gefügt sind. Nur nach hinten werden die Platten etwas kleiner und ihre hintere, respective untere Hälfte etwas schmäler; hier bilden sie kürzere Bogen mit steilerer Stellung der Platten. In der Regel alterniren die Platten in den auf einander folgenden Reihen mit ihren Nähten. Fig. 9 zeigt drei solcher Platten in natürlicher Grösse; man sieht, dass sie 2^{cm} lang und $1.2-1.3^{cm}$ breit sind. Sie stimmen in Ansehn und Beschaffenheit mit der hinteren grösseren Partie der Gürtelplatten überein, sind aber, bei geringerer Länge, etwas breiter als diese: ihr hinterer Rand hat ebenfalls eine Reihe von meistens vier, mitunter nur drei, seltener gar fünf Grübchen für Haarbälge.

Die erste Reihe der Platten am Vorderrande des Schildes beginnt mit einem schief abfallenden Saum, von der Beschaffenheit des Saumes an den Gürtelplatten, zum Unterschieben unter den vorhergehenden letzten Rückengürtel, welcher sich auf diesem Saum nach der Weise der Gürtel biegsam bewegen kann. An allen folgenden Plattenreihen fehlt ein solcher Saum, die Platten hängen hier in geraden Nähten fest an einander.

Ich zähle in beiden vollständigen Kreuzschildern, die mir zur Untersuchung vorlagen, auf der Mittellinie der Rückenfläche 14 Plattenreihen und an den unteren freien Seitenrändern deren 15, indem zwischen der dritten und vierten Reihe von vorn, wie Fig. 1 zeigt, eine kurze Zwischenreihe sich einschiebt. In der ersten Reihe hinter dem letzten Gürtel sind 60 Platten vorhanden, und ebensoviel in der zweiten wie dritten Reihe. Die eingeschobene Zwischenreihe besteht an dem einen Exemplar aus 9, an dem anderen aus 10 Platten; die darauf folgende ganze vierte Reihe hat noch 60 Platten, wie die vorhergehenden, aber ihre Platten sind etwas kleiner. In der fünften und sechsten Reihe zähle ich 52 und 50 Platten; von da nach hinten nimmt ihre Zahl beständig ab; die siebente Reihe hat 45, die achte 40, die neunte 36, die zehnte 33, die elfte 30, die zwölfte 25, die dreizehnte 19, und die letzte vierzehnte 13, oder durch Theilung der obersten Mittelplatte in zwei deren 14. Eine solche Theilung kann auch bei den früheren Reihen mit ungerader Plattenzahl sich einstellen; doch finde ich darin keine genaue Übereinstimmung der beiden mir vorliegenden Panzer.

Die Platten der hinteren Reihe gehen mehr und mehr aus der rein oblongen Form in die trapezoidale mit etwas schmälerem Hinterrande über, und die ganzen Reihen aus der genauen Kreisbogenform in die parabolische, ja ihre beiden Hälften stossen in der Mittellinie fast unter Winkeln, nach Art der gothischen Bogen, an einander. Endlich bleibt, am Hinterrande des Kreuzschildes, im letzten Bogen eine parabolische Öffnung von 12^{cm} Breite und 6.5^{cm} Höhe, welche durch den daraus hervortretenden Schwanz geschlossen wird.

Eigenthümlich verhält sich der untere freie Rand des Kreuzpanzers, indem derselbe nicht wie die Seitenränder vor ihm einen fortlaufenden Bogen bildet, sondern in der Mitte einen tiefen Busen, wie einen Winkel hat. Der vordere Schenkel desselben schliesst sich in einer Curve genau an die vorhergehende des Gürtelrandes, ist aber etwas stärker gekrümmt. Hiermit enden die ersten sieben Plattenreihen des Kreuzschildes, deren jede eine nur etwas kürzere und stumpfere Endplatte trägt, als die der Gürtel: aber am zweiten, hinteren Schenkel, der absteigend mehr nach innen gerichtet ist, werden die

Endzacken dicker, zu kurz-konischen, mit der Spitze auswärts gebogenen Höckern, die am Rande der achten Plattenreihe klein beginnen und bis zur letzten, vierzehnten Reihe etwas grösser, zumal breiter werden.

Diese Form des Randes am Kreuzschild ist eine merkwürdige Eigenthümlichkeit der fossilen Unter-Gattung *Eutatus*, sie finden sich in ähnlicher Art bei keinem lebenden Gürtelthiere.

Es bleibt mir noch übrig, die Grössenverhältnisse des ganzen Rumpfpanzers anzugeben, wie er sich im Zusammenhange seiner drei Theile darstellt. In dieser Beziehung stimmt er ziemlich genau mit dem Panzer der grössten lebenden Art, des *Dasypus gigas*, überein, was, soweit ich sie kenne, auch die Knochen des Skelets bestätigen; nur etwas höher gewölbt und ein wenig kürzer dürfte der Panzer von *Eutatus* gewesen sein. Unsere beiden, jetzt vollständig restaurirten Exemplare messen, vom oberen Rande der vorderen Panzermündung bis zum Ausschnitt am Hinterrande für den Schwanz 58—59^{cm} in grader Linie und 64--65^{cm} mit der Krümmung des Rückens. Der Querumfang des Schulterschildes beträgt am Hinterrande 60^{cm} und der des letzten Rückengürtels 85^{cm}. Die Seitenränder des vorderen Eingangs haben 15^{cm} Abstand und die unteren Ränder der Gürtel in der Gegend ihrer grössten Entfernung 36^{cm}. Die Mittellinie des Schulterschildes ist 10^{cm} lang, die der neun Gürtel 26^{cm}, und die des Kreuzschildes 31^{cm}, alle drei nach ihrer Krümmung gemessen. Weitere Maasse einzelner Theile habe ich schon früher angegeben.

Von dem übrigen Körper des Thieres haben der Schwanz und die Beine, wie bei den lebenden *Armadillos*, eine Panzerbekleidung getragen. Davon liegt mir der Panzer des Schwanzes fast vollständig vor, vom Beinpanzer aber nur ein kleiner Rest auf der Rückseite des Vorderfusses.

Der Schwanzpanzer (Fig. 1 *C*) ähnelt ganz dem des lebenden *D. gigas*; er bildet ein 40—42^{cm} langes, conisches Rohr, das von der etwa 8^{cm} im Durchmesser haltenden Basis bis zur feinen Endspitze mit flachen, querovalen Knochenschuppen in alternirenden Reihen bekleidet ist. Die grössten Schuppen zunächst der Basis haben eine Breite von 1^{cm}, die letzten, kleinsten, welche mir vorliegen, nur 4^{mm} Querdurchmesser; jene 5—6^{mm}, diese höchstens 3^{mm} Longitudinalausdehnung; sie sind auf der Aussenfläche etwas platter, auf der inneren leicht gewölbt, und enden ringsum mit zugeschärftem Rande, worin die nach vorn gewendete Basis jeder Schuppe etwas winkelig vortritt, die entgegengesetzte hintere einen richtigen Kreisbogen bildet. In der Mitte der Unterseite des conischen Rohrs befindet sich eine Reihe etwas grösserer, besonders breiterer Schuppen, denen die mehr gewölbten von jeder Seite in regelmässigen Reihen sich anschliessen.

Nur eine Strecke von 25^{cm} Länge hat sich vom Schuppenpanzer erhalten: sie scheint mir den basalen Theil des Rohres vollständig darzustellen, wie aus den 14 darin steckenden Schwanzwirbeln, deren erster noch am Endwirbel des fehlenden Kreuzbeines haftet, zu entnehmen ist. Die 14 Wirbel haben zusammen eine Länge von 36^{cm}, während dasselbe Maass vom Schwanz des *D. gigas* nur 13 Wirbel umfasst, woraus sich ergiebt, dass die Schwänze beider Arten von ziemlich gleicher Grösse waren, der des *D. gigas* vielleicht um ein Geringes länger.

Der Rest von der Panzerbedeckung des Vorderfusses, welchen ich kenne, erscheint in Fig. 3 mit halber natürlicher Grösse; er besteht aus durchschnittlich 8—10^{mm} langen, stark gewölbten, länglich ovalen Knochenwarzen, deren Mitte sich stumpfkantig erhebt und gegen den Endrand als Höcker abfällt. Solche Warzen stehen in Reihen hinter einander, die Warzen jeder Reihe mit denen der vorhergehenden und folgenden alternirend. Nur die letzten jeder Reihe, am Rande des Fussrückens, vor den Krallen, sind etwas grösser und scharfkantig über die Basis der Krallen vorgezogen.

Alle Knochenschuppen und Warzen beider Panzerstücke haben auf der äusseren Oberfläche dieselbe feine, granulirt-chagrinirte Structur wie die Knochenplatten des Rumpfpanzers, aber darin keine durch Eindrücke gesonderte Feldchen; wohl aber sehe ich an mehreren, besonders der grösseren beider Arten offene Grübchen im Rande nach der freien Endseite, welche zur Aufnahme von Haarbälgen auch an diesen, wie an den Platten des Kopf- und Rumpfpanzers bestimmt waren. Aus der allgemeinen Ähnlichkeit des *Eutatus* mit den lebenden *Armadillos* ist übrigens wohl zu entnehmen, dass der Panzer des Fusses sich am Bein weiterhinauf erstreckte und erst in der Nähe des Ellenbogen- und Kniegelenkes endete.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass alle diese knöchernen Panzertheile auf der äusseren Oberfläche von ähnlich geformten Hornschildern bedeckt waren, welche mit der Epidermis ebenso zusammenhingen, wie die Knochengebilde mit der Cutis, und dass die Haare zwischen ihnen aus den weichen Verbindungslinien hervorragten, die Hornschuppen zwischen sich frei lassend. Der fossile *Eutatus* war ein stark behaartes Gürtelthier, wie unter den lebenden die mit den Namen von *Dasypus villosus*, *D. setosus*, und *Praopus hirsutus* belegten Arten. Auch die Seiten des Kopfes und Bauches werden, wie bei diesen stark haarigen Arten, mit kleinen Knochenwarzen und Hornschildern, die Haare führten, bedeckt gewesen sein; *Eutatus* muss im äusseren Ansehen dem *D. villosus* und *D. setosus* am ähnlichsten gewesen sein, dabei aber dem *D. gigas* an Körpergrösse nicht nachgestanden haben. Selbst die bloss von Haut bekleideten Stellen des Rumpfes,

der Kehle und der Innenseite der Beine tragen bei den genannten lebenden Arten Haare und mögen ebenso bei *Eutatus* sich verhalten haben.

Die engere systematische Beziehung zu den lebenden Arten der *Tatus* lässt sich ohne Berücksichtigung des Skelets nicht einleuchtend entwickeln, und das bestimmt mich, hier noch derjenigen Theile des Knochengerüstes zu gedenken, welche die verwandtschaftlichen Verhältnisse von *Eutatus* überzeugend darthun.

In dieser Hinsicht muss zuerst der Schädel in Betracht gezogen werden, weil Gervais von ihm sagt, dass er dem des Cachicame, meiner Gattung *Praopus*, gleiche. Nach der Abbildung des restaurirten Schädels auf Pl. 29 seiner Abhandlung ist diese Ähnlichkeit unverkennbar; aber der mir vorliegende besser erhaltene Schädel unserer Sammlung beweist, dass sie sich auf den weiten Abstand der vordersten Zähne von der Schnauzenspitze beschränkt; alle anderen Bildungsverhältnisse passen mehr zu denen meiner Gattung *Dasypus*. Dahin verweist die ungemeine Breite des Hinterhauptes, welche der des vorderen Theiles zwischen den Jochbogenstützen des Oberkiefers gleichkommt, während bei *Praopus* das Hinterhaupt sich merklich verschmälert und stets minder breit ist als die genannten Jochbogenansätze. Ein zweiter, sehr entscheidender Unterschied liegt in der weiten Verlängerung der Zahnreihe nach hinten, bis über die Ansatzstellen des Jochbogens hinaus, das Foramen infraorbitale in dieser Richtung überschreitend; während bei *Praopus* schon vor der besagten Ansatzstelle sie dicht hinten oder selbst unter dem Foramen infraorbitale enden. Dann drittens die grössere Verlängerung des knöchernen Gaumens nach hinten bei *Praopus*, wogegen diese Strecke bei *Dasypus* sehr kurz ist, welches Verhalten beide Typen auffallend von einander unterscheidet. Bei *Dasypus* ist das weite Vordringen der Gaumenbeine nach vorn bis zwischen die hinteren Zähne ein höchst bezeichnender Gruppencharakter, indem dieselben Beine bei *Praopus* schon vor, oder wenigstens neben den hintersten Zähnen aufhören, weil der knöcherne Gaumen hinter der Zahnreihe bei ihm sehr viel länger ist als bei *Dasypus*. Endlich die Form und Zahl der Zähne von neun oben und zehn unten, deren Typus bei *Eutatus* genau dem kräftigeren des Zahnbaues der Untergattungen des Cabassu *(Xenurus)* und Encubert *(Euphractus)* sich anschliesst, ihn noch etwas steigernd, aber nicht dem viel feineren des Cachicame *(Praopus)*.

Ebenso bestimmt wie der Schädel zeigt der Vorderfuss die nähere Verwandtschaft des *Eutatus* mit *Dasypus*. Ich habe in Reichert's und du Bois-Reymond's Archiv u. s. w. a. a. O. nachgewiesen, dass die Arten von *Praopus* nur vier Zehen von unter sich gleicher Anlage am

Vorderfuss besitzen, die *Dasypus* aber fünf von typisch ungleicher Beschaffenheit; nur einmal, bei *D. conurus*, geht die kleinste fünfte Zehe verloren. Es sind nämlich die beiden inneren Zehen des Vorderfusses zwar von normaler Länge, aber stets viel feiner und schlanker gebildet, als die drei äusseren, mehr oder weniger verkürzten und dennoch mit grösseren Krallen versehenen; besonders bei den drei Untergattungen *Priodontus (D. gigas), Xenurus (D. gymnurus)* und *Tolypeutes (D. conurus),* deren Kralle an der Mittelzehe sich zu einem enormen Umfange entwickelt, obgleich die basale Portion vor der Kralle ebenso auffallend verkürzt ist. *Eutatus* folgt im Bau des Vorderfusses den *Dasypus* mit mässiger Differenz der Innen- und Aussenzehen und steht in gewisser Beziehung als Mittelglied zwischen den beiden Modificationen der Grössen dieser Differenz; denn seine drei äusseren Zehen haben zwar die starke Vergrösserung des Krallengliedes, aber nicht die enorme Verkürzung und Verdickung der ihm vorhergehenden Knochenglieder. Sonach bildet *Eutatus* eine Zwischenform in der Reihe der Untergattungen von *Dasypus,* welche den Übergang der mit mässig vergrösserten und enorm entwickelten Krallen der drei Aussenzehen darstellt, und insofern ein grosses wissenschaftliches Interesse erlangt.

Zur Erläuterung dieser Angaben habe ich den rechten Vorderfuss von *Eutatus* im Zusammenhange seiner Knochen von oben (Fig. 3) wie von unten (Fig. 4), in halber natürlicher Grösse abgebildet, nachdem Gervais seine auseinander gefallenen Knochen einzeln dargestellt hatte. Ich beschreibe diese Knochen daher nur kurz, zumal weil alle Einzelnheiten des Baues fast genau mit denen der Vorderfussknochen der typischen *Dasypus*-Arten, besonders des *D. setosus* und *D. villosus* übereinstimmen.

Von oben betrachtet (Fig. 3) sieht man vor den Knochenwarzen des Panzers auf dem Fussrücken die beiden Reihen der Carpusknöchelchen. Links, d. h. an der Innenseite des Fusses, liegt das Kahnbein (naviculare s. scaphoides, ***a)***, durch einen eigenthümlichen, hohen, aber schmalen, kammförmigen Fortsatz, der in der Ansicht von unten (Fig. 4) noch deutlicher sich zeigt, besonders sich auszeichnend. Ihm folgt zur Seite das kräftige Mondbein (semilunare, ***b)***, welches auf der Unterseite mit einer dicken, viereckigen Wölbung (Fig. 4) hervortritt. Daran schliesst sich das weit nach aussen gezogene, sehr grosse Dreikantige Bein (pyramidale s. triquetrum, ***c)***, mit dem das ebenfalls beträchtliche Erbsenbein (pisiforme, ***d)*** innig am ganzen Hinterrande verbunden ist. Ein langer, hakenförmiger Fortsatz, der einem Sporn ähnelt, zeichnet es aus, sowohl bei *Eutatus* als auch bei den lebenden *Dasypus*-Arten; es gelenkt auch mittelst

einer kleinen Facette an die äussere gleichfalls stark vortretende Ecke der Ulna und vergrössert mit ihr die Sohle des Vorderfusses nach hinten. In Gervais' Darstellung fehlt dieses sonderbare Knöchelchen, gleichwie in meinen früheren Darstellungen des Vorderfusses der *Dasypus*-Arten im Archiv von 1871, weil es bei der Maceration leicht verloren geht.

Die vier Knöchelchen der zweiten Carpusreihe sind etwas kleiner, mit Ausnahme des letzten an der Aussenseite des Fusses. Zunächst nach innen befindet sich das grössere Winkelbein (multangulum majus, *e)*, mit dem das hier nicht geringere kleinere Winkelbein (multangulum minus, *f)* innig verbunden ist. An beide multangula gelenken die Metacarpusknochen der ersten und zweiten Zehe, nebst einem Theile der dritten; die Mitte eben dieses Metacarpusbeins wird vom sogenannten grossen Bein (magnum s. capitatum, *g)*, getragen, das bei allen *Dasypus* das kleinste unter den Carpusbeinchen ist. Neben ihm liegt nach aussen das sehr grosse, sonderbar winkelig geformte Hakenbein (hamatum s. unciforme, *h)*, woran ausser der vierten und fünften Zehe auch ein Theil des Metacarpus der dritten oder Mittelzehe gelenkt. Man sieht es deutlich in meinen beiden Figuren dargestellt mit *h* bezeichnet.

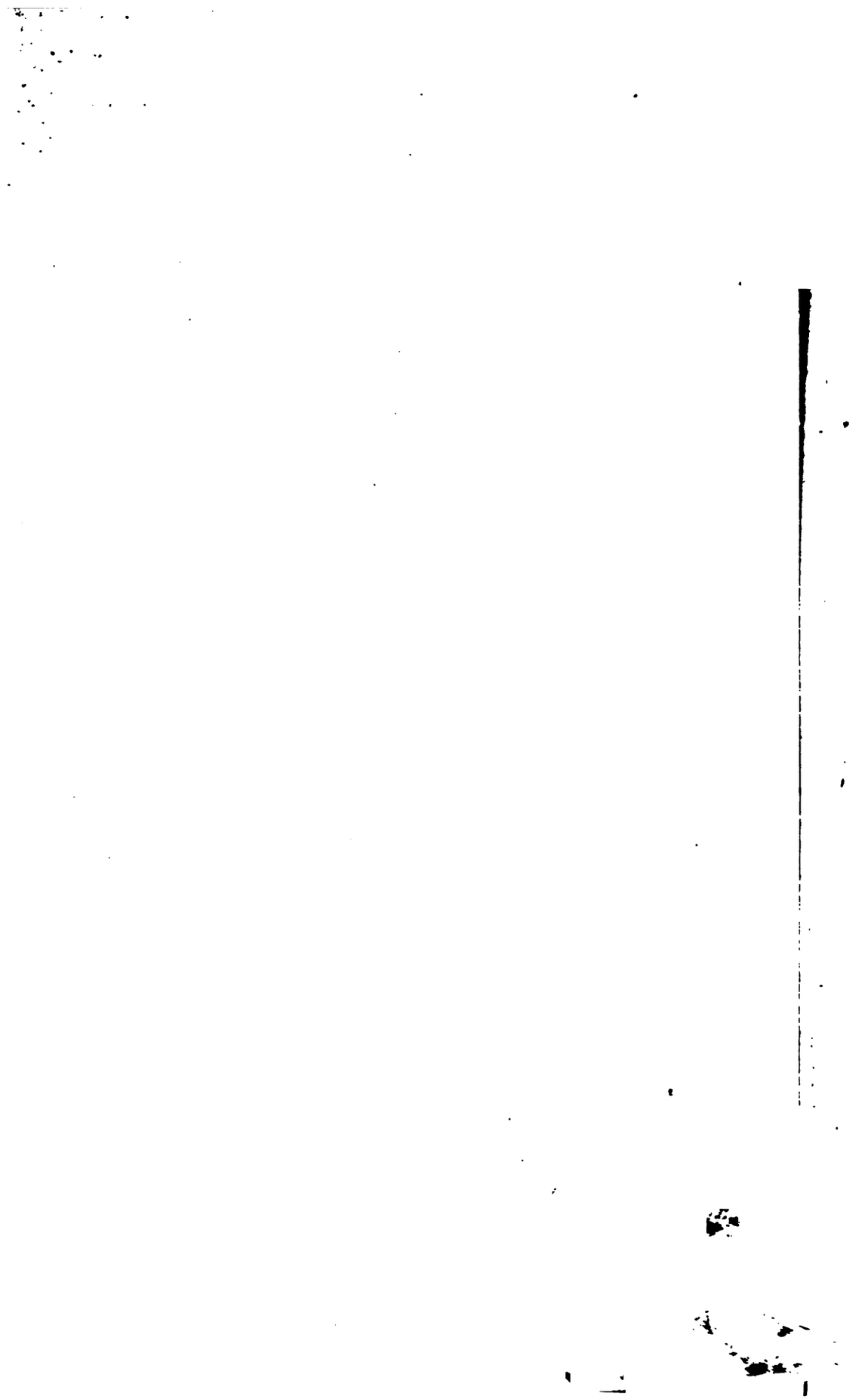
Der Unterschied in der Grösse der mit den lateinischen Nummern I—V bezeichneten Zehen betreffend, so ist die Differenz zwischen den beiden inneren und den drei äusseren bei *Eutatus* geringer, als bei allen lebenden *Dasypus*. Nur die dem Daumen des Menschen entsprechende erste Zehe (I) ist etwas dünner, als die übrigen: die zweite (II) dagegen fast ebenso stark wie die dritte und folgenden. Entschieden kleiner sind an beiden Zehen nur die Krallenglieder, besonders aber nur kürzer, nicht viel schmäler; beide stehen hinter der ihnen vorangehenden Phalange etwas an Länge zurück. Es ist höchst beachtenswerth, dass, wie es bereits Gervais angab, die zweite Zehe gleich der dritten und vierten, nur eine einzige Phalange vor dem Krallengliede besitzt, ganz normal wie die dem Daumen entsprechende erste Zehe. Bloss die fünfte, kürzeste Zehe hat zwischen dem Metacarpus und der Phalange vor dem Krallengliede ein sehr kleines, fast scheibenförmiges Knöchelchen, das sich als erste Phalange betrachten lässt. Ich habe dasselbe in meinen Zeichnungen mit V, 1 bezeichnet, den Metacarpusknochen mit V. *A* und die zweite Phalange mit V. 2. Gervais hat diese isolirte erste Phalange ebenso gefunden, sie scheint also beständig zu sein, denn auch die drei mir zur Hand befindlichen Vorderfüsse von *Eutatus* haben sie. Es ist aber sehr wohl möglich, dass in früher Jugend auch an der zweiten, dritten und vierten Zehe eine ähnliche kurze, selbständige erste Phalange, die später mit de

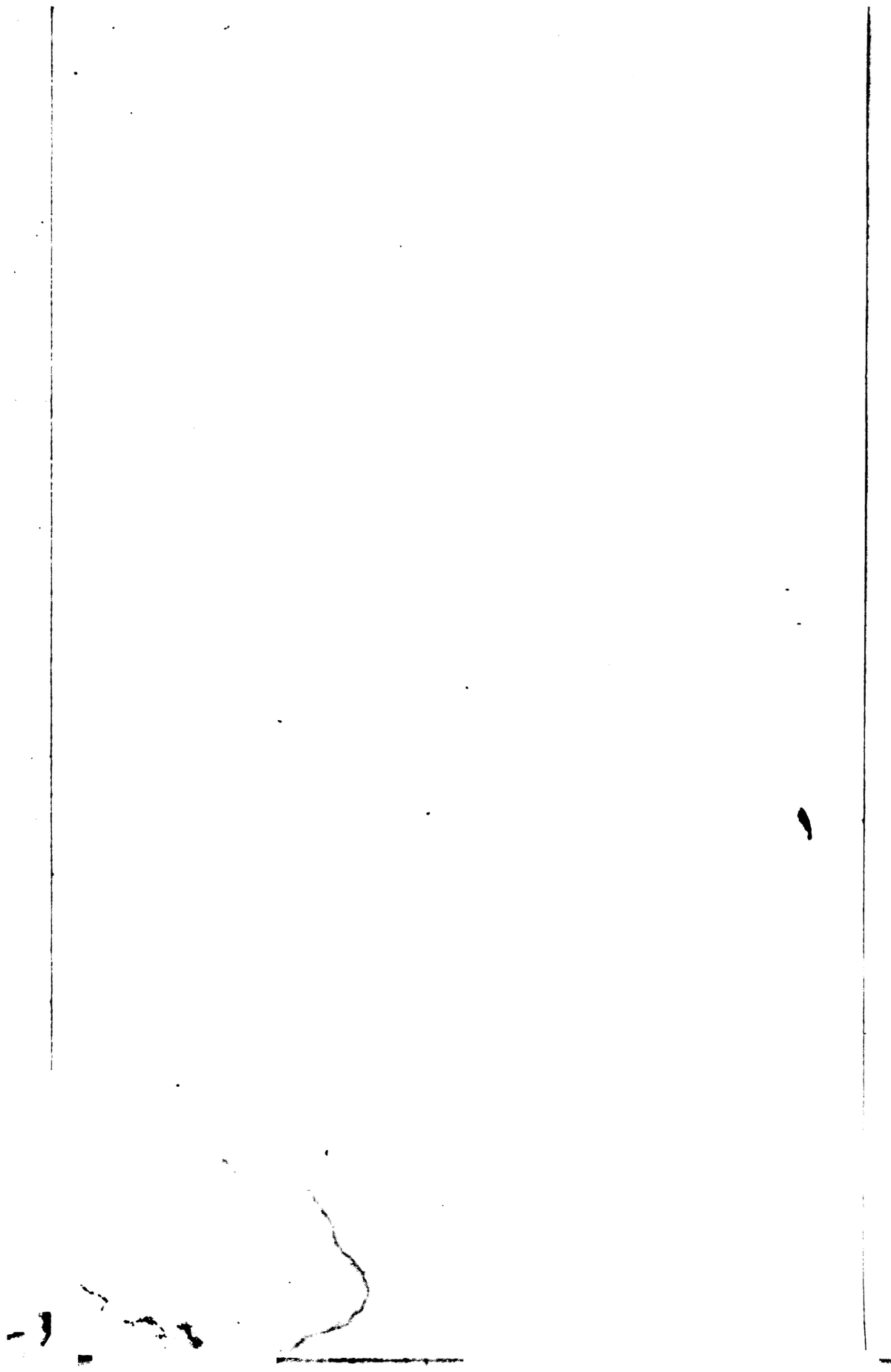
knochen mit der ersten Phalange reicht. Ich habe diesen Knochen von *Eutatus* in natürlicher Grösse, Fig. 5 von unten, Fig. 6 von oben, d. h. von der Seite der Fussknochen dargestellt; er ist 3.5^{cm} lang und 3^{cm} an der Basis breit. Diese Basis hat 8^{mm} Dicke, die abgestutzte Spitze nur 2^{mm}. Auf der freien Unterseite zeigt sich neben jeder Ecke eine scharfe Querkante von 1^{cm} Länge und längs der Mitte eine seichte Vertiefung; die entgegengesetzte obere Seite ist in der vorderen Hälfte ausgehöhlt, in der hinteren stark gewölbt und mit zwei grossen ovalen Buckeln versehen, von denen der nach aussen vor dem Kleinzehe befindliche mit starker Verlängerung über den Rand des Knochens hinausreicht. Dieser am stärksten gewölbte, einem elliptischen Polster ähnliche Buckel stützt sich auf die ebenso gewölbte, viereckige Unterseite des Mondbeins (*b*), die andere etwas kürzere Wölbung verbindet sich mit vier gleichen, aber kleineren Höckern an der Innenseite des Carpus, wovon zwei am Kahnbein, der dritte am grossen vieleckigen Bein und der vierte am Metacarpus der zweiten Zehe sich befindet. Man sieht diese vier Höcker in meiner Fig. 4 rechts ziemlich dicht neben einander. Der so gelagerte Sehnenknochen reicht dann mit seiner Spitze in die ebenda sichtbare Vertiefung vor dem Metacarpusknochen der Mittelzehe und füllt dieselbe mit seinem abgestutzten Ende gut aus. Von dem Rande dieses Endes gingen im Leben des Thieres drei Sehnen für die drei mittleren Zehen ab, welche über die kleinen Sesamknochen an der Basis der Phalangen bis zu den etwas grösseren vor der Basis der Krallenglieder reichten und mittelst derselben an die Basis selbst sich ansetzten. Ich habe dieselbe Beschaffenheit des grossen Zehenbeugers bei lebenden Tatus gefunden und darf sie darum wohl auch dem fossilen, in so vielen Punkten den lebenden ähnlichen Geschöpf zusprechen. In meinem Aufsatz im oft genannten Archiv ist Taf. XVIII die entsprechende Sehne von *D. conurus* und *Praopus longicaudus* abgebildet.

Hiermit glaube ich nicht nur den bisher unbekannten Panzer, sondern auch einige andere bemerkenswerthe Eigenschaften des Skelets von *Eutatus Seguini* zur Genüge geschildert zu haben.

Drei Druckfehler in meinem früheren Aufsatz über *Doedicurus* in den Abhandl. der Königl. Akadem. der Wissensch., phys. Classe, vom Jahre 1878 erlaube ich mir schliesslich noch zu verbessern.

Seite 7 Zeile 10 v. oben lies fest statt fast,
» 17 » 11 » » » musste statt müsste,
» 22 » 12 » unten » minder » wieder.





Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Ansicht des ganzen Panzers von der linken Seite; in $^1/_4$ der natürlichen Grösse.

A. Kopfschild. *B.* Rumpfpanzer. *C.* Schwanzrohr.

Fig. 2. Kreuzschild, von hinten gesehen; ebenso verkleinert.

Fig. 3. Rechter Vorderfuss, von oben gesehen; in $^1/_2$ der natürlichen Grösse.

I, II, III, IV, V. Die fünf Zehen, von innen nach aussen gezählt.

I, *A* und V, *A*. Die Metacarpusknochen der ersten und fünften Zehe.

1. 2. 3. Die drei Phalangen der fünften Zehe.

a—*h*. Die Carpusknöchelchen.

a. Scaphoides s. naviculare.
b. Semilunare.
c. Pyramidale s. triquetrum.
d. Pisiforme.
e. Multangulum majus.
f. Multangulum minus.
g. Capitatum s. magnum.
h. Hamatum s. uncinatum.

Fig. 4. Derselbe Vorderfuss, von unten gesehen; in gleicher Verkleinerung und mit gleicher Bezeichnung der Zahlen wie Buchstaben; dazu:

s. s. s. s. s. Sesambeinchen vor den Krallengliedern und anderswo.

x. Accessorisches Beinchen am Aussenrande des Fusses.

Fig. 5. Der grosse Sehnenknochen des Flexor digitorum longus, in natürlicher Grösse, von unten gesehen.

Fig. 6. Derselbe, ebenso von oben gesehen.

Fig. 7. Sechs Platten des Kopfschildes in natürlicher Grösse.

Fig. 8. Drei Platten der Gürtel des Rumpfpanzers, ebenso.

Fig. 9. Drei Platten des Kreuzschildes, ebenso.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften w
wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich
zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehend
des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug au
Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILU

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet de
Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissen
in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern
fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch d
Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen
und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in
heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wi
Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaf
Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen »
berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zu
zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu

---

*Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissensch
Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämli
die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,
» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,
» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres zugleich nach Fe
des Registers.*

*Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1882 nicht zugekommen sein sollten, werde
hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamation
Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1883 angebracht w*

*Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des Buchhändler
zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. sehe unten.*

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Go
in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAF

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 ℳ.

Gewandt von demselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNG

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 ℳ.

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungs
oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften v
der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in
Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten, zu
Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der
Buchhandlung in Verbindung setzen.

STK
Q3
M38

MATHEMATISCHE

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES

UND

MAY 2 1994

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT VII.

JULI 1883.

MIT TAFEL V.

BERLIN 1883.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN COMMISSION BEI FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ & GOSSMANN.

33. Zur Theorie der Blattstellungen.

Von S. Schwendener.

(Vorgelegt am 5. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXII]; — ausgegeben am 12. Juli.)

Hierzu Taf. V.

Seit dem Erscheinen meiner Abhandlung über die Blattstellungen[1] und der späteren hierauf bezüglichen Mittheilungen sind sowohl gegen einzelne Folgerungen und Deutungen, als auch gegen die Grundlagen der Theorie selbst Bedenken erhoben worden, welche mir Veranlassung geben, die streitigen Fragen hier nochmals zu beleuchten. Bei dieser Gelegenheit mag es zugleich gestattet sein, auf einzelne Punkte zurückzukommen, die zwar nicht bestritten, aber durch die Darstellungen neuerer Lehrbücher merklich verschoben worden sind. Ob solche Verschiebungen sich unter dem Einfluss der Spiraltheorie unbewusst eingeschlichen haben oder ob sie der Ausdruck einer selbständigen, durch eigenes Studium gewonnenen Anschauung sind, will ich hier nicht untersuchen; im einen wie im andern Falle scheint mir eine nochmalige Besprechung der Gegensätze gleich nothwendig zu sein. Auf einzelne widersprechende Angaben ohne Tragweite lege ich indessen kein Gewicht; ich greife bloss diejenigen Momente heraus, welche von principieller Bedeutung sind und darum der Klarlegung vorzugsweise bedürfen.

I.

Der gegenseitige Druck der Organe und die seitlichen Verschiebungen.

C. de Candolle macht mir in seinen »Considérations sur l'étude de la phyllotaxie«[2] (S. 27) den Vorwurf, ich habe für das Vorhandensein des gegenseitigen Druckes zwischen den seitlichen Organen keinen directen Beweis erbracht, obschon dieser angebliche Druck die Grundlage meiner ganzen Theorie bilde. Er selbst bestreitet sowohl das Vorhanden-

[1] Mechanische Theorie der Blattstellungen. Leipzig, 1878.

[2] Zuerst veröffentlicht in den Archives des Sciences phys. et nat., 1881, t. V, dann mit einigen Änderungen als besondere Schrift unter gleichem Titel herausgegeben. (Im Verlage von H. Georg, Genf, Basel, Lyon 1881.)

sein eines solchen Druckes wie die damit zusammenhängenden Divergenzänderungen, indem er S. 28 ausdrücklich erklärt: «nous ne voyons aucun indice de pressions ou de tractions résultant de l'accroissement lui-même, et capables de modifier les distances angulaires des insertions». Und auf S. 47 geht derselbe Autor bei seinen eigenen Untersuchungen von der Prämisse aus, dass die jungen Triebe sich strecken und verdicken, ohne dass hieraus ein mechanischer Druck oder Zug zwischen den verschiedenen Theilen entstehe und ohne dass die Winkelabstände zwischen den seitlichen Organen eine merkliche Änderung erfahren. DE CANDOLLE nimmt also in der That an, dass ein solcher Druck zwischen den jugendlichen Organen gar nicht vorhanden sei.

Hierauf habe ich zunächst zu erwidern, dass der gegenseitige Druck der Organe doch nur für denjenigen Theil meiner Blattstellungstheorie die Grundlage bildet, in welchem ausdrücklich von den Wirkungen desselben die Rede ist. Selbst die vorangestellten Verschiebungen kreisförmiger Organe, die ich allerdings als Druckwirkungen behandelt habe, sind im Grunde von der Annahme eines solchen mechanischen Momentes gänzlich unabhängig. Sie lassen sich ebenso leicht auf geometrischem Wege entwickeln, indem man die Kreise in der Richtung der Contactlinien sich einfach berühren lässt, ohne dabei an gegenseitigen Druck zu denken. Thatsächlich habe ich selbst die Maximal- und Minimaldivergenzen für die verschiedenen Reihen, desgleichen die Divergenzen für die rechtwinklige Kreuzung der Contactlinien, nach rein geometrischen Methoden berechnet, und seitdem hat ED. KERBER[1] für solche Berechnungen eine allgemeine Formel entwickelt, die von der Voraussetzung einer mechanischen Beeinflussung ebenfalls vollkommen unabhängig ist.

Die in den folgenden Abschnitten besprochenen Stellungsänderungen, z. B. diejenigen, welche durch allmäliges Kleinerwerden der Organe bedingt sind, gehören von vorne herein nicht zu den Wirkungen des Druckes; nur nehme ich allerdings auch hier an, dass neben den Ausschlag gebenden Grössenverhältnissen ein gewisser Druck gleichzeitig mitspiele und dass letzterer jene wunderbare Regelmässigkeit herbeiführe, durch welche die Köpfchen der Compositen und Aggregaten, die Zapfen der Coniferen etc. sich auszeichnen.

Die Sache selbst betreffend, so glaubte ich wirklich nicht, dass die Annahme eines gegenseitigen Druckes, zumal bei Organen, die ein interstitienloses System bilden, wie z. B. die Zapfenschuppen von *Pinus*, die Früchte von *Ananassa*, *Helianthus* u. dergl. noch einer ausführlichen Begründung bedürfe. Ein kurzer Hinweis auf die eigen-

[1] Diese Sitzungsberichte, Jahrg. 1882, S. 457.

thümlichen Wachsthumsverhältnisse der Organsysteme schien mir vollständig zu genügen, um die als bekannt angenommene Thatsache auch gegenüber strengeren Anforderungen sicher zu stellen.

In dieser Erwartung bin ich nun freilich getäuscht; die Annahme eines gegenseitigen Druckes wird als eine blosse Hypothese bezeichnet. Es wird mir indessen nicht schwer fallen, den vermissten Beweis für die Richtigkeit meiner Prämisse nachträglich beizubringen. Zunächst sei daran erinnert, dass die Fruchtschuppen einjähriger Zapfen von *Pinus Pinaster* unregelmässige Rhomben bilden (Taf. V Fig. 3), deren Ecken gewöhnlich so orientirt sind, dass die beiden schärfern ungefähr der Querrichtung entsprechen. In diesem Stadium berühren sich die Fruchtschuppen des mittleren Theils in der Richtung der 5er, 8er und 13er Zeilen. Am ausgewachsenen Zapfen dagegen (Fig. 4) ist der Contact auf den 13er Zeilen unterbrochen und dafür derjenige der Dreierzeilen hergestellt. In diesen letzteren Zeilen stossen jetzt die oben erwähnten scharfen Ecken der Rhomben auf einander und erscheinen in Folge dessen mehr oder weniger abgestumpft; wo vorher eine scharfe Kante war, befindet sich also später eine Fläche. Soll nun eine solche Abstumpfung, die immer erst dann beginnt, wenn der entsprechende Contact eingetreten und stets mit allseitiger interstitienloser Berührung der Schuppen verbunden ist, etwa bloss auf einen idealen Bauplan hinweisen, in welchem solche Veränderungen schon vorgezeichnet sind? Ich meinerseits sehe darin die unzweideutigen Wirkungen des Druckes.

Zu derselben Auffassung drängen auch verschiedene andere Thatsachen. Erstlich die Neigung der Staubgefässe an den Kätzchen von *Abies, Pinus* etc. Dieselben stehen nur in der Mitte rechtwinklig zur Längsaxe; nach der Spitze zu erscheinen sie mehr und mehr aufgerichtet, zunächst der Basis dagegen zurückgeschlagen. Im jugendlichen Zustande ist dieses Verhalten der Organe nicht einmal angedeutet, es kommt erst im Verlaufe der Entwickelung zu Stande. Ähnlich bei einjährigen Pinuszapfen. Folglich ist in solchen Fällen das Längenwachsthum an der Peripherie des Complexes stärker als in der Axe, womit natürlich auch der gegenseitige Druck und als Wirkung desselben der gewölbeähnliche Bau des ganzen Systems gegeben ist.

Zweitens die Wahrnehmung, dass Lücken, welche durch Verletzung oder Verkümmerung einzelner Organe in einem geschlossenen System entstehen, während des Wachsthums kleiner werden und sich endlich ganz oder theilweise schliessen; dass Organsysteme mit einseitig vorwiegender Entwickelung, wie sie namentlich die Fruchtstände der Magnolien hin und wieder darbieten, sich krümmen und zwar immer convex nach derjenigen Seite hin, auf welcher sich die seit-

lichen Glieder in gedrängterer Stellung befinden; dass überhaupt zwischen dem Complex der seitlichen Organe und dem zugehörigen Stamm häufig eine nachweisbare Gewebespannung besteht, wobei der erstere gedrückt, der letztere dagegen gedehnt wird.

Drittens die Erwägung, dass jene augenfälligen Drehungen des Stammes, welche stets in dem Sinne stattfinden, wie es die Veränderung des Winkels zwischen den Contactlinien nach mechanischen Principien mit sich bringt, ohne die Voraussetzung eines zur Wirkung gekommenen Widerstandes gegen Druck in der Richtung jener Contactlinien absolut unerklärt bleiben. Ich denke hierbei namentlich an die bekannten Torsionen bei *Pandanus* und *Cyperus*, sowie an die kleineren, welche die Fruchtstände von *Zinnia elegans* und andere von ähnlichem Bau erfahren.

Was sodann die seitlichen Verschiebungen betrifft, welche nach meiner Darlegung mit den Druckwirkungen verbunden sind, so kann ein Zweifel hierüber eigentlich gar nicht aufkommen, sobald man sich die Organe als Körper und nicht als mathematische Punkte vorstellt. Denn es ist doch klar, dass die Contactzeilen dieser körperlich gedachten Organe eine Art Dachstuhl bilden, dessen Sparrenlängen entweder direct durch die Coordinationszahlen gegeben oder doch irgendwie davon abhängig sind. Dann muss aber auch jede Winkeländerung der Sparren im Allgemeinen eine kleine seitliche Verschiebung des Scheitels bewirken, welche nur unter ganz bestimmten Bedingungen Null werden kann. Ebenso ist es ganz unmöglich, dass der Übergang zu höheren Coordinationszahlen ohne Verschiebung stattfinde. Wir wissen ja, dass der Scheitel des Dachstuhls für unendlich hohe Ziffern der gegebenen Reihe stets die Lage einnimmt, welche dem irrationalen Grenzwerth entspricht, während er bei niedrig bezifferten Contactzeilen, z. B. bei Einern und Zweiern, mehr oder weniger nach rechts oder nach links davon abweicht. Daher die bekannten Annäherungen an $^2/_5$, $^3/_8$ . . . $^2/_7$, $^3/_{11}$ u. s. w. Ein Übergang von einem Zustand zum andern ist folglich ohne Divergenzänderungen gar nicht denkbar.

Übrigens lässt sich die Verschiedenheit zwischen der Divergenz im Knospenzustande und derjenigen des letzten Contactstadiums durch directe Messung constatiren. Ich habe hierfür bereits in meinen »Blattstellungen« verschiedene Beispiele geliefert und füge hier noch zwei weitere bei.

1. Laubtriebe von *Abies Nordmanniana*. Divergenz in der Knospe annähernd $^{13}/_{34}$, die 34er Zeilen jedoch um eine Spur gedreht, die 13er etwa 35° gegen die Längsrichtung geneigt. Divergenz am Zweig $^5/_{13}$, die 13er Zeilen anscheinend genau longitudinal.

2. Laubtriebe von *Abies cephalonica*. In der Terminalknospe verlaufen die 55er Zeilen, am Zweige dagegen die 21er am genauesten longitudinal.

Um dergleichen Thatsachen zu erklären, kann man freilich auch zu der Annahme seine Zuflucht nehmen, dass der Stamm selbst sich activ gedreht und die seitlichen Organe mitgezogen habe. Allein abgesehen davon, dass ein solches Drehungsbestreben der Axen für geschlossene und normale Organsysteme nicht constatirt ist, müsste es im Fall des Vorhandenseins sich unabhängig von den Verschiebungsgesetzen äussern. Das hat aber bis jetzt Niemand beobachtet. Überdies wäre eine solche Torsion gar nicht denkbar, ohne dass die Organe derjenigen Contactzeilen, welche zur Torsionsrichtung antidrom sind, gegeneinander gedrückt würden. Ein solcher Druck soll aber nach C. DE CANDOLLE niemals vorhanden sein.

Man ersieht hieraus, dass es nicht möglich ist, den Thatsachen gerecht zu werden, wenn man den gegenseitigen Druck der Organe in Abrede stellt.

II.

Die Bedeutung der SCHIMPER-BRAUN'schen Divergenzenreihen.

Für die SCHIMPER-BRAUN'sche Spiraltheorie bilden bekanntlich die Divergenzen der Hauptkette $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_5$, $^3/_8$ u. s. w. wie diejenigen der übrigen Reihen die angeblich durch Beobachtung gewonnene Grundlage der Darstellung, während schon die Gebrüder BRAVAIS in den genannten Zahlen nur die successiven Näherungswerthe eines Kettenbruches erblickten, denen jedoch die bemerkenswerthe Eigenschaft zukommt, nach demselben Grenzwerthe zu convergiren, dem sich auch die entsprechenden Blattdivergenzen bei gedrängter Stellung der Organe mehr und mehr nähern. Es kann heute keinem Zweifel unterliegen, dass diese letztere Ansicht die richtige ist. Was wir sicher beobachten können, das sind in der That bloss die Coordinationszahlen der Schrägzeilen, während die Entscheidung darüber, ob irgend welche derselben an einem gegebenen Object Orthostichen geworden sind, in den meisten Fällen der nöthigen Sicherheit durchaus entbehrt; am häufigsten verläuft wohl kein System genau longitudinal.

Aber trotz dieser Sachlage bieten die genannten Näherungswerthe doch immerhin ein bequemes Mittel, die beobachteten Divergenzen wenigstens annähernd richtig zu bezeichnen. Darum habe ich selbst keinen Anstoss daran genommen, mich dieser Bezeichnungsweise gelegentlich zu bedienen, ohne jedesmal den principiellen Gegensatz zu

betonen, welcher zwischen der SCHIMPER-BRAUN'schen Auffassung und der meinigen besteht. Aber vielleicht habe ich dadurch manche Unklarheiten, die mir in den Darstellungen anderer Autoren begegnet sind, mitverschuldet. In diesem Falle hoffe ich wenigstens durch die folgenden Zeilen den begangenen Fehler wieder gut zu machen.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal die Divergenzen, welche starre kreisförmige Organe durchlaufen, wenn der relative Durchmesser derselben — wie er durch das Verhältniss zum Stammumfang gegeben ist — durch das vorwiegende Dickenwachsthum des Systems sich allmälig verkleinert. Die einzelnen Organe beschreiben alsdann die bekannte Zickzacklinie, für welche in meinen »Blattstellungen« die Maxima und Minima genau berechnet sind. Der wirkliche Verlauf dieser Bewegung im Raume, bezogen auf einen unbeweglichen Basalpunkt des Systems, kann an der Pflanze selbst natürlich nie nach dieser Basis hin, sondern immer nur scheitelwärts gerichtet sein, da es keine Organcomplexe giebt, wo die absoluten Längenabstände während der Entwickelung kleiner würden. Sobald man dagegen diesen Verschiebungsprozess mittelst Kugeln oder Cylindern von gegebener Grösse veranschaulicht, dann ist nothwendig mit jeder Vergrösserung des Umfanges ein Sinken der einzelnen Organe, d. h. eine Annäherung an die Basallinie des Systems verbunden. Für die graphische Darstellung ist es selbstredend gleichgültig, welche von diesen Bewegungen vorausgesetzt wird; es kommt bloss darauf an, die successiven Divergenzen mit gleichsinnig fortschreitenden Niveauveränderungen zu combiniren, da ohne diese letzteren eine sofort verständliche Veranschaulichung der oscillirenden Bewegung nicht möglich ist.

In unserer Construction (Fig. 1) ist der Ausgangspunkt der Verschiebung links oben und die Ausgangsdivergenz zu 180° angenommen, doch reichen die Curven wegen Mangel an Raum nur bis 154°. Die Coordinationszahlen der Contactlinien seien 1, 2, 3, 5, 8 .... Die Bewegung geht dann zunächst nach rechts bis zu derjenigen Verticalen, welche einer Divergenz von 128° 34′ entspricht. Hier findet ein Wechsel der Contactlinien statt, indem die Einerzeile ausscheidet und die Dreierzeilen hinzutreten. Nun rücken die Organe wieder nach links, bis die Divergenz von 142° 6′ erreicht ist, dann nach stattgefundenem zweiten Wechsel abermals nach rechts, u. s. w. In Wirklichkeit gehen diese Verschiebungen, die ein und dasselbe Organ im Verlaufe des Wachsthums erfährt, nicht leicht über einen oder zwei Wechsel hinaus; um jedoch den Vorgang vollständig zu überblicken, war es nothwendig, denselben bis zu den letzten Consequenzen zu verfolgen. Es ergab sich dabei, dass die Schwingungen nach rechts und nach links allmälig kleiner und zuletzt Null werden; die Diver-

genz, welche diesem Endstadium entspricht, ist bekanntlich = 137° 30′ 28″.

Dieser nämliche Werth, als Bruchtheil des Umfanges ausgedrückt, lässt sich nun auch durch den bekannten Kettenbruch darstellen, dessen successive Näherungswerthe die BRAUN'sche Divergenzenreihe $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_5$, $^3/_8$ .... bilden. Es ist also richtig, dass die wirklichen Divergenzen, welche die Organe während ihrer Bewegung durchlaufen, nach demselben Endwerth convergiren, wie die genannten Näherungswerthe. Damit ist aber auch die ganze Bedeutung dieser letztern mit Bezug auf die Blattstellungen vollständig erschöpft. Denn die Eigenschaft, dass der einzelne Näherungsbruch dem Endwerth der ganzen Reihe näher kommt als jeder andere aus kleineren Zahlen gebildete Bruch, ist rein mathematischer Natur und es geht daraus bloss hervor, dass die wirklichen Blattdivergenzen mittelst jener Brüche annähernd genau bezeichnet werden können. Die Vorstellung dagegen, als ob die Reihe $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_5$ u. s. w. eine morphologisch bedeutsame Scala bilde, nach der sich die Divergenzen vorzugsweise richten müssten, ist durchaus unhaltbar.

Es unterliegt keiner Schwierigkeit, die Richtigkeit des vorstehenden Satzes an der Hand unserer Figur im Einzelnen darzulegen. Während der Verschiebung von 180° bis zum ersten Wechsel werden natürlich alle Zwischenwerthe allmälig durchlaufen, also auch die Werthe $^2/_5$, $^3/_8$, $^5/_{13}$ u. s. w. Diese letztern Werthe haben jedoch keine irgend wie ausgezeichnete Bedeutung; es sind blosse Uebergangswerthe wie alle andern, herausgegriffen unter unendlich vielen. Dieser erste Verschiebungsbogen, der von 180° bis 128° 34′ (nicht bis $^1/_3$ = 120°) reicht, ist überdies der einzige, auf welchem beispielsweise eine Divergenz von $^2/_5$ des Kreisumfanges vorkommen kann; auf jedem folgenden Bogen ist eine solche unmöglich. In der Natur kann jedes Stück dieses Verschiebungsbogens daran erkannt werden, dass Grundspirale und Zweierzeilen die wirksamen Contactlinien bilden, bezw. vor der Aufhebung des Contactes gebildet haben. Sobald statt diesen andere Contactlinien zur Wirkung kommen, etwa 2er und 3er oder 3er und 5er, so erreicht das mögliche Maximum bloss 142° 6′, nicht $^2/_5$ = 144°. Ebenso sinkt das Minimum der Divergenz, wenn die 3er und 5er oder die 5er und 8er Zeilen spielen, auf 135° 55′, aber nicht auf $^3/_8$ = 135°. Die Ecken unserer Zickzacklinie liegen überhaupt stets innerhalb des Spielraums, welcher durch die Reihe der Näherungsbrüche bezeichnet wird. Trägt man also die letztern, wie es in unserer Figur geschehen, neben die nächstliegenden Grenzwerthe der Verschiebungscurve ein und verbindet sowohl die rechts wie die links liegenden Punkte je durch eine Bogenlinie, so verlaufen diese Linien

(in der Figur durch »Näherungsbrüche« bezeichnet) durchgehends ausserhalb derjenigen, welche über die Ecken der Zickzacklinie gezogen sind. Es ist somit klar, dass den Näherungsbrüchen eine tiefere Bedeutung im Wechsel der Divergenzen nicht zukommt

Die Beweiskraft dieser Darlegung ist übrigens keineswegs von der Voraussetzung abhängig, dass die Stellungsänderungen durch den gegenseitigen Druck bedingt seien. Man kann sie ebenso gut durch das allmälige Kleinerwerden der Organe, ohne alle Druckwirkungen, eintreten lassen; nur ist es in diesem Falle nicht mehr ein und dasselbe Organ, welches alle möglichen Divergenzen durchläuft, sondern es sind die über einander liegenden Querzonen des Systems, welche die successiven Divergenzen unserer Zickzacklinie zur Anschauung bringen. In der graphischen Darstellung wird aber dadurch nichts geändert.

Erwägen wir jetzt weiter, dass die Gesetze, welche die Stellungsänderungen kreisförmiger Organe beherrschen, auch für alle übrigen Querschnittsformen Geltung haben, sofern dieselben symmetrisch und mit ihren grossen oder kleinen Axen longitudinal gestellt sind,[1] so leuchtet ein, dass die mannigfachen Formverschiedenheiten der Organe im Grossen und Ganzen keine Handhabe zur Abschwächung der oben aufgestellten Beziehungen bieten können. Nur die schief gestellten und unsymmetrischen Organe verlangen allerdings ein besonderes Studium, und es mag z. B. daran erinnert werden, dass $^1/_3$ Divergenz mit schief gestellten Ellipsen möglich, mit quer gestellten aber unmöglich ist.

Andererseits ist wohl zu beachten, dass die Verschiebungscurve unserer Figur sich auf Organsysteme bezieht, bei welchen der Contact dauernd nur in zwei Richtungen stattfindet; es ist mit anderen Worten ein Dachstuhl mit zwei Sparren vorausgesetzt. Sobald eine dritte Contactzeile hinzukommt, wie z. B. bei den Zapfen von *Pinus*, werden die Oscillationsweiten der Curve, wie ich früher gezeigt habe, erheblich kleiner, meist so klein, dass ihre Bestimmung durch directe Messung unmöglich wird. Folglich müssen in diesem Falle die Maximal- und Minimaldivergenzen nahezu übereinstimmen und somit in der Construction nach derselben Seite hin von der dem Grenzwerth entsprechenden Verticalen abweichen. Fallen sie auf die rechte Seite derselben, so ist die zu beobachtende Divergenz stets kleiner, als jener Grenzwerth, also z. B. annähernd $135-137°$; fallen sie links, so ist dieselbe durchgehends grösser, als etwa $138-142°$. Doch findet natürlich in beiden Fällen mit dem Vorrücken der Contactzeilen eine

[1] Man vergleiche meine »Blattstellungen« S. 33.

immer weiter gehende Annäherung an den Grenzwerth und zuletzt ein Zusammenfallen mit diesem statt. Von einem Hin- und Herspringen zwischen den Divergenzen $^2/_5$, $^3/_8$, $^5/_{13}$ ... kann jedoch unter solchen Voraussetzungen am allerwenigsten die Rede sein.

Sehr instructive Beispiele für das eben Gesagte liefern die Terminalknospen unserer Coniferen (*Picea excelsa, Pinus sylvestris* u. s. w.). Vermöge der sehr gedrängten Stellung zeigen hier die Blattanlagen eine mittlere Divergenz, die nur um circa 3—9 Minuten von dem Grenzwerth abweicht. Am einjährigen Trieb dagegen beträgt diese Abweichung circa 22—58 Minuten, ohne jedoch in den Zwischenstadien jemals einen erheblich höheren Werth zu erreichen oder nach der entgegengesetzten Seite hin umzuschlagen.

Was ferner die bemerkenswerthen Beziehungen anbelangt, welche bei rechtwinkliger Kreuzung der Contactlinien zwischen den Brüchen der Hauptkette und den wirklichen Divergenzen bestehen,[1] so können dieselben in unserer Frage keinen Ausschlag geben; sie rühren bloss von Zahlenverhältnissen her, denen eine morphologische Bedeutung nicht beizumessen ist. In der Formel für die Berechnung der Divergenzen findet sich nämlich der Ausdruck $m^2 + n^2$, wobei m und n zwei successive Coordinationszahlen der Contactzeilen bedeuten. Es ist nun eine Eigenthümlichkeit der Reihe 1, 2, 3, 5, 8 ...., dass die Summe der Quadrate je zweier Glieder gleich ist einem folgenden Gliede; also $2^2 + 3^2 = 13$, $3^2 + 5^2 = 34$, $5^2 + 8^2 = 89$, u. s. w. Diese zufällige Beziehung besteht für die übrigen Reihen nicht; hier ergiebt die rechtwinklige Kreuzung der Zeilen daher auch keine Divergenzen, welche durch einen Näherungsbruch bezeichnet werden könnten. Es handelt sich also wirklich nur um eine arithmetische Besonderheit der Hauptreihe.

Es erübrigt jetzt noch den Einwand zu berücksichtigen, warum denn die Divergenzen $^1/_3$, $^2/_5$, $^3/_8$, die nach meiner Darlegung nur unter bestimmten einschränkenden Bedingungen möglich sind, in der Natur so häufig vorkommen. Hierauf ist zunächst zu erwiedern, dass Blattstellungen, welche mit ausgeprägter Kantenbildung am Stengel verknüpft sind (*Cyperaceen*, drei- oder mehrkantige *Cacteen* u. dergl. m.), einen besonderen Fall bilden, in welchem die Kantenbildung selbst einen unverkennbaren Einfluss übt. Wir beobachten z. B., dass die Divergenzen innerhalb derselben Pflanzenfamilie sofort andere werden, sobald die Blattbasen nicht durch vorspringende Rippen verbunden sind. So z. B. bei *Mamillaria* im Gegensatz zu *Cereus, Echinocactus* u. s. w. Es wäre zu untersuchen, ob vielleicht solche Rippen ursprünglich

[1] Vergl. meine »Blattstellungen« S. 18.

schief verlaufen und sich erst nachträglich aus mechanischen Gründen longitudinal stellen. Ähnliche Umstände können auch innerhalb der Blüthe zur Geltung kommen, sobald der Blüthenboden mehr oder weniger sternförmige Gestalt annimmt.

Bezüglich der Stellungen $^2/_5$ und $^3/_8$, welche ohne Kantenbildung zu Stande kommen, darf nicht übersehen werden, dass sich die aufgeführten Beispiele grösstentheils auf Laubsprosse beziehen, an denen voraussichtlich die Grundspirale und die Zweierzeilen die vor der Streckung wirksam gewesenen Contactlinien darstellen. Unter dieser Voraussetzung fallen beide Stellungen in den obersten Verschiebungsbogen unserer Zickzacklinie und sind daher theoretisch möglich. Dass aber die gegebenen Divergenzen wirklich genau $^2/_5$ oder $^3/_8$ betragen, lässt sich in den wenigsten Fällen beweisen. Streng genommen kann nur von einer Annäherung an diese einfachen Brüche durch nachträgliche Drehung die Rede sein; eine solche findet allerdings unzweifelhaft statt, da die Endknospe bekanntlich stets höhere Divergenzen aufweist; mir ist aber nicht bekannt, in welches Stadium der Entwickelung sie fällt. Es wäre ja denkbar, dass dergleichen Drehungen erst ziemlich spät durch die widerstandsfähigen Elemente der Blattspuren und der begleitenden Collenchymstränge bewirkt würden, indem die in der Längsrichtung zusammenhängenden Strangsympodien sich in Folge der Zugspannung, der sie jedenfalls ausgesetzt sind, möglichst longitudinal stellten, in ähnlicher Weise also, wie ich es oben für die vorspringenden Rippen angedeutet habe.

Alle diese Fragen sind offenbar zur Zeit keineswegs abgeschlossen; sie bedürfen durchaus einer näheren Untersuchung, welche die begleitenden Umstände während der in Rede stehenden Stellungsänderungen zu ermitteln haben wird. Soviel ist aber doch schon auf Grund der gegenwärtigen Kenntnisse einleuchtend, dass wir nicht nöthig haben, auf diesem Gebiete zu einer unfruchtbaren Zahlenmystik unsere Zuflucht zu nehmen.

III.

Warum gewisse Divergenzen am häufigsten vorkommen.

C. de Candolle erhebt in seiner wiederholt citirten Schrift gegen meine Theorie der Blattstellungen den weiteren Einwand, dass sie das Vorherrschen bestimmter Divergenzen in der Natur — es sind hier vor allem diejenigen der Schimper'schen Reihen gemeint — unerklärt lasse. Er sagt in der Anmerkung zu S. 49 wörtlich: L'auteur de cette théorie montre bien comment ces modifications dans l'arran-

gement primitif peuvent amener des transitions d'un angle de divergence à un autre; mais il n'explique pas pourquoi certaines divergences sont plus fréquentes que les autres.

Soweit sich diese Bemerkung auf die angenommene morphologische Bedeutung der Näherungsbrüche im Gegensatz zu andern zwischenliegenden Werthen bezieht, ist dieselbe bereits im Vorhergehenden hinlänglich beleuchtet. Hier soll bloss die andere Seite der Frage in Betracht gezogen werden: warum nämlich die Coordinationszahlen 1, 2, 3, 5, 8.... und etwa noch diejenigen der nächstliegenden Reihen 1, 3, 4, 7.... und 1, 4, 5, 9.... neben den Wirtelstellungen am häufigsten vorkommen.

Ich habe diese Frage in meiner Arbeit allerdings nicht besonders erörtert; doch geht aus der ganzen Darstellung zur Genüge hervor, dass für das Zustandekommen einer bestimmten Stellung nicht bloss die relative Grösse der Organe, sondern jeweilen auch die Basis maassgebend ist, auf welcher das System sich aufbaut. Diese Basis ist in jedem concreten Falle gegeben. Sie besteht z. B. bei den primären Axen der Dicotylen aus zwei opponirten Cotyledonen, bei den Axillarsprossen in der Regel aus zwei rechts und links stehenden Blättern nebst Tragblatt und Hauptstamm, und ähnlichen Verhältnissen begegnen wir auch bei den Monocotylen und Gymnospermen, überhaupt bei den sämmtlichen beblätterten Stammorganen. Wenn also nun im Anschluss an das vorhandene Fundament die folgenden Organe allmälig kleiner werden und dadurch die bekannten Stellungsänderungen herbeiführen, so bildet selbstverständlich die gegebene Basalstellung das Anfangsglied der Reihe, in welcher die Änderungen verlaufen, und es ist einleuchtend, dass dasselbe den Charakter der Reihe mitbestimmt. Auf diesen Zusammenhang habe ich schon in einer früheren Veröffentlichung[1] hingewiesen, indem ich sagte: »diese Verkettung der Wachsthumsvorgänge erstreckt sich von den Cotyledonen bis zum letzten Carpell, mit dem der Spross seine Entwickelung abschliesst.« Erst wenn die Reihe der Coordinationszahlen und damit der Rahmen für die Stellungsänderungen gegeben ist, lässt sich für bekannte Querschnittsformen aus der relativen Grösse der Organe berechnen, welche Glieder der Reihe die Contactlinien bezeichnen und unter welchem Winkel sich diese letzteren kreuzen. Sind z. B. die Organe kreisförmig und ist das Verhältniss zum Umfang des Systems = 1 : 20, so ergeben sich als Contactlinien

---

[1] Über die Stellungsänderungen seitlicher Organe in Folge der allmäligen Abnahme ihrer Querschnittsgrösse. Verhandl. d. Naturf. Ges. in Basel. Jahrg. 1875. S. 308.

a) für die Reihe 1, 2, 3, 5... die 13er und 21er mit einem Kreuzungswinkel von $67° 22'$;

b) für die Reihe 1, 3, 4, 7... die 11er und 18er mit einem Kreuzungswinkel von $83° 29'$,

und die Divergenz auf der Grundspirale beträgt im ersten Falle annähernd $137° 22'$, im letzteren dagegen $99° 32'$. In analoger Weise lässt sich die Rechnung für jede beliebige Reihe ausführen. Daraus geht aber klar hervor, dass das relative Grössenverhältniss für sich allein nicht den Ausschlag giebt.

Zum Überfluss sei hier noch auf die Anschlussverhältnisse an einem Monocotylenspross (Fig. 2) hingewiesen. Als gegebene Basis figurirt die alternirend zweizeilige Stellung des Cotyledo (*o*) und der nächstfolgenden Blätter (1, 2, 3). Mit Nummer 4 beginnt in unserer Figur die Stellungsänderung durch Kleinerwerden der Organe. Dabei ist es eine willkürliche Annahme, dass 4 rechts von 3 (statt links) zu liegen komme, und mit dieser Annahme hängt die Linksläufigkeit der nun folgenden Grundspirale zusammen. Alles Übrige dagegen ist mechanisch nothwendig. Man sieht, wie die Organe 4 bis 8 sich auf der Einer- und Zweierzeile berühren, wie dann von 10 an der Contact auf der ersteren unterbrochen und zum Ersatz auf den Dreierzeilen hergestellt ist. Weiterhin, oberhalb 19, hört die gegenseitige Berührung auf den Zweierzeilen auf, ist dagegen auf den Fünfern bereits eingetreten. Ganz oben stellen 5er und 8er die Contactlinien dar.

Die Übergänge von einer Stellung zur andern können natürlich nach dieser Methode, sofern man nicht über einen beliebig grossen Raum verfügt, niemals mit derselben Vollständigkeit wiedergegeben werden, wie bei der langsamen Verschiebung constanter Organe durch longitudinalen Druck. Aber abgesehen davon sind die Stellungsänderungen genau dieselben. In unserer Figur betragen z. B. die Divergenzen von 0 bis 3 = 108°, von 4 bis 7 bei nahezu rechtwinkliger Kreuzung der 1er und 2er durchschnittlich circa 140°, von 8 bis 11 circa 137°, von 12 bis 17, stellenweise mit Contact auf den 2er, 3er und 5er-Zeilen, circa $142 - 143°$, von 22 bis 30, mit Contact auf den 3er, 5er und 8er-Zeilen annähernd $136° 15'$, weiter oben circa $137° 20'$. Die allmälige Grössenabnahme der Organe führt uns also mit mechanischer Nothwendigkeit von der gegebenen Basis des Systems zur Reihe 1, 2, 3, 5, 8.... und den dadurch vorgezeichneten Divergenzen. Da nun dieselbe Basis bei den jetzt lebenden Gewächsen, zumal bei Monocotylen, häufig vorkommt, so kann es nicht Wunder nehmen, dass auch die davon abhängigen Divergenzen zu den gewöhnlichsten gehören.

Mit gleicher Nothwendigkeit, wie die alternirend-zweizeilige Stellung führt zweitens auch die decussirte Blattstellung, wie sie durch die beiden Cotyledonen dicotyler Keimpflanzen eingeleitet wird, unter gewissen Bedingungen zu der eben erwähnten Spiralstellung. Diese Bedingungen lassen sich allerdings nur beim Kleinerwerden der Organe, bei der Verschiebung gleich grosser durch den gegenseitigen Druck dagegen nicht verwirklichen. Im letzteren Falle gehen die gekreuzten Blattpaare stets in gedrehte über, d. h. in das système bijugué nach BRAVAIS, und dieser nämliche Übergang kann auch durch gleichmässige Grössenabnahme zu Stande kommen, wofür ja die Köpfe von *Dipsacus, Scabiosa* u. s. w. bekannte Beispiele liefern.[1] Sobald jedoch das eine Glied eines Blattpaares erheblich kleiner ausfällt, als das andere, so ist damit die regelrechte Decussation gestört; denn das kleinere Blatt steht alsdann um weniger als 180° vom grösseren ab und leitet dadurch die Spiralstellung ein. Dieselbe Wirkung haben auch Ungleichmässigkeiten anderer Art, wie z. B. eine schwache Convergenz der Cotyledonen nach der einen Seite des Stammes, ungenaue Kreuzung des anschliessenden Blattpaares u. dergl.

Beispiele für diese verschiedenartigen Bedingungen liefern die Laubstämme von *Helianthus multiflorus, Antirrhinum majus,* die Hochblattregion bei *Silphium perfoliatum* und *Zinnia elegans,* Keimpflanzen von *Helianthus annuus, Chrysanthemum carinatum, Solanum laciniatum* u. s. w. In all' diesen Fällen ist es wieder die Hauptreihe 1 , 2 , 3 , 5 . . . , welche bei mässiger Abstufung der Grössen mit Nothwendigkeit aus der decussirten Stellung hervorgeht. Daher die überwiegende Häufigkeit dieser Reihe bei den Dicotylen. Es ist auch hier nicht die relative Grösse der Organe, welche hierbei den Ausschlag giebt, sondern die von der Natur gebotene Basis des Systems, in Verbindung mit den vorhin erwähnten Abweichungen von der absoluten Regelmässigkeit.

Damit sind indessen die Möglichkeiten für die Ableitung unserer Hauptreihe noch keineswegs erschöpft. Denn auch die Coniferen mit drei- bis achtzähligem Cotyledonarquirl stellen schon an der Keimpflanze die gewöhnliche Spirale her, und zwar mit den verschiedensten Mitteln, die sich nicht mit wenigen Worten bezeichnen lassen.[2] Es mag daher genügen, hier bloss die bemerkenswerthe Thatsache hervorzuheben, dass bei diesen Keimpflanzen ungleiche Ausgangsstellungen und ungleiche Anschlüsse vorkommen, das Endresultat aber trotzdem

[1] Man vergleiche hierzu Taf. V Fig. 33 meiner »Blattstellungen«, wo der Übergang gekreuzter Blattpaare in gedrehte durch Kreise veranschaulicht ist.

[2] Vergl. hierüber meine Mittheilung »über den Wechsel der Blattstellungen an Keimpflanzen von *Pinus*«. Sitzungsber. des Bot. Vereins d. Prov. Brandenburg, Jahrg. 1879.

mit seltenen Ausnahmen dasselbe ist. Die Erklärung liegt auch hier in dem Umstand, dass kleine Abweichungen, wie sie gewöhnlich vorkommen, mit Nothwendigkeit zur Normalspirale führen, dass folglich besondere und darum seltenere Combinationen erforderlich sind, um die Divergenzen der übrigen Reihen herzustellen.

Sehen wir uns jetzt nach den Bedingungen um, durch welche die Spiralstellungen der Reihe 1, 3, 4, 7, 11 ... zu Stande kommen. Zunächst ist klar, dass jede Ausgangsstellung mit $^1/_3$ Divergenz ebenso leicht in dieses Geleise wie in das der Hauptreihe gebracht werden kann, sofern nur der Ausschlag gebende Anstoss eine Verkleinerung der Divergenz (statt einer Vergrösserung), also eine Annäherung an $^1/_4$ bewirkt. Ein solcher Übergang von $^1/_3$ in Divergenzen, die zwischen $^2/_7$ und $^3/_{11}$ liegen, ist in Fig. 31 auf Taf. V meiner »Blattstellungen« dargestellt.

Eine zweite Ausgangsstellung, die unter Umständen zu den nämlichen Divergenzen führt, bilden die drei- und vierzähligen Quirle, deren gesetzmässiger Übergang in die $^2/_7$-Stellung (statt in gedrehte Quirle) auf S. 64—68 meiner Abhandlung eingehend geschildert ist. Hierzu bedarf es also keiner weiteren Erklärung. Ist aber die $^2/_7$-Divergenz einmal zu Stande gekommen, so findet das Vorrücken der Contactzeilen und die damit verbundene Stellungsänderung nach bekannten Gesetzen statt. Ich füge bloss noch bei, dass diese Gesetze sich allerdings nur auf kreisförmige oder doch symmetrische Organe beziehen, nicht aber auf schiefe Rechtecke, wie sie z. B. bei den Aroideen vorkommen. Da jedoch die Natur oft beiderlei Formen neben einander zur Entwickelung bringt, so ist die Erhaltung der Spiralstellung beim Kleinerwerden der Organe ebenso leicht möglich, wie der a. a. O. beschriebene Wechsel zwischen Spiral- und Quirlstellung.

Die alternirenden 3—4zähligen Quirle gehen übrigens nicht selten zuerst in gedrehte Quirle und dann erst in die bezeichnete Spiralstellung über. An einem Dipsacuskopf bildeten z. B. die untern Hüllblätter solche viergliedrige Quirle, die sich in vier rechtsläufige und acht steilere linksläufige Schrägzeilen ordneten; eine der Achterzeilen hörte weiter oben auf, es blieben also noch 4er und 7er und die Divergenz war ungefähr $^3/_{11}$. In der Blüthenregion stiegen sodann die Coordinationszahlen auf 18 und 29.

Endlich sind auch hier die zahlreichen Fälle anzureihen, welche einen mehr individuellen Charakter tragen, wo also Unregelmässigkeiten der verschiedensten Art, für die es keine allgemeine Bezeichnung giebt, zu den Divergenzen der Reihe 1, 3, 4, 7 .... hinüber führen.

Es erscheint mir überflüssig, diese Betrachtungen noch weiter fortzusetzen und in ähnlicher Weise auch das Zustandekommen der

Spiralstellungen aus den Reihen 1, 4, 5, 9 ...., 1, 5, 6, 11, 17 .... oder 2, 5, 7, 12 .... u. s. w. zu erörtern. Es ist eben immer die schon an der Keimpflanze oder im Blattwinkel und dergl. gebotene Basis, zuweilen in Verbindung mit besonderen, individuell ausgeprägten Anschlussformen, welche dem entsprechenden System seitlicher Organe gewissermaassen das Gepräge giebt; das relative Grössenverhältniss bedingt — bestimmte Querschnittsformen vorausgesetzt — bloss die Coordinationszahlen und Neigungswinkel der Contactzeilen innerhalb einer gegebenen Reihe, niemals diese Reihe selbst.

Die vorstehenden Ausführungen, durch welche, wie ich glaube, der von C. DE CANDOLLE erhobene Einwand vollständig entkräftet wird, enthalten durchaus keine wesentlich neuen Gesichtspunkte. Im Princip ergiebt sich das Gesagte ganz von selbst aus dem klar ausgesprochenen Grundgedanken meiner Theorie, die ich eben darum als Anschlusstheorie bezeichnet habe. Jeder Aufbau setzt doch irgend ein Fundament voraus, auf dem gebaut werden kann.

IV.

Geometrische und inductiv-botanische Betrachtungsweise.

In der Einleitung zum historischen Theil seiner »Considérations« (S. 4) macht C. DE CANDOLLE die kritische Bemerkung, die Erforschung der morphologischen Gesetze sei nicht immer scharf genug von der Bestimmung rein geometrischer Bedingungen der Stellungsverhältnisse unterschieden worden. Das ist unzweifelhaft richtig, aber die Bemerkung trifft auch ihren Urheber. Der dritte Abschnitt seiner Schrift, welcher eine »Interprétation des faits naturels« sein soll, ist im Wesentlichen nur eine geometrische Studie. Statt von Beobachtungen auszugehen, die als sichere Grundlage dienen könnten, setzt der Verfasser an die Spitze seiner Betrachtungen die schon oben erwähnte rein theoretische Annahme, dass die jungen Triebe sich strecken und sich verdicken, ohne dass die Divergenzen der seitlichen Organe eine merkliche Änderung erfahren. In Übereinstimmung damit wird im Verlaufe der Darlegung stets nur mit mathematischen Punkten operirt, die sich natürlich bei den durch Wachsthum bedingten Stellungsänderungen weder drücken noch verschieben; sie bewegen sich also genau longitudinal.

C. DE CANDOLLE giebt nun aber doch zu, dass die wirklichen Organe sich im Jugendzustande wechselseitig berühren, wenn er auch das Vorhandensein eines damit verbundenen Druckes in Abrede stellt. Bleiben wir also bei der unbestrittenen Thatsache der Berührung.

Dann ist immerhin so viel klar, dass die angenommene geradlinige Bewegung der Organe schlechterdings unmöglich ist. Man denke sich doch einen beliebigen Behälter mit Kugeln angefüllt, die sich nach Analogie der Parastichen in schiefe Flächen ordnen, und die Seitenwände des Behälters oder wenigstens eine derselben in der Art verschiebbar, dass eine Vergrösserung oder Verkleinerung des Querdurchmessers möglich ist. Die Kugeln, welche dem Boden nicht unmittelbar aufliegen, werden sich alsdann etwas heben oder senken, je nachdem der Behälter verengt oder erweitert wird. Es ist aber einleuchtend, dass sowohl Senkung als Hebung niemals in gerader lothrechter Linie stattfinden kann; denn die oberen Kugeln müssen ja stets auf den unteren gleiten und zwar meist auf etwas geneigten Flächen.

Genau dasselbe gilt nun offenbar, wie im Vorhergehenden gezeigt wurde, auch für die Blattanlagen. Sind auch die abwechselnd nach rechts und links gehenden Oscillationen in solchen Systemen, wo der Contact gleichzeitig und dauernd auf drei verschiedenen Schrägzeilen besteht, nur gering, so können sie doch nie ganz verschwinden. Und selbst wenn sie dies thäten, bliebe beim Vorrücken zu höher bezifferten Contactzeilen immer noch die allmälige Annäherung der ursprünglichen Divergenz an den irrationalen Grenzwerth. Eine lothrechte Bewegung wäre also selbst in diesem Falle unmöglich.

Wenn wir also auch zugeben, dass C. DE CANDOLLE mit sehr einfachen Mitteln die Veränderungen erklärt, welche die Neigungswinkel der Schrägzeilen und das augenfällige Hervortreten neuer Combinationen betreffen, so ist es doch für die Pflanze eine mechanische Unmöglichkeit, diese nämlichen Mittel zur Anwendung zu bringen; darum geht sie andere und zwar naturgemässere Wege.

Ebenso unbegründet ist die weiterhin (S. 60) in Übereinstimmung mit Äusserungen anderer Autoren[1] ausgesprochene Ansicht, dass kleine Divergenzen, beispielsweise zwischen $^1/_7$ und $^1/_8$, deshalb so selten vorkommen, weil sie eine zu rasche Organbildung voraussetzen, sofern nicht eine Seite des Stengels längere Zeit kahl bleiben soll. Die Vertreter dieser Ansicht stellen sich vor, dass die Pflanze ihre Blätter gleich von Anfang an auf der vorgezeichneten Grundspirale mit den betreffenden kleinen Divergenzen erzeuge. Ein solches Verhalten ist aber meines Wissens von Niemand beobachtet und kommt nach Allem, was ich gesehen, bei den Gefässpflanzen gar nicht vor. Divergenzen zwischen $^1/_7$ und $^1/_8$ folgen entweder auf sieben bis acht-

[1] Vergl. z. B. N. J. C. MÜLLER, Handb. d. Bot. II, S. 259. Es wird hier beispielsweise von einer Pflanze mit der Divergenz $^1/_{100}$ gesagt, dass sie sehr schlecht wegkommen würde, denn »sie muss fünfzig Blätter bilden und ist dann noch auf einer Hälfte des Stammes blattlos«.

zählige Quirle, an die sie sich regelrecht anschliessen, oder sie gehen durch Unregelmässigkeiten der verschiedensten Art aus beliebigen Quirl- oder Spiralstellungen hervor. Als Beispiele führe ich an:

1. Fruchtstand von *Arum maculatum*. Die Organe in 6er und 7er Schrägzeilen geordnet; Divergenz annähernd $^2/_{13}$. Den Anschluss an die Spatha vermitteln die Nummern 0 und 5 — 11 (nach der durch die Schrägzeilen vorgezeichneten Bezifferung); Nummer 1 bis 4 fehlt.

2. Ähnlicher Fruchtstand von derselben Pflanze. Sehr deutliche 5er und 6er Zeilen mit nahezu rechtwinkliger Kreuzung. Divergenz annähernd $^2/_{11}$. Anschluss an die Spatha durch die Organe 0, 1, 5 und 7 — 10; Nummer 2 — 4 fehlt.

3. *Hedychium Gardnerianum*. Die drei obersten Laubblätter, die mit 1, 2 und 3 bezeichnet werden mögen, in normaler rechtsläufiger Spirale; das erste Hochblatt (4) oberhalb 2, das zweite (5) in der Horizontalprojection nahezu gleichweit von 3 und 4 abstehend. Dann von Nummer 6 bis 31 eine regelmässige Spiralstellung nach ca. $^2/_7$.

4. Blüthe von *Magnolia grandiflora*. Staubgefässe zunächst oberhalb der Corolle unregelmässig, weiter oben in gekreuzten 11er und 12er Zeilen; Divergenz also ca. $^2/_{23}$. Die anschliessenden Carpelle in nahezu rechtwinkligen 5er und 8er Zeilen mit Divergenzen von etwa 137°.

5. Kätzchen von *Picea excelsa*. Die stützenden Schuppen an der Basis in 5er und 8er Zeilen, also in normaler Spiralstellung; die Staubgefässe dagegen in 7er und 8er Zeilen, also mit Divergenzen von ca. $^2/_{15}$. Die 8er Zeilen der Schuppen setzen sich ungestört nach oben fort, die weniger steilen 5er gehen in 7er über. — Daneben findet man auch Kätzchen, deren Staubgefässe in 11er und 12er Zeilen oder in 8er und 9er Zeilen stehen.

Von diesen fünf Fällen gehören die zwei ersten zu den unbestimmten Stellungsverhältnissen, welche bei sprungweiser Grössenabnahme der Organe zu Stande kommen,[1] die drei letzten zu den besonderen Stellungsänderungen, welche durch unregelmässige Anschlüsse herbeigeführt werden. Beiderlei Übergangsformen finden sich hin und wieder. Nirgends aber beobachtet man Spiralstellungen mit kleinen Divergenzen, die gleich mit dem Cotyledo oder dem ersten Blatt eines Axillarsprosses beginnen.

Auch die immer wiederkehrende Vorstellung, dass die Divergenzen der Hauptreihe 1, 2, 3, 5 .... eine für die möglichste Ausnutzung des Lichtes und Raumes zweckmässigere Vertheilung der Blätter mit sich bringen als alle andern, entbehrt jeder thatsächlichen Begründung. Ich vermag wenigstens nicht einzusehen, warum beispiels-

[1] Vergl. meine »Blattstellungen«, S. 75.

weise ein Stellungsverhältniss mit ungefähr rechtwinklig gekreuzten 3er und 5er Zeilen für die Lichtverwerthung günstiger sein soll als ein solches mit gleichgestellten 4er und 7er oder 4er und 5er Zeilen etc. Alle diese vermeintlichen Unterschiede existiren wirklich nur in der Idee.

Ähnliche Verwechslungen zwischen morphologischen Thatsachen und geometrischen Constructionen haben sich übrigens bei C. DE CANDOLLE auch in den historischen Theil seiner Darstellung eingeschlichen. Wenn z. B. auf S. 25 gesagt wird, dass AIRY[1] und HENSLOW[2] die Art und Weise zu erforschen gesucht haben, wie die in der heutigen Pflanzenwelt vorherrschenden Stellungsverhältnisse im Verlaufe der geologischen Perioden entstanden sein müssen, so möchte ich dagegen geltend machen, dass in den citirten Veröffentlichungen Untersuchungen über diese Frage gar nicht enthalten sind, wohl aber Vermuthungen, welche die Autoren an ihre geometrischen oder mechanischen Betrachtungen anknüpfen, ohne sie irgendwie zu begründen. So zeigt z. B. AIRY, dass Kugeln, welche nach $^1/_2$ Divergenz an einem Bande befestigt sind, durch longitudinalen Druck in Spiralstellungen übergehen, welche denen der SCHIMPER'schen Hauptkette nahe kommen. Solche Übergänge sind in der That mechanisch möglich; allein es giebt ausserdem, wie oben gezeigt wurde, noch verschiedene andere Möglichkeiten, die in Rede stehenden Divergenzen herbeizuführen, und darum ist es nothwendig, in jedem gegebenen Falle durch Beobachtung zu entscheiden, welche von den Möglichkeiten zutrifft. Statt dessen hält sich AIRY einfach an seine Mechanik und lässt ohne Weiteres alle Spiralstellungen der Hauptreihe durch longitudinalen Druck aus $^1/_2$ entstehen, während thatsächlich nicht ein einziger Fall constatirt ist, wo eine solche Umwandlung wirklich stattfände.[3]

Ähnlich verhält es sich mit den phylogenetischen Ansichten HENSLOW's, wonach die ursprünglichen Dicotylen vorwiegend opponirte Blätter hatten,[4] und dergl. mehr. Das sind meines Erachtens keine »theoretical considerations«, wie der Autor sie betitelt, sondern halt-

[1] Proceedings of the Royal Society, t. 22, 1874.

[2] Transactions of the Linnean Society, ser. 2, vol. I.

[3] Auch bei *Aloë*, *Dracaena* und anderen Pflanzen mit gedrehten Zweierzeilen kann nur die Beobachtung entscheiden, ob diese Stellung schon in der Anlage gegeben oder nachträglich durch Verschiebung entstanden sei. In den mir bekannten Fällen ist das erstere anzunehmen.

[4] Die betreffende Stelle lautet: that opposite leaves were probably the original and normal state of the primogenitors of dicotyledonous angiosperms. Motivirt wird diese Ansicht namentlich durch den Hinweis auf die opponirten Saamenlappen der Dicotylen, welche die ursprüngliche Stellung am längsten bewahrt haben sollen. Hiernach müsste man wohl den ersten urweltlichen Coniferen quirlständige Blätter zuschreiben.

lose naturphilosophische Phantasien, die ja in der neueren Literatur wieder zur Blüthe zu kommen scheinen.

Was endlich die Aufstellungen DELPINO's[1] betrifft, welche in der historischen Reihenfolge den Schlussstein bilden, so geht dieser Autor von der Annahme aus, die Blätter seien endständige, nicht seitliche Organe; ein stammartiges oder axiles System sei überhaupt nicht vorhanden. Dem entsprechend werden die verschiedenen Stellungen durch Kugeln veranschaulicht, welche ohne gemeinsame Stütze oder Axe über einander zu liegen kommen. Es ist nun aber ausser Zweifel, dass die höheren Pflanzen eine Axe besitzen, um welche die seitlichen Organe sich ordnen; deshalb gewährt es für den Botaniker kein Interesse, den zwar sinnreichen, aber naturwidrigen Constructionen DELPINO's nachzugehen. — Bezüglich der soeben erschienenen grösseren Abhandlung dieses Autors verweise ich auf das folgende Capitel.

Wer die Blattstellungen nach ihren causalen Verkettungen erforschen will, darf sich nicht auf willkürliche Constructionen verlassen, sondern muss die gegebenen Ausgangsstellungen und Anschlüsse an der Pflanze selbst beobachten. Er wird überdies gut thun, die räumlichen Beziehungen der Organe nicht durch Punkte, sondern im Einklang mit der Natur durch geschlossene Figuren zu veranschaulichen. Dann fallen die von C. DE CANDOLLE wieder aufgefrischten genetischen Linien mit ihren von Anbeginn constanten Divergenzen ganz von selbst dahin.

V.

Über DELPINO's neue Theorie der Blattstellungen.

Das Manuscript zu der vorliegenden Mittheilung war bereits druckfertig, als ich von Hrn. DELPINO die in seiner »Nota preliminare« in Aussicht gestellte grössere Abhandlung erhielt. Es ist ein wohl ausgestattetes Buch von 345 Seiten, mit vier Tabellen und sechzehn Tafeln.[2] Ein so umfangreiches Werk eingehend zu studiren, erfordert nun allerdings mehr Zeit, als mir bei diesem Anlass zu Gebote steht; doch wollte ich denselben nicht vorübergehen lassen, ohne dasselbe zu erwähnen und wenigstens diejenigen Stellen, welche gegen meine eigene Theorie gerichtet sind, einer kurzen Kritik zu unterziehen.

DELPINO bemerkt zunächst (S. 158), dass die kreisförmigen oder elliptischen Organe, deren Verschiebungen den Ausgangspunkt meiner

[1] Causa meccanica della fillotassi quincunciale. Nota preliminare. Genova 1880.

[2] FEDERICO DELPINO, Teoria generale della fillotassi. Atti della R. università di Genova, Vol. IV, Parte II. 1883.

Theorie bilden, sich frei in der Ebene bewegen, während die an der Basis unauflösbar verketteten Blätter diese freie Beweglichkeit nicht besitzen. Dazu komme noch der Umstand, dass die Organe bei meinen Versuchen sich unbehindert nach den Seiten hin ausdehnen können; ich hätte doch jedenfalls von der Vorstellung ausgehen müssen, dieselben seien in geschlossene Cylinder- oder Kegelflächen, nicht in seitlich offene Parallelogramme geordnet.

Dass der letztere Einwand auf einem Missverständniss beruht, brauche ich wohl nicht erst darzulegen. Die einschlägigen Figuren meiner Abhandlung sind ja durchgehends als abgerollte Cylinderflächen, die Organsysteme folglich als wirkliche Cylinder gedacht. Das Parallelogramm, dessen ich mich zur Veranschaulichung des Verschiebungsvorganges mittelst Pappschachteln bedient habe, sollte bloss dazu dienen, die thatsächlich auf der Cylinderfläche zu beobachtenden Stellungsänderungen auf einem eben gelegten Stück derselben zur Anschauung zu bringen. Ich habe übrigens seitdem einen aus Kugeln bestehenden Apparat construirt, welcher die Form cylindrischer Organcomplexe besitzt und die in Rede stehenden Verschiebungen innerhalb gewisser Grenzen naturgetreu darzustellen gestattet.

Was sodann das anatomische Band betrifft, welches nach Delpino die freie Beweglichkeit der Blätter einschränkt, so stelle ich keineswegs in Abrede, dass das Vorhandensein desselben Widerstände mit sich bringt, welche der verschiebenden Kraft entgegenwirken. Aber diese Widerstände werden überwunden und die Verschiebung selbst geht, rasch oder langsam, stets denselben vorgezeichneten Weg.

Ein weiterer Einwand Delpino's, dass nämlich das relative Grössenverhältniss der Organe, worauf meine Theorie sich stütze, das Vorherrschen bestimmter Stellungsverhältnisse in der Natur nicht erkläre, fusst im Wesentlichen auf denselben Vorstellungen und Folgerungen, welche schon C. de Candolle irre geführt haben. Er sagt S. 160: »Wenn die Anschauungen Schwendener's in diesem Punkte mit der Wirklichkeit übereinstimmten, so müssten die verschiedensten phyllotactischen Systeme in der Natur gleich häufig vertreten sein, wie die Stellungen der Hauptkette, die zugehörigen Doppelsysteme, sowie diejenigen der Reihe 1, 3, 4, 7...[1]. Aber statt dessen welch' ein Unterschied! Auf tausend Stellungsverhältnisse, welche zu einem der drei eben genannten Systeme gehören, ist es ein Wunder, eines zu finden, das zu andern Systemen gehört .... Darum ist das Vorherrschen und die charakteristische Be-

[1] Die Übersetzung ist hier nicht ganz wortgetreu, da die Bezeichnungsweise des Autors in diesem Zusammenhange unverständlich sein würde.

ständigkeit der bezeichneten Systeme mit den theoretischen Anschauungen SCHWENDENER's unvereinbar.« Diese Erwägungen erweisen sich jedoch, wie oben gezeigt wurde, als durchaus hinfällig, weil nach meiner Darstellung das relative Grössenverhältniss der Organe bloss die Stellung innerhalb einer gegebenen Reihe, nicht die Reihe selbst bedingt.

Mit besonderem Eifer, aber meines Erachtens mit schwachen Gründen, wendet sich dann DELPINO gegen den schon von HOFMEISTER aufgestellten Satz, dass die Annahme einer genetischen Spirale auf einem Irrthum beruhe. Schon in der Vorrede (S. 6) nennt er das in diesem Satze ausgesprochene Ergebniss der HOFMEISTER'schen Untersuchungen ein »infelice risultato«, welches geeignet sei, eine schon von A. BRAUN glänzend aufgehellte Frage wieder zu verdunkeln. Indem er sodann meine eigene Theorie kurz bespricht, schliesst er mit den Worten: »für uns genügt es, dass auch dieser Autor das Vorhandensein einer genetischen Spirale verneint, um seine Theorie zu verwerfen«.

Um die Erwägungen zu verstehen, welche DELPINO zu Gunsten der genetischen Spirale vorführt, ist es nothwendig, sich des Experimentes zu erinnern, welches derselbe schon in seiner vorläufigen Mittheilung beschrieben hat. Er brachte kleine Kugeln so mit einander in Verbindung, dass man in rechts- oder linksläufiger Spirale von der einen zur andern fortschreiten konnte. So entstand ein cylindrischer Körper, an welchem die Kugeln eine ganz analoge Anordnung zeigten, wie bei der Mehrzahl der Pflanzen die Blätter. Dieser Körper wird als »pila sferotassica« bezeichnet und gewissermassen als das Urbild der spiraligen Blattstellungen angesehen. Auf diese Kugelsäule stützt sich auch die Ansicht des Verfassers bezüglich der genetischen Spirale. Er sagt auf S. 163: »die genetische Spirale kann nach unserem Dafürhalten weder mit Rücksicht auf die geometrisch-arithmetischen Beziehungen (wie im ersten Theile dieser Schrift bewiesen wurde), noch mit Rücksicht auf die mechanischen und thatsächlichen Verhältnisse geleugnet werden. Indem man die Kugelsäule construirt oder die Blätter der Artischocke verspeist, überzeugt man sich leicht von der absoluten Übereinstimmung, welche in dieser Hinsicht zwischen der Mechanik und der Wirklichkeit besteht. Es ist überflüssig zu bemerken, dass die Spirale, auf welcher man bei den genannten zwei Verrichtungen fortschreitet, aus Gründen der Zeitersparniss diejenige des kurzen Weges ist.«

Ich kann aus dieser Beweisführung nur das Eine folgern, dass DELPINO die Grundspirale im Sinne BRAUN's von der arithmetischen Einerzeile, welche bloss die Eigenschaft hat, alle Blattnummern in

regelmässiger Folge zu verbinden, nicht zu unterscheiden weiss. Daher die wiederholte Betonung der geometrisch-arithmetischen Beziehungen, die doch für die vorliegende Frage gänzlich bedeutungslos sind; daher der wenig sagende Hinweis auf die »mechanischen Gründe«, d. h. auf die Herstellung seiner Kugelsäule oder das Abblättern der Artischocke.

Zwar findet sich auf S. 262 eine Definition der wahren genetischen Linie im Gegensatz zur scheinbaren; die erstere soll sich dadurch kennzeichnen, dass sie wirklich die örtliche und zeitliche Reihenfolge angiebt, in welcher die seitlichen Organe entstehen, während die letztere als eine blosse geometrische Erscheinung bezeichnet wird. Wir wissen jedoch, dass die meisten Laubtriebe mit schraubenliniger Blattstellung die erwähnte Reihenfolge vollständig einhalten, ohne deshalb als Belege für das Vorhandensein einer genetischen Spirale im Sinne Braun's gelten zu können. Die citirte Definition liefert also nur einen Beweis mehr dafür, dass Delpino die Gegensätze, welche in diesem Betreff zwischen der Auffassung Braun's und derjenigen der neueren Autoren bestehen, unrichtig aufgefasst hat.

Im Weiteren führen die mechanischen Vorstellungen, welche sich für den Autor der neuen Theorie aus der Betrachtung der Kugelsäule ergeben haben, zu der schon oben angedeuteten Lehre, dass die Blätter nicht seitliche, sondern centrale und endständige Organe seien, deren Basaltheile jedoch zu einer Scheinaxe oder einem Phyllopodium verbunden erscheinen (S. 174). Die Anaphytosen Gaudichaud's werden also wieder aufgefrischt. Da jedoch diese Lehre mit den Blattstellungen in keinem direkten Zusammenhange steht, so verzichte ich darauf, hier näher darauf einzugehen.

Dagegen mag es gestattet sein, im Anschlusse an das Vorstehende auch den ersten Theil des Werkes, welcher den geometrisch-arithmetischen Beziehungen und der Eintheilung der phyllotactischen Systeme gewidmet ist, mit einigen Worten zu beleuchten. Dieser Theil verdient vor Allem die Anerkennung, dass er in mancher Hinsicht durchaus originell und mit grosser Sorgfalt durchgeführt ist. Nur geht meines Erachtens der Autor zu weit, wenn er in solchen Fragen, die nach der Natur der Dinge verschiedene Lösungen zulassen, die einzig richtige Beantwortung gefunden zu haben glaubt. Man kann bekanntlich die meisten Gegenstände und ebenso ihre wechselseitigen Beziehungen in sehr verschiedener Weise gruppiren und nach verschiedenen Gesichtspunkten vergleichen; warum nicht auch die Blattstellungen? Eine absolute Richtigkeit oder Unrichtigkeit ist auf diesem Gebiete von vorn herein nicht zu erwarten, sondern nur eine grössere oder geringere Natürlichkeit in Bezug auf bestimmte Verhältnisse.

In den Augen DELPINO's mag z. B. die Unterscheidung von krummlinig und geradlinig gereihten Blättern naturwidrig erscheinen, weil er selbst auf die Neigung der Reihen keinen Werth legt. Vom Standpunkt der Gebrüder BRAVAIS aus betrachtet, war es dagegen consequent, diejenigen Stellungen, deren Divergenzen mit dem Kürzerwerden der Internodien sich allmälig dem Grenzwerth nähern, von den unveränderlichen der kantigen Cacteen u. dgl. zu trennen.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir uns die neue Classification selbst etwas näher ansehen, indem wir die Stellungen der Hauptkette als die bekanntesten herausgreifen. DELPINO unterscheidet die verschiedenen Erscheinungsformen oder Epifanien dieses Systems nach der Zahl der Reihen, welche die Organe bilden, ohne Rücksicht darauf, ob diese Reihen genau longitudinal oder bloss in steilen Schraubenlinien verlaufen. Ist eine einzige Reihe vorhanden, so ist dies die *Protofania* des Systems; sind es zwei, so haben wir die *Deuterofania* vor Augen, bei dreien die *Tritofania*, bei fünfen die *Tetartofania*, bei acht die *Pemptofania*, u. s. f. nach den Gliedern der Hauptreihe. Für jede dieser Erscheinungsformen gilt ferner, nach Beobachtungen am Zapfen von *Pinus Pinea*, diejenige Stellung als normal, bei welcher die äquidistant gedachten Mittelpunkte der Organe in Quadraten stehen. Wir erhalten hiernach folgende Übersicht, in welcher ich die einzelnen Erscheinungsformen nach meiner Bezeichnungsweise charakterisirt habe.

Erscheinungsformen des Hauptsystems.

1. *Protofania.* Alle Blätter in einer Längsreihe. Wird für die Cormophyten nicht als Stellungsverhältniss der Blätter, wohl aber der Adventivwurzeln, Nebenwurzeln u. s. w. angenommen (S. 122).

2. *Deuterofania.* Alternirend zweizeilige Blätter in zwei Längsreihen. Die rechtsläufige Spirale kreuzt sich mit der linksläufigen unter 90°. Divergenz $= {}^1/_2$.

3. *Tritofania.* Einer- und Zweierzeilen kreuzen sich rechtwinklig; Divergenz $= {}^2/_5$. Die Reihen, auf welche die Bezeichnung sich bezieht, sind die Dreierzeilen 1 , 4 , 7 . . . , 2 , 5 , 8 . . . , 3 , 6 , 9 . . . , welche in diesem Falle schief verlaufen und keine Contactlinien sind.

4. *Tetartofania.* Zweier- und Dreierzeilen kreuzen sich rechtwinklig; Divergenz $= {}^5/_{13}$. Bezeichnung der Stellung nach dem vierten Gliede der Hauptreihe, also nach den steilen Fünferzeilen, die auch hier keine Contactlinien sind.

5. *Pemptofania.* Dreier- und Fünferzeilen kreuzen sich rechtwinklig; Divergenz $= {}^{13}/_{34}$. Bezeichnung der Stellung nach dem fünften Gliede der Hauptreihe, d. h. nach den Achterzeilen.

In dieser Weise setzt sich die Reihe der Stellungen bis zu beliebig hohen Coordinationszahlen fort. Man sieht ohne Weiteres, dass diese sämmtlichen Erscheinungsformen nichts anderes sind, als die bei rechtwinkliger Kreuzung der Contactlinien entstehenden Systeme, deren Divergenzen durch die Näherungsbrüche $^1/_2$, $^2/_5$, $^5/_{13}$, $^{13}/_{34}$, $^{34}/_{89}$ u. s. w. gegeben sind.[1]

Als arithmetische Charakteristik der verschiedenen Epifanien sind diejenigen Glieder der Reihe gewählt, welche die am deutlichsten hervortretenden Schrägzeilen bezeichnen, und zwar der grösseren Bestimmtheit wegen immer deren vier. Die *Tritofania* ist beispielsweise mit 1 , 1 , 2 , 3 charakterisirt, weil neben der Einerzeile des kurzen und des langen Weges die Zweier- und Dreierzeilen die augenfälligsten sind; desgleichen die *Tetartofania* mit 1 , 2 , 3 , 5, die *Pemptofania* mit 2 , 3 , 5 , 8 , u. s. f.

Delpino führt sodann dieselbe Bezeichnungsweise auch für die conjugirten Systeme durch und erhält auf diese Weise die Protofanien, Deuterofanien, Tritofanien u. s. w. der zwei- oder mehrzähligen Quirle. Die decussirte Blattstellung erscheint z. B. als *Deuterofania* des verdoppelten Hauptsystems (sistema bijugato del principale), die alternirenden dreizähligen Quirle als *Deuterofania* des dreifachen Hauptsystems (sistema trijugo) u. s. w.

Neben dieser angeblich genetischen Eintheilung der Systeme findet sich auf S. 55 noch eine andere, alle Stellungsverhältnisse umfassende, welche ausschliesslich auf die Zahl der Längsreihen basirt ist. Diese letzteren brauchen übrigens auch hier keineswegs Orthostichen zu sein, sondern können mehr oder weniger von der Verticalen abweichen. Hiernach zerfallen die Blattstellungen, ohne Rücksicht auf die verschiedenen Systeme, in monostiche, distiche, tristiche, tetrastiche u. s. w. Als tetrastiche Stellungsverhältnisse figuriren beispielsweise: 1. vierzählige, nicht alternirende Quirle: 2. die Spiralstellung nach $^3/_{10}$ aus der Reihe 1 . 3 , 4 , 7 . . . . wobei die Grundspirale und die Dreierzeilen die rechtwinklig gekreuzten Contactlinien bilden, während die für die Bezeichnung gewählten Viererzeilen als steile Schraubenlinien erscheinen; 3. die decussirte Blattstellung, bei welcher die vier Reihen wieder genau longitudinal verlaufen. In gleicher Weise sind als pentastiche Stellungen bezeichnet: 1. die *Protofania* der Reihe 1 . 4 , 5 . . . , mit schwach gedrehten Fünferzeilen. Divergenz $= {}^4/_{17}$; 2. die *Tetartofania* des Hauptsystems, mit ähnlich gestellten Fünferzeilen, Divergenz $= {}^5/_{13}$. Die

[1] Vergl. meine »Blattstellungen« S. 18. — Die sechseckige Querschnittsform, welche Delpino für die geometrische Darstellung der Epifanien gewählt hat, ist hierbei ohne Bedeutung; er hätte ebenso gut Kreise anwenden können, deren Radius gleich einer halben Quadratseite.

nicht alternirenden fünfzähligen Quirle würden sich hier anschliessen; die $^2/_5$-Stellung dagegen ist unter die tristichen eingereiht.

Bei der vollständigen Aufzählung der Stellungen einer Classe, wobei die arithmetische Charakteristik zur Bezeichnung dient, sind auch die Systeme mit antidromer Grundspirale den homodromen beigesetzt. So entstehen Gruppirungen, die durch eine gewisse Zahlensymmetrie sich auszeichnen. Als Beispiel sei mit wenig veränderter Terminologie die 10. Classe aufgeführt. Ich bemerke nur, dass DELPINO die Differenz zwischen dem ersten und zweiten Gliede der betreffenden recurrenten Reihe an die Spitze dieser Reihe stellt.[1]

Zehnte Classe: Decastiche Stellungsverhältnisse.

10, 0, 10, 10	Zehnfache *Protofania* des Hauptsystems.
8, 1, 9, 10	*Protofania* der Reihe 1, 9, 10 ...
6, 2, 8, 10	Verdoppelte *Protofania* der Reihe 1, 4, 5 ...
4, 3, 7, 10	*Protofania* der Reihe 3, 7, 10 ...
2, 4, 6, 10	Verdoppelte *Tritofania* des Hauptsystems.
0, 5, 5, 10	Fünffache *Deuterofania* des Hauptsystems.
2, 4, 6, 10	Antidrome Systeme.
4, 3, 7, 10	
6, 2, 8, 10	
8, 1, 9, 10	
10, 0, 10, 10	

Man sieht, dass z. B. die Zahlen der vorletzten Verticalreihe von 10 bis auf 5 sinken und dann symmetrisch wieder auf 10 steigen.

Diese Beispiele genügen, um zu zeigen, dass die in Rede stehende Eintheilung eine rein arithmetische ist, welche auf die gesetzmässigen Stellungsänderungen am nämlichen Spross und die dadurch angedeuteten natürlichen Verkettungen keine Rücksicht nimmt. Dagegen mag hier noch ausdrücklich bemerkt werden, dass DELPINO die Divergenzen immerhin als veränderliche Grössen betrachtet und demgemäss die quadratische Stellung der Organe unter Umständen in eine rhombische

[1] Diese Fortsetzung der recurrenten Reihen nach links mag für die Darstellungsweise des Autors gestattet sein, ist dagegen für die mechanische Betrachtung der Verschiebungen durchaus unzulässig. Ist z. B. die Reihe DELPINO's 3, 2, 5, 7, 12 ... gegeben, so findet das Vorrücken der Contactlinien nur dann in dieser Reihe statt, wenn die 2er und 5er (nicht die 3er und 2er) den ersten Dachstuhl bilden. Die zwei ersten Glieder der Reihe sind daher naturgemäss 2 und 5; die vorgesetzte 3 hat nicht die Bedeutung der übrigen Glieder. Ebenso bei den anderen Reihen. Der Vorwurf, dass die Gebrüder BRAVAIS diese sämmtlichen Reihen so zu sagen decapitirt haben (S. 44), ist daher unbegründet.

übergehen lässt. Damit hofft er den Fehler, der ihm an der BRAUN'schen Eintheilung aufgefallen, vermieden zu haben, den Fehler nämlich, seine eigene Classification auf eine veränderliche Grösse zu basiren. Das ist ihm aber offenbar nicht gelungen; auch seine Epifanien sind beweglich. Der Blüthenkopf einer Sonnenblume, welcher ursprünglich nahezu rechtwinklige 13er und 21er Zeilen, später dagegen ähnlich gestellte 34er und 55er Zeilen aufweist, durchläuft z. B. nach der neuen Terminologie der Reihe nach die *Ogdofania*, *Ennatofania* und *Decatofania* des Hauptsystems, und ähnliche Verschiebungen kommen auch anderwärts häufig vor. Hierher gehörige Beispiele findet man auch bei DELPINO selbst auf S. 154 ff. und an anderen Stellen. Damit soll indessen die relative Berechtigung der verschiedenen Epifanien nicht bestritten werden; ich wollte bloss darauf hinweisen, dass sie die theoretischen und practischen Vortheile, welche der Autor von ihnen erwartet, jedenfalls nur theilweise bieten können.

Dass die arithmetische Betrachtungsweise die eigentliche Bedeutung der recurrenten Reihen, wie z. B. 1, 3, 4, 7 ...., 1, 4, 5, 9 .... u. s. w., obschon dieselben die regelmässigen Stellungsänderungen bei vorwiegendem Dickenwachsthum und ebenso beim Kleinerwerden der Organe vollständig beherrschen, so gut wie unberücksichtigt lässt, mag durch die Natur der leitenden Gesichtspunkte entschuldigt werden. Es ist nun einmal nicht möglich, bei irgend einer Eintheilung allen Rücksichten zu genügen. Ich will also nicht rechten mit dem Autor, wenn er die Stellungsverhältnisse der oben erwähnten Reihen sämmtlich als »sistemi fillotassici di seconda riga« zusammenstellt und in analoger Weise auch die Stellungen der Reihen 2, 5, 7 ..., 2, 7, 9 ..., 2, 9, 11 ... u. s. w. in seiner terza riga vereinigt. Aber von dem Augenblick an, wo der Versuch gemacht wird, eine solche Eintheilung als mechanisch begründet hinzustellen, muss ich entschieden widersprechen. So etwas kann die Mechanik unmöglich leisten. Ich habe auch vergeblich nach einer Stelle gesucht, wo diese Frage nicht bloss berührt, sondern eingehend erörtert wäre. Alle hierauf bezüglichen Ableitungen sind rein arithmetischer Natur.

Nach DELPINO entsteht z. B. diejenige Spiralstellung der Reihe 1, 3, 4, 7 ..., welche rechtwinklig gekreuzte 3er und 4er Zeilen und demgemäss sieben steile Schraubenlinien zeigt (deuterofania del sistema capo di seconda riga), aus der Spiralstellung nach $^5/_{13}$ (tetartofania del sistema principale), indem die steilen 5er Zeilen dieser letzteren ihre Zahl um zwei vermehren, und aus der achtreihigen Pemptofania des nämlichen Systems, indem eine der 8er Zeilen verschwindet. In ähnlicher Weise werden durch Addition oder Subtraction auch die übrigen Systeme abgeleitet. Es handelt sich also im Wesentlichen um die

bekannten Übergangsmodalitäten, welche die Brüder BRAVAIS als »avortements de spires secondaires« beschrieben haben; denn was nach einer Richtung als Avortement gelten mag, erscheint nach der entgegengesetzten als Dédoublement. (Vergl. meine »Blattstellungen« S. 56).

Die Auseinandersetzungen im zweiten und dritten Theil des Werkes, welche als mechanische bezeichnet sind, haben mich überhaupt wenig befriedigt. Schon die Vorbemerkung, mit welcher das siebente Kapitel des zweiten Theils (S. 145) eingeleitet wird, dass nämlich die Entstehungsweise der Pemptofania, Ectofania etc. aus der Tetartofania des Hauptsystems — also nach meiner Bezeichnungsweise das Vorrücken der Contactlinien — in den bisherigen Veröffentlichungen nur ungenügend erklärt sei, halte ich für gänzlich ungerechtfertigt. Meines Erachtens ist die Stelle S. 77 in der Abhandlung der Gebrüder BRAVAIS, welche DELPINO selbst citirt, in dieser Hinsicht vollkommen klar, und es beruht auf einem offenbaren Missverständniss, wenn die Ausdrücke »diminuez la distance verticale des feuilles« oder »en surbaissant encore les mérithalles« so gedeutet werden, als ob hier ein Kürzerwerden der einzelnen Internodien, d. h. eine Contraction derselben gemeint sei. Dasselbe gilt von dem einschlägigen Paragraphen der NAUMANN'schen Abhandlung über den Quincunx (S. 28), in welchem die »eminenten oder vorherrschenden Strophen« auf analytischem Wege bestimmt sind. Ebenso hat C. DE CANDOLLE in seiner oben citirten Schrift die in Rede stehenden Übergänge, soweit es sich bloss um die Epifanien DELPINO's handelt, in durchaus befriedigender Weise erklärt. Für diesen Zweck ist die geometrische Betrachtungsweise der genannten Autoren auch vollkommen ausreichend; es bedarf keiner Mechanik. Endlich glaube ich selbst den mechanischen Verlauf des Vorrückens der Contactlinien innerhalb der gegebenen Reihe mit mathematischer Bestimmtheit klar gelegt zu haben; ich wäre daher meinem Opponenten sehr verbunden, wenn er die schwachen Punkte, die er auch in meiner Darstellung gefunden haben will, näher bezeichnen wollte.

Die selbständigen Darlegungen DELPINO's betreffend, so habe ich bereits angedeutet, dass die von ihm construirte Kugelsäule *(pila sferotassica)* als das eigentliche Fundament seiner Theorie erscheint. Nach diesem Aggregat von Kugeln ohne gemeinsame Stütze, an welchem die Divergenz auf der Grundspirale $131° 48' 39''$ beträgt, soll die Blattbildung der höheren Gewächse sich richten. »Mit dem einfachen Experiment dieser Kugelsäule — so schliesst der Autor sein erstes Capitel auf S. 127 — betrachten wir das mechanische Grundproblem der Blattstellung als gelöst, da diese Säule ein vollkommenes Gleichgewicht darstellt.« Man erfährt indessen nicht, was hier unter

Gleichgewicht zu verstehen sei. Im strengeren Sinne des Wortes besteht überhaupt in einem solchen System mit ungleich geneigten Schrägzeilen gar kein Gleichgewicht. Es verhält sich genau so wie ein Dachstuhl mit ungleichen Sparren, dessen Giebel bekanntlich immer etwas seitlich, nach dem längeren Sparren zu verschoben wird, sobald die Widerlager oder die Sparren selbst gleichmässig nachgeben. Nur wenn alle Theile der Construction absolut starr und unverrückbar sind, unterbleibt diese Verschiebung; dann besteht also gewissermaassen Gleichgewicht. Ein solches Gleichgewicht ist aber in jedem beliebigen Organsystem möglich, welches auch die Neigung der Reihen sein mag; es bezeichnet einfach den Zustand der Unveränderlichkeit, der selbstverständlich für die Mechanik der Verschiebungsvorgänge nicht in Betracht kommt.

Ebenso giebt auch die Art und Weise, wie das phyllotactische Gleichgewicht gestört und dann wieder hergestellt werden soll, zu mancherlei Bedenken Veranlassung. Eine Störung müsse offenbar immer eintreten, so heisst es S. 136, sobald die Organe in transversaler Richtung stärker oder weniger stark wachsen als in longitudinaler. Das ist jedoch entschieden unrichtig. Alternirende Quirle, die wir uns durch Kreise dargestellt denken wollen, behalten doch jedenfalls ihr Gleichgewicht bei, auch wenn diese Kreise in noch so excentrische horizontale oder verticale Ellipsen übergehen, und es liegt kein Grund vor, für Spiralsysteme — sofern überhaupt hier von Gleichgewicht die Rede sein kann — etwas Anderes anzunehmen. Thatsächlich ist denn auch das Wachsthum, welches Delpino in den hierauf bezüglichen Abbildungen (Taf. V, Fig. 53—56) darstellt, ein in schiefer Richtung vorwiegendes, und dass hierdurch Drehungen zu Stande kommen, leuchtet allerdings ein. Man begreift aber nicht recht, wie ein Organsystem dazu kommen soll, sich beispielsweise erst durch ein stärkeres Wachsthum in linksschiefer Richtung aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage heraus zu drehen, um dieselbe dann nachträglich durch rechtsschiefes Wachsthum wiederherzustellen.

Die Annahme eines in schraubenliniger Richtung vorwiegenden Wachsthums steht überdies mit den Thatsachen im Widerspruch: denn die Querschnittsform der Organe ist bekanntlich mit Bezug auf die Längsrichtung in der grossen Mehrzahl der Fälle symmetrisch, und selbst die scheinbar unzweideutigsten Abweichungen erklären sich häufig durch blosse Abplattung in Folge des Druckes. Darum ist nach meinem Dafürhalten jeder Versuch, eine allgemeine Theorie der Blattstellungen auf solche Wachsthumsvorgänge zu basiren, von vornherein als verfehlt zu betrachten. Vollends verwerflich aber ist die Anwendung dieser Lehre, selbst wenn sie begründet wäre, auf die zweizeilige

Blattstellung an den seitlichen Auszweigungen mancher Bäume, wie z. B. der Ulmen, Kastanien etc., deren Hauptaxen schraubenlinige Anordnung zeigen. Hier nimmt DELPINO für die sämmtlichen Triebe ursprünglich Spiralstellung an; an den aufrechten bleibt diese Stellung zeitlebens erhalten, an den Seitenzweigen dagegen geht sie, seiner Angabe zufolge, durch eine starke Torsion in die zweizeilige über (S. 140). Umgekehrt sollen bei einigen Arten von *Aloë* Divergenzen von 180° durch Drehung in die kleineren der Spiralstellung verwandelt werden. Man weiss jedoch, dass alle diese vermeintlichen Drehungen in Wirklichkeit gar nicht vorkommen, da die beobachtete Stellungsänderung schon mit dem ersten Sichtbarwerden der Organe gegeben ist.

Durch die Kugelsäule soll auch erklärt werden, was angeblich alle bisherigen Theorien unerklärt gelassen, nämlich das Vorherrschen des Hauptsystems in der Natur; denn sie weist uns ja darauf hin, dass diese Herrschaft »nur eine unabwendbare und nothwendige Folge des möglichst besten mechanischen Gleichgewichts ist« (S. 161).

Diese Beispiele mögen genügen, um die Mechanik zu charakterisiren, auf welche die neue Theorie sich stützt. Die ferner liegenden morphologischen Fragen, welche der Autor nebenbei, sowie namentlich im dritten Theile des Buches behandelt, lasse ich hier unberührt.

VI.

Über Spiralstellungen bei Florideen.

Unter diesem Titel habe ich vor Kurzem eine kleine Mittheilung veröffentlicht[1], in welcher ich gezeigt zu haben glaube, dass auch die Spiralstellungen der Florideen durch Contactverhältnisse bedingt sind, welche trotz ihrer Eigenartigkeit die gleiche mechanische Rolle spielen, wie bei den höheren Gewächsen. Dieses Ergebniss schien mir einstweilen, so lange nicht widersprechende Thatsachen bekannt geworden, die Schlussfolgerung zu rechtfertigen, dass überhaupt schraubenlinige Stellungen ohne entsprechenden Contact im Pflanzenreich gar nicht vorkommen. Dabei rechnete ich die zweizeilige Anordnung der Blätter nur theilweise zu den Contactstellungen; ein anderer Theil lag offenbar ausserhalb der Tragweite meiner Theorie, da die Anlagen sich niemals berühren. Hier musste also die Verzweigungsebene durch äussere Kräfte, wie Schwerkraft, Licht und dergleichen bedingt sein.

---

[1] Monatsberichte der Berliner Akademie d. Wiss. April 1880.

Seitdem ist eine grössere Arbeit von Berthold[1] erschienen, welche namentlich über den eben angedeuteten Einfluss des Lichtes wichtige Beobachtungen enthält, daneben aber auch die schraubenlinigen Stellungsverhältnisse der Florideen behandelt und hierbei meiner Auffassung in einigen nicht unwesentlichen Punkten widerspricht. Ich benutze daher diesen Anlass, um die streitigen Punkte hier nochmals zu erörtern.

Berthold giebt zunächst zu, dass Stammspitzen, deren blatterzeugende Gliederzellen weit auseinander liegen, keine constanten Divergenzen zeigen. Er sagt S. 654 wörtlich: »Wie schon bei *Polysiphonia variegata* auseinandergesetzt, ist auch bei *Polysiphonia sertularioides* die anscheinend constante Divergenz rein secundär erzeugt und fehlt am Scheitel durchaus, wenn die jungen Blätter nicht in ganz gleichen Intervallen angelegt werden.« Das ist allerdings mehr, als ich selbst für nöthig halte. Ich verlange für das Zustandekommen einer regelmässigen Spiralstellung bloss Contact und dieser ist möglich, auch wenn gelegentlich zwei bis vier Gliederzellen keine Blätter erzeugen. Aber immerhin stimmen wir in der Hauptsache überein, darin nämlich, dass constante Divergenzen an der Stammspitze nicht vorkommen, wenn die jungen Anlagen allzuweit voneinander abstehen.

Berthold will nun aber beobachtet haben (a. a. O. S. 649 und 654), dass auch diese ursprünglich ungleichen Divergenzen durch nachträgliche Verschiebung ebenso constant (d. h. einander gleich) werden, wie diejenigen der gewöhnlichen Spiralstellung, und darin kann ich ihm nicht beistimmen. Ich habe an seinem eigenen Material, das er mir freundlichst zur Verfügung gestellt, ältere Stämme genug beobachtet, an welchen Divergenzen von circa $^1/_4$, $^1/_2$ und selbst von o ohne alle Regelmässigkeit auf einander folgten, und es schien mir kein Grund für die Annahme vorhanden zu sein, dass hier nennenswerthe Stellungsänderungen jemals stattgefunden haben. Die Divergenzen waren voraussichtlich von Anfang an ungleich und sind es geblieben. Die kleine Drehung des Stammes, auf welche die nach oben etwas schief gestellten Längsreihen der peripherischen Zellen hindeuten, kann hierbei nicht in Betracht kommen, da sie ja doch nur wenige Grade pro Internodium ausmachen würde. Übrigens bezieht sich diese ganze Controverse auf Vorgänge, die mit meiner Anschlusstheorie in keinem Zusammenhange stehen.

Viel wichtiger ist ein zweiter Punkt, welcher das Verhalten der blattbildenden Gliederzellen betrifft. Mit Rücksicht hierauf tritt

[1] Beiträge zur Morphologie und Physiologie der Meeresalgen. Pringsheim's Jahrb. Bd. XIII, S. 569.

BERTHOLD der schon früher von CRAMER und KNY ausgesprochenen Ansicht bei, wonach die obere Querwand solcher Gliederzellen gleich ursprünglich nach der Seite hin aufgerichtet sein soll, welche dem Entstehungsort des anzulegenden Blattes entspricht: »Denn — so sagt er auf S. 654 — bei *Polysiphonia variegata* z. B. ist, wie schon früher erwähnt, die fertile Gliederzelle sogleich doppelt so gross wie die sterilen und die Wand unzweifelhaft etwas aufgerichtet.« Die Figuren 12, 13 und 14 seiner Tafel XX sollen hierfür die Belege liefern.

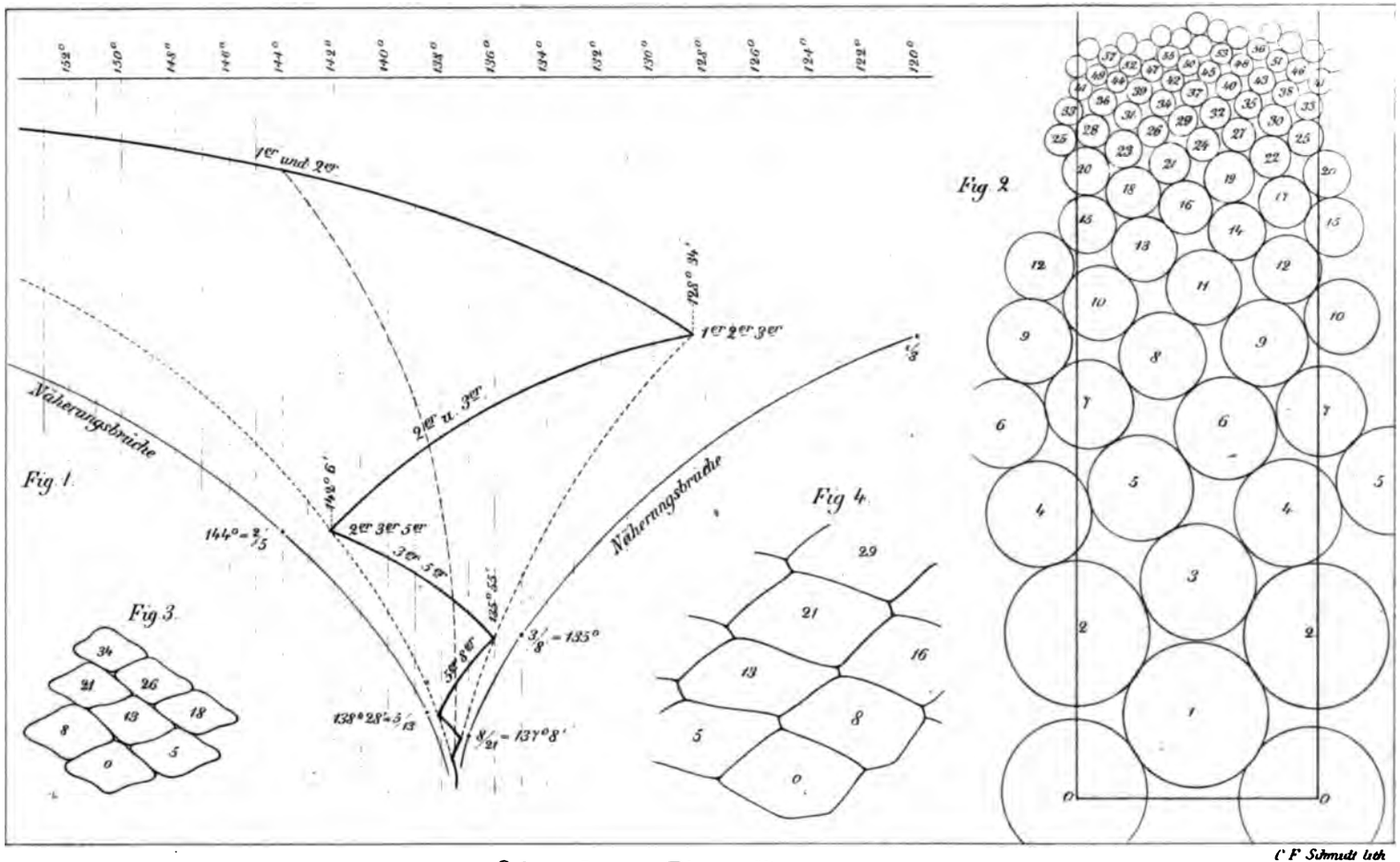
Ich vermag indessen nicht einzusehen, dass diese Figuren für oder gegen irgend etwas beweisen. Zwar erscheint hier eine bestimmte Gliederzelle durch Form und Grösse ausgezeichnet; allein wer sagt uns, ob in diesem Stadium die neue Anlage vielleicht schon vorhanden ist und gerade durch ihr Vorhandensein das Volumen der Zelle vergrössert und die Wand aufgerichtet hat, oder ob wir den Beginn der Blattbildung auf eine spätere Zeit zu verlegen haben. BERTHOLD nimmt natürlich das Letztere an, ich dagegen das Erstere; wer hat nun Recht? Meines Erachtens ist es unmöglich, die Frage an Individuen mit unregelmässiger Blattbildung, wie die in Rede stehenden, zu entscheiden; denn bei jeder Gliederzelle, die man als blatterzeugende erkennt, würde sich immer wieder dieselbe Verschiedenheit in der Deutung geltend machen. Dagegen gelangt man, wie ich glaube, sicher zum Ziele, wenn man die Beobachtungen an Exemplaren vornimmt, die ausnahmslos an jedem Gliede ein Blatt tragen, und auch unter diesen die günstigsten auswählt. Als solche sind diejenigen zu bezeichnen, deren drei bis vier oberste Gliederzellen noch keinerlei Andeutungen seitlicher Organe zeigen. Hier muss sich nothwendig entscheiden lassen, ob die Querwände zwischen den Gliedern ursprünglich parallel oder nicht parallel sind. Sind sie parallel, wie ich an *Spyridia* sicher beobachten konnte, so leuchtet ein, dass die Aufrichtung der Wand eine nachträgliche Erscheinung ist, deren Gleichzeitigkeit mit der Blattbildung zugleich auf ihre Abhängigkeit von dieser hinweist. Das Gegentheil ist mir niemals vorgekommen, aus den Abbildungen und Beschreibungen Anderer auch nicht wahrscheinlich geworden. So lange also meine Opponenten nicht bessere Belege für ihre Auffassung beibringen, habe ich keinen Grund, die meinige preiszugeben.

Die weitere Angabe BERTHOLD's, dass die Grösse der Divergenz von der Zahl der sterilen Glieder zwischen je zwei Blättern abhängig sei, soll den von ihm angenommenen Causalnexus bei der Blattbildung begründen und erläutern. Er sagt S. 649: »Ich fand die Divergenz, wenn zwei sterile Internodien eingeschoben waren, nach Schätzung unter dem Mikroskop ungefähr gleich 60°, bei 4—6 eingeschobenen

sterilen Gliedern betrug sie circa 90°, bei 12—14 sterilen Gliedern circa 120°, bei 18 sterilen Gliedern schätzte ich ungefähr 140°, bei 23 sogar fast 180° Divergenz zwischen zwei aufeinander folgenden Blättern.« Wäre dies Alles richtig, so müssten hier freilich ganz andere ortbestimmende Einflüsse angenommen werden, als sie durch die Annahme von Contactwirkungen gegeben sind. Allein so bestimmt diese Aussagen auch klingen, — ich kann sie nicht bestätigen. Nach einer sorgfältigen Musterung des Berthold'schen Alcoholmaterials, wobei ich eine Anzahl von Stammspitzen, die ich drehen konnte, bezüglich der vorkommenden Divergenzen genau studirt und aufgenommen habe, bin ich zu dem Ergebniss gelangt, dass die Zahl der eingeschobenen sterilen Glieder irgend einen bestimmbaren Einfluss auf die Divergenzen nicht ausübt, auch dann nicht, wenn dieselben wegen spärlicher Blattbildung unregelmässig ausfallen.

Divergenzen von $^1/_4$ des Umfanges sind z. B. bei *P. variegata* constatirt worden für die folgenden Zahlen eingeschobener blattloser Gliederzellen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 13, 15; desgleichen bei *P. sertularioides* für die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5. Andererseits kommen aber auch Divergenzen von ca. $^1/_2$ des Umfangs bei den verschiedensten Längen der Internodien vor. Bei dieser Sachlage ist es doch ganz unmöglich, die Berthold'sche Regel als zutreffend anzuerkennen.

Endlich bemerke ich noch, dass der von Berthold (a. a. O. S. 653) in Abrede gestellte Contact zwischen den jungen Anlagen unzweifelhaft besteht, jedoch an armblätterigen Stammspitzen mit zahlreichen Axillarknospen, die oft bis zum Scheitel hinaufreichen, anscheinend etwas früher als sonst wieder aufgehoben wird. Übrigens ist mir keineswegs genau bekannt, wie sich die Anschlussverhältnisse an solchen Exemplaren gestalten. Das Studium derselben wird nämlich durch die Länge der Internodien (gewöhnlich 4—5 sterile Zellen) so sehr erschwert, dass man diese spärlich beblätterten Formen gern bei Seite legt, sobald günstigeres Material zur Verfügung steht. Nach meinen Erfahrungen ist es durchaus nothwendig, die fraglichen Contactbeziehungen an etwa 3—6blättrigen, aber möglichst kurzen Stammspitzen zu studiren, die man unter dem Mikroskop aufrichten und drehen kann. Das ist natürlich bei den früher von mir untersuchten Formen viel leichter als bei den oben erwähnten; darum habe ich mein Augenmerk vorzugsweise auf jene gerichtet.



Schwendener: Blattstellungen.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Verschiebungscurve für die Hauptreihe 1, 2, 3, 5, 8 ... Der oberste Bogen der Zickzacklinie, welcher sich nach rechts bis $128^{\circ}\ 34'$ erstreckt, ist in der Richtung nach links bis 180° verlängert zu denken; ebenso die mit »Näherungsbrüche« bezeichnete Curve der linken Seite und die benachbarte punktirte, welche die Ecken der Zickzacklinie verbindet. Man sieht, dass diese letztere Curve mit der entsprechenden auf der rechten Seite einen schmäleren Spielraum begrenzt, als die beiden Curven der Näherungsbrüche. — Die gestrichelte Linie in der Mitte der Figur entspricht den Divergenzen bei rechtwinkliger Kreuzung der Contactzeilen; sie geht demnach von $^2/_5 = 144^{\circ}$ auf dem obersten Bogen nach $^5/_{13}$ auf dem zweiten, dann weiter über $^{13}/_{34}$, $^{34}/_{89}$, $^{89}/_{233}$ u. s. w. nach dem Grenzwerth.

Fig. 2. Schematische Darstellung des Überganges von der alternirend zweizeiligen Stellung in die Spiralstellungen der Hauptreihe, herbeigeführt durch Kleinerwerden der Organe.

Fig. 3. Stellung der Fruchtschuppen am einjährigen Zapfen von *Pinus Pinaster*, circa zweimal vergrössert. Es besteht Contact auf den 5er, 8er und 13er Zeilen.

Fig. 4. Stellung der Fruchtschuppen am ausgewachsenen Zapfen von *P. Pinaster*. Die 3er sind Contactzeilen geworden; die 13er sind es nicht mehr.

34. Über die centralen Organe für das Sehen und das Hören bei den Wirbelthieren.

Von Hermann Munk.

(Vorgelegt am 12. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXIV]; — ausgegeben am 19. Juli.)

Gegenüber meinen früheren Mittheilungen über das Grosshirn ist der heutigen gewissermaassen eine niederere Aufgabe zugewiesen. Als ich an die Untersuchung des Grosshirns herantrat, durfte die Frage nach den Functionen, welche dem Organe im ganzen zukommen, durch Flourens und seine Nachfolger als erledigt gelten, und es war um eine weitere Einsicht in das Organ zu thun, für welche die Fritsch-Hitzig'sche Untersuchung jüngst die Bahn eröffnet hatte. Mit der Erkenntniss, zu welcher diese Untersuchung führte, dass das planlose grobe Tasten am Grosshirn die Misserfolge eines halben Jahrhunderts verschuldet hatte, und dass es methodischer, in der Ausdehnung beschränkter und hinsichtlich des Ortes genau bestimmter Angriffe des Grosshirns bedürfte, um das Dunkel des Organes zu lichten, war mir mein Weg im grossen und ganzen vorgezeichnet, und so habe ich die Functionen der einzelnen Abschnitte der Grosshirnrinde Schritt vor Schritt beim Hunde und beim Affen verfolgt. Aber gerade die neuen Ermittelungen haben es mit sich gebracht, dass ich jetzt mich noch einmal zurückwenden und die alte Frage nach den Functionen des ganzen Grosshirns wieder aufnehmen muss.

1. Geschichtliches.

Als Flourens die Thiere nach der Entfernung der Grosshirnhemisphären blind und taub gefunden hatte, stellte er in seinen ersten Mittheilungen das Grosshirn als das ausschliessliche Organ der Empfindungen hin.[1] Aber Cuvier in seinem akademischen Berichte rügte diese Folgerung als zu weit gehend. Flourens sage selber, meinte Cuvier[2], dass die Thiere in einem Schlafzustande seien; und man

[1] Archives générales de Médecine. 1. ann. T. 2. 1823. p. 355.

[2] Flourens, Recherches expérimentales sur les propriétés et les fonctions du système nerveux. Paris (1. édit. 1824) 2. édit. 1842. p. 78—9.

glaube doch nicht im entferntesten, dass ein schlafender Mensch, der sich bewegt, der eine bequemere Lage anzunehmen weiss, ganz ohne Empfindungen sei, und sehe doch nicht darin, dass die Wahrnehmung der Empfindungen nicht deutlich gewesen ist und die Empfindungen nicht in der Erinnerung geblieben sind, einen Beweis, dass der Mensch keine Empfindungen gehabt hat. Also liesse sich nur sagen, dass das Grosshirn der einzige Körpertheil ist, in welchem die Gesichts- und Gehörsempfindungen zur Vollendung und dem Thiere zur Wahrnehmung kommen können; wollte man, so liesse sich noch hinzufügen, dass das Grosshirn auch der Ort ist, wo alle Empfindungen eine deutliche Form annehmen und dauerhafte Spuren und Erinnerungen zurücklassen, dass es mit einem Worte der Sitz des Gedächtnisses ist, mittels dessen es dem Thiere das Material zu seinen Urtheilen liefert. Diese Berichtigung erkannte dann auch Flourens[1] voll und ganz an, und er liess deshalb in der Folge an den des Grosshirns beraubten Thieren bloss die Wahrnehmungen der Empfindungen oder die Intelligenz verloren, dagegen das Empfindungsvermögen durchaus erhalten sein.

Indess ist auf Flourens' Übereinstimmung mit Cuvier wenig Gewicht zu legen. Sieht man genauer zu, so lässt sich unter Flourens' zahlreichen Erörterungen bloss eine einzige Stelle finden, welche der Cuvier'schen Auffassung entsprechen könnte. Flourens betont dort[2], dass alle Wahrnehmungen zusammen mit allem Urtheilen und allem Wollen gleichmässig an alle Partien des Grosshirns gebunden sind, obwohl jedes Sinnesorgan seinen besonderen Ursprung in der Hirnmasse habe, die Quelle der Action der Retina und des Spieles der Iris die Corpora quadrigemina seien und auch die Sinne des Geschmacks, des Geruchs, des Gehörs ihren besonderen Ursprung in der besonderen Anschwellung haben, aus welcher ihre Nerven hervorgehen; man könne daher, indem man jeden dieser besonderen Ursprünge für sich zerstört, jeden der vier von ihnen hergeleiteten Sinne für sich zerstören, während man, wenn nicht alle diese Sinne, wenigstens all ihr Resultat mit einem Schlage vernichten könne durch die blosse Zerstörung des Centralorganes, in welchem ihre Empfindungen sich in Wahrnehmungen umsetzen. Überall sonst dagegen spricht Flourens Sehen, Hören u. s. w. durchaus als Wahrnehmungen an, deren Zustandekommen an das Grosshirn gebunden sei, und lässt die Empfindungen der Retina und des Nervus opticus es sein, deren Wahrnehmung das Sehen ausmacht[3]; er sieht darin, dass die grosshirnlosen Thiere auf Quetschung von

[1] Recherches etc. p. 78, Note.
[2] L. c. p. 99—100.
[3] L. c. p. 24; 36—7; 49; 97.

sensiblen Nerven oder Rückenmarkssträngen schreien und heftig sich bewegen, ebenso dass auf Lichteinfall in das Auge die Pupille sich verengt, Zeugnisse für das Fortbestehen der Empfindungen;[1] er stellt wiederholt und sogar noch in der Vorrede zur zweiten Auflage (1842), wo er seine Hauptergebnisse zusammenfasst, das Aufnehmen und Leiten der Eindrücke als das Empfindungsvermögen dem Wahrnehmen und Wollen als der Intelligenz gegenüber;[2] er schreibt ausdrücklich die Eigenschaft, die Eindrücke zu empfinden, den Corpora quadrigemina, den Pedunculi cerebri, der Medulla oblongata, dem Rückenmarke und den Nerven zu.[3] Das beweist unzweifelhaft, dass der grosse Experimentator nicht nur seinen grossen Kritiker nicht verstanden, dessen feine Unterscheidung von Wahrnehmung und Empfindung oder von deutlicher und undeutlicher Empfindung nicht erfasst hat, sondern selbst nicht einmal zu einer richtigen Vorstellung über das Empfinden überhaupt gelangt ist.

Erst nach Flourens kam die Cuvier'sche Auffassung wirklich zur Geltung und um so entschiedener, als auch die thatsächliche Unterlage eine wesentliche Veränderung erfuhr. Man fand bei der Wiederholung von Flourens' Versuchen, dass die grosshirnlosen Thiere nicht blind, nicht taub u. s. w. waren, wie es Flourens angegeben hatte, sondern dass sie Hindernissen auswichen, der Bewegung des Lichtes mit dem Kopfe folgten, auf starke Geräusche Bewegungen machten u. s. w.[4] Demgemäss liess man mit der Abtragung des Grosshirns die Wahrnehmung der Empfindungen nicht ganz vernichtet sein, sondern rohe, undeutliche, unvollkommene Wahrnehmungen der Licht-, Ton- und anderen Empfindungen noch fortbestehen; und diese unvollkommenen Wahrnehmungen liess man im Mittelhirn oder in der Medulla oblongata zustandekommen, während das Grosshirn zur Vervollkommnung und intellectuellen Ausarbeitung der Empfindungen dienen, der Ort der intellectuellen Wahrnehmungen sein sollte. Ganz klar und bestimmt sprach man sich dahin aus, dass das Sehen, Hören u. s. w. nicht an das Grosshirn gebunden sind, indem auch noch

---

[1] L. c. p. 15—6; 24—5; 145—6.

[2] L. c. p. XII; 237.

[3] L. c. p. 16; 25; 237.

[4] Desmoulins (et Magendie), Anatomie des systèmes nerveux etc. Paris 1825. T. II. p. 628—9. — Bouillaud, Journal de Physiologie expér. T. X. 1830. p. 40—4. — Magendie, Leçons sur les fonctions et les maladies du système nerveux. Paris 1841. T. I. p. 254; 288. T. II. p. 353. — A. W. Volkmann, Rud. Wagner's Handwörterbuch der Physiologie. Bd. I. 1842. S. 580. — Longet, Anatomie und Physiologie des Nervensystems (1842). Übersetzt von Hein. Leipzig 1847. Bd. I. S. 522—8. — Renzi, Annali universali di Medicina. Vol. 185 (1863) p. 471 sg. Vol. 186 p. 139 sg.; 386 sg. Vol. 189 (1864) p. 111 sg. — Vulpian, Leçons sur la physiologie du système nerveux. Paris 1866. p. 541—3; 577; 669—70.

nach der Ausschaltung dieses Organes die Sinnesempfindungen in den niedereren Hirntheilen entstehen und für Bewegungen Verwerthung finden, und dass erst die aus den Sinnesempfindungen gebildeten Vorstellungen, das Erkennen oder Verstehen und die Erinnerung des Gesehenen, Gehörten u. s. w. den Leistungen des Grosshirns zuzuschreiben sind. Meist brachte man dabei zugleich die vollkommenen Empfindungen oder Wahrnehmungen des Grosshirns als bewusste in Gegensatz zu den unvollkommenen Empfindungen oder Wahrnehmungen als unbewussten. (Joh. Müller[1], Longet[2], Renzi[3], Lussana[4], Vulpian[5].)

Diese Anschauungen sind auch in der Folge ohne Widerspruch die herrschenden geblieben, höchstens dass hin und wieder die Leistungen des Grosshirns noch mehr eingeschränkt wurden; und fest eingebürgert und allgemein verbreitet fand ich die Anschauungen vor, wie die Musterung der Autoren lehrt, welche unmittelbar vor mir oder neben mir mit dem Studium des Gehirns sich befassten. Wo Hr. Ferrier die Localisation der Sinneswahrnehmung in der Grosshirnrinde untersucht, hebt er hervor, dass er mit Sinneswahrnehmung *(sensory perception)* und mit dem Worte *sensation*, dass er manchmal brauche, die bewusste Unterscheidung der Eindrücke und nicht die blossen Sinneseindrücke selber meine, und er lässt überall nach der Zerstörung der Rindentheile bloss die Sinneswahrnehmung verloren sein, die Sinneseindrücke aber fortbestehen; gelegentlich führt er zur Erläuterung an, dass ein Thier, welches plötzlich zurückfährt, wenn ein Licht vor seine Augen gebracht wird, ganz blind sein könne in dem Sinne, in welchem er diesen Ausdruck brauche.[6] An anderer Stelle sagt Hr. Ferrier: da im Mittelhirn allein Sinneseindrücke nicht zum Bewusstsein kommen, so sei zu schliessen, dass die Wahrnehmung *(sensation)* eine Function der höheren Centren ist; er stimme mit Flourens überein, nach welchem die Wahrnehmung *(sensation proper)* durch die Entfernung des Grosshirns verloren geht; bezeichne man mit Aesthesis einen rein physischen Eindruck auf die speciellen Sinnescentren und mit Noësis einen bewussten Eindruck, so lasse sich die Thätigkeit der Mittelhirn- und Kleinhirn-Centren eine aesthetikokinetische nennen und so von der kentro-kinetischen[7] oder excitomotorischen Thätigkeit des Rückenmarkes einerseits und der noëtiko-

[1] Handbuch der Physiologie. Bd. I. 4. Aufl. Koblenz 1844. S. 720—2; 729.
[2] A. a. O. Bd. I. S. 528—9; 522 ff.
[3] L. c. Vol. 185 (1863) p. 475. Vol. 186 p. 402. Vol. 189 (1864) p. 131; 135—6.
[4] Ann. univers. di Medic. Vol. 187 (1864) p. 5—13.
[5] L. c. (1866) p. 540—8; 559—61; 569; 577—81; 665—75; 708—9.
[6] Ferrier, Experiments on the brain of monkeys; second series. Philos. Transact. Vol. 165. 1875. Part II. p. 445; 450—1; 487.
[7] (τὸ κέντρον der Reiz.)

kinetischen Thätigkeit des Grosshirns andererseits unterscheiden.[1] Hr. Goltz[2] erklärt Longet's Meinung, dass grosshirnlose Thiere ihre Gesichtseindrücke nicht mehr für zweckmässiges Handeln zu verwerthen wissen, für unhaltbar; nach ihm ist die Fähigkeit, bei der Fortbewegung des Körpers mit Benutzung der Augen Hindernisse zu vermeiden, eine Function der Hirntheile, welche hinter dem Grosshirn liegen; er stimme daher durchaus der Ansicht von Lussana und Lemoigne bei, dass die Thiere mit verstümmeltem Grosshirn wesentlich maschinenmässig, ohne eine verwickelte Überlegung oder eine grosse Willensanstrengung nöthig zu haben, Hindernissen aus dem Wege gehen; an Hunden, welchen die Rindensubstanz des Grosshirns in beliebiger Ausdehnung zerstört ist, scheinen die Empfindung sowie sämmtliche Sinne stumpf, die Handlungen des Thieres werden noch durch alle Sinne bestimmt, aber die Sinneseindrücke werden nur mangelhaft für zweckmässiges Handeln verwerthet. Hr. Eckhard, indem er zum Schlusse seiner Physiologie des Gehirns[3] die Erfahrungen noch einmal zusammenstellt »und dabei nur diejenigen betont, über welche gar keine oder nur unbedeutende Differenzen bestehen«, lässt Säugethiere, Vögel und Frösche noch Gesichtswahrnehmungen haben, wenn das Grosshirn abgetragen ist, und bei Zerstörung der Seh- und Vierhügel sie verlieren; minder sicher, wenn auch durch mehrere Versuche angedeutet, sei die Existenz anderer Sinneswahrnehmungen bei gleicher Verstümmelung; indem die Thiere noch sehen und ihre Bewegungen augenscheinlich nach diesen Wahrnehmungen einrichten, lasse sich kaum leugnen, dass sie noch Seelenthätigkeiten entwickeln, da wir von solchem Benehmen ohne die letzteren keine genügende Vorstellung haben. Endlich Hr. Sigm. Exner[4] stellt das Grosshirn als das Organ der Intelligenz hin; in deren Sitze, der Rinde, geschehe die geistige Verarbeitung der Sinneseindrücke; die grosshirnlosen Thiere sehen und (weniger sicher) hören noch, doch müsse es dahingestellt bleiben, ob man dies ein Sehen und Hören im gewöhnlichen Sinne nennen wolle; Renzi dürfte der erste sein, der hier das Richtige getroffen habe, indem er von Säugethieren, denen er eine Hemisphäre entfernt hatte, sage, dass ihre Intelligenz nicht gelitten habe, dass sie auf dem Auge der entgegengesetzten Seite auch nicht blind ge-

---

[1] Ferrier, The functions of the brain. London 1876. p. 45—6. (Übersetzt von Obersteiner. Braunschweig 1879. S. 51.)

[2] Pflüger's Archiv, Bd. 13. 1876. S. 15; 25—6; Bd. 20. 1879. S. 15; 39—40. — Vgl. Goltz, Beiträge zur Lehre von den Functionen der Nervencentren des Frosches. Berlin 1869. S. 63—7; 82—4; 94—5.

[3] Hermann's Handbuch der Physiologie, Bd. II. Theil II. Leipzig 1879. S. 136.

[4] Ebenda, S. 200—3; 206.

worden seien, dass sie aber die geistige Auffassung der Gesichtseindrücke und der Bewegungen der entgegengesetzten Seite verloren hatten. Ich brauche kaum hinzuzufügen, dass auch bei den pathologischen Betrachtungen die »subcorticalen oder infracorticalen Sinnescentren« als die Orte unvollkommener und unbewusster Sinnesempfindung den höheren Centren in der Grosshirnrinde gegenübergestellt wurden.[1]

2. Meine Ermittelungen am Hunde und am Affen.

So war es nur natürlich, dass ich bei meinen Grosshirn-Untersuchungen zu allererst[2], als ich durch die Exstirpation gewisser Rindenpartien der Hinterhauptslappen Seelenblindheit und durch die Exstirpation gewisser Rindenpartien der Schläfenlappen Seelentaubheit des Hundes erzielt hatte — dort erkannte der Hund nicht, was er sah; hier verstand der Hund nicht, was er hörte — und auf besondere dem Sehen bezw. Hören dienende Abschnitte der Grosshirnrinde schloss, diese Sehsphären und Hörsphären, wie ich sie nannte, bloss als die Orte der Gesichts- bezw. Gehörsvorstellungen, als den Sitz der Erinnerungsbilder der Gesichts- bezw. Gehörsempfindungen ansprach. Mit der Erkenntniss, so zu sagen, der Theilbarkeit der Functionen der Sinnesvorstellungen und des Gedächtnisses, welche nach den Flourens'schen Versuchen dem gesammten Grosshirn zukamen, mit dem experimentellen Nachweise, dass die Vorstellungen und die Erinnerungsbilder, je nachdem sie dem einen oder dem anderen Sinne zugehören, an verschiedene Grosshirnpartien gebunden sind, musste ja der nächste und zugleich niederste Fortschritt, der hier möglich war, gemacht scheinen.* Doch

*In seiner vierten Abhandlung über die Verrichtungen des Grosshirns[3] betont Goltz, er habe die Sehstörung, welche ich Seelenblindheit nannte, entdeckt und ihre Erscheinungen so geschildert, dass für mich nur übrig blieb, sein Kind zu taufen. Diese Bemerkung schliesst zwei sonderbare und kaum glaubliche Missverständnisse ein. Goltz hatte beobachtet, dass ein Hund nach erheblicher Verstümmelung der Rinde einer Hemisphäre, gleichviel wo die Verstümmelung erfolgt ist, auch wenn sie ausschliesslich innerhalb der sogenannten motorischen Zone Hitzig's gelegen ist, neben Störungen der Empfindung und der Bewegung an der entgegengesetzten Körperhälfte auch eine Sehstörung der Art zeigt, dass er wohl Hindernisse mit grossem Geschicke umgeht, aber Fleisch nicht wahrnimmt, die Schätzung der Tiefe

[1] Vgl. Meynert, Über Fortschritte im Verständniss der krankhaften psychischen Gehirnzustände. Wien 1878. S. 51—2.

[2] Verhandlungen der Berliner Physiologischen Gesellschaft, 1876/77 No. 16. — Herm. Munk, Über die Functionen der Grosshirnrinde. Berlin 1881. S. 11—13. (Für meine ersten sieben Mittheilungen aus den Jahren 1877—80 werde ich auf diese Sammlung derselben späterhin in der Regel verweisen.)

[3] Pflüger's Archiv, Bd. 26. 1881. S. 42—3; 46—7.

die Folgen der Entzündung der genannten Lappen, welche gelegentlich zur Beobachtung kamen, und die Erfolge weiterer Exstirpationen belehrten mich dann eines Besseren. Sie zeigten, dass beim Hunde nicht erst die Sinnesvorstellungen, sondern auch schon die niedereren centralen Sinnesvorgänge, die Sinnesempfindungen und Sinneswahrnehmungen, in den Sinnessphären der Grosshirnrinde zustandekommen, so dass durch den Verlust der Sinnessphären das Thier nicht bloss für die Dauer seelenblind, seelentaub u. s. w. wird, sondern zu bleibender voller Blindheit, Taubheit u. s. w. verurtheilt ist, gar nicht mehr sieht, gar nicht mehr hört u. s. w. Und je mehr dieser neue Erwerb, den ich schon in meiner zweiten Mittheilung anzeigte und

verloren hat und beim Anblick furchterregender Gegenstände nicht erschrickt.[1] Darauf stützt Goltz die obige Behauptung, dass er die Seelenblindheit entdeckt habe: und er vergisst nicht nur, dass er selber gleichartige Beobachtungen von Lussana und Lemoigne herangezogen hat[2], sondern er muthet uns auch zu, Flourens und alle seine Nachfolger, insbesondere Longet, Renzi, Lussana, Vulpian[3] zu übersehen, welche durch Grosshirn-Verstümmelungen neben anderen Störungen auch Seelenblindheit bedingt fanden. Indess würde ich darüber kein Wort verloren haben: ich muss nur dagegen protestiren, dass Goltz mir unterschiebt, ich hätte einen Anspruch auf seine vermeintliche Entdeckung gemacht. Das ist nicht nur nie und in keiner Form geschehen, sondern es ist auch gerade das Gegentheil der Fall. Für mich hat zu den spärlichen Thatsachen, welche den Inhalt der Grosshirn-Physiologie vor Hitzig ausmachten, gerade vor allem das gehört, worin die Experimentatoren übereinstimmten, dass die Thiere nach Grosshirn-Exstirpationen neben anderen Störungen, die sie zeigen, weder das Gesehene erkennen, noch das Gehörte verstehen, noch das Berührte fühlen u. s. w. Davon ausgehend habe ich gezeigt, dass das Thier, wenn eine bestimmte Rindenpartie der Hinterhauptslappen entfernt ist, das Gesehene nicht erkennt und wiederum, wenn eine bestimmte Rindenpartie der Schläfenlappen abgetragen ist, das Gehörte nicht versteht, während es im übrigen jedesmal wie das normale Thier sich verhält. Den damit erzielten Fortschritt lehrt oben der Text, und ich hätte nur noch hinzuzufügen, dass eben dieses Fortschrittes wegen, eben weil nunmehr die Störungen jede für sich gesondert zu verfolgen waren, auch die Erfindung von »Seelenblindheit« und »Seelentaubheit« ein Bedürfniss geworden war. Goltz hat also hier, wo ich betheiligt bin, zwei ganz verschiedene Dinge mit einander verwechselt. Und darum, weil Goltz nicht zum Verständniss der Dinge kommt, weil er trotz seiner vieljährigen Beschäftigung mit dem Grosshirn sogar noch über die ältesten Errungenschaften des Gebietes sich in Unklarheit befindet, lässt er mich frischweg »mit grösster Umsicht seine Beobachtungen ausnutzen, ohne seinen Namen zu nennen«[4]! —

---

[1] Pflüger's Archiv, Bd. 13. 1876. S. 16—24.
[2] Ebenda, S. 24—5.
[3] S. o. S. 796; vgl. auch Exner — oben S. 797.
[4] Pflüger's Archiv, Bd. 26. 1881. S. 46.

in der dritten[1] ausführlich darlegte, nach den überkommenen Anschauungen überraschen musste, desto mehr habe ich ihn durch immer weitere Versuche prüfen zu sollen geglaubt, desto mehr Beweise habe ich in meinen späteren Mittheilungen beigebracht, bis endlich die äusserste Sicherheit erreicht war.

Als die Sehsphäre des Hundes ergab sich[2] — gleichmässig an jeder Hemisphäre — diejenige Rindenpartie, welche durch die Schraffirung in den Figg. 1—4 der meiner sechsten Mittheilung beigegebenen Tafel genau angezeigt ist, und welche kurz und grob als die Rinde des Hinterhauptslappens sich bezeichnen lässt, dessen Decke sie sowohl an der Convexität, wie an der medialen Seite, wie endlich auch an der hinteren Seite der Hemisphäre bildet. Mit jeder partiellen Sehsphären-Exstirpation war ein bleibender Gesichtsfeld-Defect gesetzt, der Hund sah nie mehr, was auf einem Theile seiner Retinae sich abbildete. Und zwar entsprach dem Verluste jeder einzelnen Sehsphärenpartie die Erblindung für eine bestimmte Retinapartie: dem äussersten lateralen Stücke der Sehsphäre erwies sich zugeordnet der äusserste laterale Theil der gleichseitigen Retina, dem viel grösseren medialen Stücke der Sehsphäre der viel grössere mediale Theil der gegenseitigen Retina, dem vorderen Sehsphärenabschnitte die obere Retinapartie, dem hinteren Sehsphärenabschnitte die untere Retinapartie u. s. w. War die eine Sehsphäre ganz und von der anderen das äusserste laterale Stück exstirpirt, so war der Hund für die Dauer blind auf dem der ersteren Sehsphäre gegenseitigen Auge. Waren endlich beide Sehsphären ganz exstirpirt, so war und blieb der Hund auf beiden Augen blind*. Und immer war die Blindheit eine voll-

* In der Reihe meiner Veröffentlichungen über die Grosshirnrinde stellt sich der Versuch mit Totalexstirpation beider Sehsphären als das lange erstrebte und endlich erreichte Endglied einer ganzen Kette von Versuchen dar, bei welchen mit der Entfernung immer grösserer Partien der Sehsphären immer kleinere und dabei an bestimmte Partien der Retinae geknüpfte Reste des Gesichtssinnes übrig blieben. Aber wenn ich davon auch ganz absehe, ich wüsste nicht, wie noch schärfer als schon durch die Darlegung für sich allein, welche ich von dem Versuche gab[3], es hätte zum Ausdruck kommen können, dass durchaus die völlige Fortnahme genau der durch Wort und Bild als Sehsphären bezeichneten Rindenpartien erforderlich ist, um den totalen Verlust des Gesichtssinnes herbeizuführen, und dass die Erhaltung

[1] Verhandl. d. Berl. Physiolog. Ges., 1877/78 No. 9 u. 10 (Sitzung vom 15. März 1878). — Functionen u. s. w. S. 31 ff.

[2] Functionen u. s. w. S. 31—6; 76—93; 96—108. — Ich muss es bei einer kurzen Übersicht der hier wichtigsten Ergebnisse bewenden lassen und im übrigen, insbesondere auch hinsichtlich der genauen Schilderungen des Verhaltens der verstümmelten Thiere auf meine früheren Mittheilungen verweisen.

[3] Functionen u. s. w. S. 96—102.

kommene; so dass zwar auf Lichteinfall in das Auge die Pupille sich verengte, aber in keiner Weise mehr ein Einfluss des Lichtes auf die Handlungen des Thieres bemerklich wurde.

Als die Hörsphäre des Hundes stellte sich[4] — wiederum gleichmässig an jeder Hemisphäre — die Rinde des Schläfenlappens heraus in der Ausdehnung, welche die Abbildungen meiner neunten Mittheilung anzeigen. Die totale Exstirpation einer Hörsphäre brachte Taubheit des Hundes auf dem gegenseitigen Ohre, die totale Exstirpation beider Hörsphären Taubheit auf beiden Ohren mit sich; immer war die Taubheit eine vollkommene und blieb für die Dauer bestehen. War ein grösseres Stück einer Hörsphäre exstirpirt, so hörte der Hund auf dem gegenseitigen Ohre fortan nur unvollkommen, und zwar boten sich je nach der Lage der Exstirpationsstelle die einen oder die anderen Defecte im Hören dar.

eines kleinen Restes einer Sehsphäre genügt, um den Hund soviel sehen zu lassen, dass er Hindernisse vermeidet, die Treppe geht u. s. w. Dennoch habe ich einen leichtfertigen Widerspruch von Goltz nicht zu verhüten vermocht. Die Tendenz verfolgend, an einer oder beiden Hemisphären oder auch etwa an einer Hälfte einer Hemisphäre die Rinde ganz zu exstirpiren, hat Goltz doch immer nur, wie er wiederholt es selber sagt[1], eine sehr ausgedehnte Zerstörung der nach Abnahme des Schädeldaches »von oben her sichtbaren« Rinde herbeigeführt oder den grössten Theil der »von oben her sichtbaren« Rinde fortgeschafft; und mehr hat er auch mit seinen Spül-, Stech- und Sägemethoden gar nicht erreichen können, weil die übrige Oberfläche des Grosshirns seinen operativen Angriffen unzugänglich war, wenn die Versuchsthiere am Leben bleiben sollten. Dass nun Goltz an Hunden, welchen die Rinde der Hinterhauptslappen bloss an der Convexität der Hemisphären, nicht aber an deren medialen und hinteren Seiten exstirpirt war, noch Reste des Gesichtssinnes beobachtet hat, wird Jedermann nur natürlich und meinen Ermittelungen über die Sehsphären entsprechend finden. Aber wenn Goltz darauf hin es als eine »Thatsache« ausgiebt, »dass ein Thier mit vollständiger Abtragung der Rinde der Hinterlappen keineswegs dauernd blind ist«, wenn er mit Emphase verkündet, »dass die gesammte Sehsphäre Munk's fortgenommen werden kann, ohne dass das Thier blind wird«[2], so wird das Jedermann unbegreiflich sein: und mindestens wird man es nicht ernsthaft nehmen können, da doch, was schon Goltz' Abbildungen[3] so deutlich zeigen, ihm erst recht bei der Betrachtung der Gehirne sogleich hat auffallen müssen, dass die mediale und die hintere Rinde der Hinterhauptslappen und damit ansehnliche Theile der Sehsphären erhalten waren.

---

[1] Pflüger's Archiv. Bd. 26. 1881. S. 5; 13; 15; 30; 33.

[2] Ebenda, S. 41; 48. — Vgl. S. 18; 42.

[3] Ebenda, Taf. I Fig. 2; Taf. II Fig. 3 (vgl. dazu S. 18); Taf. III Fig. 5 (vgl. dazu S. 23).

[4] Functionen u. s. w. S. 40—1. — Monatsberichte der Berliner Akademie d. Wiss. 1881. S. 470—82. (9. Mittheilung.)

Operation nicht zu machen sind[1]; und dass man doch auf diese höheren Thiere übertragen hatte, was an jenen niederen Thieren gefunden war, hatte eben sich als fehlerhaft herausgestellt. Nunmehr den umgekehrten Fehler zu begehen, war um so mehr zu fürchten, als zahlreiche übereinstimmende Ergebnisse der verschiedensten Forscher entgegenstanden. Überdies lehrte der einfache und nächste Versuch am Frosche, dass wirklich bei diesem Thiere das Grosshirn anders sich verhält. Ich wies deshalb nur in meiner zweiten Mittheilung[2] auf die Verschiedenheit hin, welche hinsichtlich des Ortes der centralen Vorgänge des Gesichtssinnes zwischen Hund und Frosch besteht, und vermied im übrigen jede weitere Erörterung des Widerspruches, der mit den neuen Ermittelungen gegeben war. Dem glaube ich es zuschreiben zu dürfen, dass, während meine Ergebnisse über die Localisation der Functionen in der Grosshirnrinde die Aufmerksamkeit auf sich zogen, jener Widerspruch so gut wie unbeachtet blieb: fast allgemein verharrte man dabei, das Entstehen der Sinneswahrnehmungen ausserhalb des Grosshirns anzunehmen, und selbst die wenigen Forscher, welche mir folgten und durch die Ausschaltung des Grosshirns beim Affen und beim Menschen völlige Blindheit entstehen liessen[3], sind sich offenbar gar nicht dessen bewusst geworden, wie weit sie von den hergebrachten Anschauungen sich entfernten. Auf der anderen Seite verabsäumte ich es jedoch auch nicht, das Meine zu thun, um den Widerspruch weiter zu verfolgen und aufzuklären, und ich liess zu dem Zwecke zunächst Hrn. Blaschko die Untersuchung anderer Wirbelthiere unternehmen.

Hrn. Blaschko's verdienstliche Arbeit[4] hat, was vor allem wichtig war, für den Frosch die erwünschte Einsicht gebracht. Flourens' Angabe, der grosshirnlose Frosch sei blind, war bereits von Desmoulins und Magendie und seitdem wiederholt als irrig erkannt, da das Thier, wenn Reize es zur Bewegung bringen, die Hindernisse auf seinem Wege vermeidet. Doch ob ein solches Thier wirklich die Objecte sieht, und wie weit überhaupt sein Sehen reicht, darüber war keine Klarheit und noch weniger Sicherheit erlangt. Hr. Blaschko zeigte, indem er die Versuche weiterführte, dass mit der Lage, Grösse und Gestalt des Hindernisses, gleichviel ob dasselbe gleich- oder anders-

[1] Vgl. die äusserst dürftigen Angaben, welche Flourens (Recherches etc. p. 130) von seinen Versuchen an einem Hunde und einer Katze macht.

[2] Berliner klinische Wochenschrift, 14. Jahrg. No. 35 (27. August 1877). — Functionen u. s. w. S. 25—6.

[3] Luciani e Tamburini, Sui centri psico-sensori corticali. Reggio-Emilia 1879. p. 73—4. (Estr. dalla Rivista sperimentale di Freniatria etc. 1879.) — Sigmund Exner. Untersuchungen über die Localisation der Functionen in der Grosshirnrinde des Menschen. Wien 1881. S. 86. — Mauthner, Wilbrand, Marchand a. a. O. (s. oben S. 803 Anm.)

[4] A. Blaschko, Das Sehcentrum bei Fröschen. Inaugural-Dissertation. Berlin 1880.

farbig und heller oder dunkeler als seine Umgebung ist, die Bewegungen des gereizten Frosches in Art, Richtung und Grösse zweckmässig zur Vermeidung des Hindernisses wechseln, und dass dies auch dann noch geschieht, wenn das Thier durch einen besonderen Eingriff in seiner normalen Bewegungsfähigkeit gestört oder wenn durch einen Wechsel in der Lage des Hindernisses die Verwerthung früherer, bereits eine Weile verdrängter Gesichtseindrücke erforderlich ist. Danach war es klar, dass der grosshirnlose Frosch Gesichtswahrnehmungen hat, die er im Gedächtniss zu behalten und für seine Bewegungen zu verwerthen weiss, dass er mithin nicht schlechter als der normale Frosch sieht und nicht einmal seelenblind ist.

Weniger glücklich war Hr. Blaschko mit seinen Versuchen an der Taube, bei welcher er grössere Stücke von der dünnen Decke an der hinteren Partie einer Hemisphäre exstirpirte, um die eine Sehsphäre fortzuschaffen, welche dort sich vermuthen liess. Die verstümmelten Thiere sahen mit dem entgegengesetzten Auge doch, wenn auch schlechter als normal. Und nur dass das Thier, welches die beträchtlichste Sehstörung zeigte, ausschliesslich mit einer kleinen Partie der Retina noch zu sehen schien, liess sich dafür geltend machen, dass solche Sehsphären der Grosshirnrinde, wie dem Hunde, auch der Taube zukommen, und dass es bei letzterer bloss noch nicht gelungen war, eine Sehsphäre gänzlich zu entfernen.

Bei diesem Stande der Dinge musste Hr. Blaschko seine Arbeit abbrechen, und ich bin dann selber an die Aufgabe herangetreten. Von Versuchen an Fischen durfte ich absehen, da, was nunmehr, so zu sagen, schon von selber sich verstand, auch Hrn. Renzi's[1] und Hrn. Vulpian's[2] Versuchsergebnisse ganz ausser Zweifel setzten, dass hinsichtlich des hier fraglichen Verhaltens zwischen Fisch und Frosch kein Unterschied besteht. Die Untersuchung des Vogels war demnach das nächste, das ich zu thun fand, und ich ging daran, das Grosshirn bei der Taube zu exstirpiren.

4. Untersuchung des Sehens der Vögel.

Seit Flourens' berühmten Versuchen hat die Exstirpation des Grosshirns an Vögeln so ausserordentlich häufig Wiederholung gefunden, ja, sie ist seit Jahrzehnten wegen der Einfachheit ihrer Ausführung und des Lehrreichen ihrer Erfolge so sehr überall regelmässiger Vorlesungsversuch geworden, dass meine Wiederaufnahme

[1] Ann. universali di Med. Vol. 185. p. 471—7.
[2] L. c. p. 669—70.

dieses Versuches zunächst wohl verwundern kann. Doch nachdem die partiellen Exstirpationen, welche Hr. Blaschko geübt hatte, trotz dessen fleissigem Mühen weder volle Blindheit erzielt hatten, noch auch die Rindenblindheit bestimmter, mit der Exstirpationsstelle wechselnder Retinapartien hatten erkennen lassen, bot sich, um die Bedeutung des Grosshirns für das Sehen hier festzustellen, gar kein anderer zuverlässiger Weg dar. Und der so viel betretene Weg erschien auch bei näherer Betrachtung noch bei weitem nicht bis zum Ziele gebahnt, da die Ergebnisse der verschiedenen Forscher neben einer oberflächlichen Übereinstimmung viele und wesentliche Abweichungen zeigten, welche nur auf der unvollkommenen Ausführung des Versuches beruhen konnten. Aus dem nicht exacten Experimente, wie es noch jüngst Hr. Exner[1] sehr richtig genannt hatte, war also erst ein exactes Experiment zu machen, ehe es zu der Einsicht verhelfen konnte, auf welche es hier ankam.

Mehrjähriger Bemühungen hat es dazu bedurft; denn der Versuch, welchen für die Vorlesung vorzubereiten allgemein als ein Kleines galt, hat sich als der misslichste erwiesen unter allen Hirnversuchen, welche mir bisher zugefallen sind. Während man die Technik des Versuches meist nach Flourens' Vorgange gar nicht zu besprechen für nöthig hielt oder, wo man ihrer gedachte, als eine sehr einfache beschrieb, ist ein ungemein schwieriges und zartes operatives Verfahren erforderlich, das man erst durch viele Übung mit einiger Sicherheit durchführen lernt. Und dann vereiteln noch oft Nachblutungen und Reizzustände, welche nicht zu beherrschen sind, den Versuch, oder es entwerthet ihn die Section, indem sie die Feststellung des Verlorenen und des Erhaltenen nicht gestattet. Wie sich zeigen wird, ist es nicht zu viel behauptet, dass, Flourens allein etwa ausgenommen, keiner meiner Vorgänger einen Vogel beobachtet hat, dessen Grosshirn gänzlich entfernt war, so oft auch die besondere Versicherung zu finden ist, dass die totale Exstirpation gelungen war.

Als Versuchsthier wählte ich die Taube, weil an dieser am häufigsten der Versuch unternommen worden war, und weil sie vor dem Huhne den Vortheil bot, dass bequemer eine ansehnliche Zahl von operirten Thieren für eine lange Beobachtungsdauer aufbewahrt werden konnte. Der oft wiederholten Empfehlung junger Thiere kann ich mich nicht anschliessen; ich habe an älteren Tauben die besseren Erfolge gehabt und zuletzt immer nur solche Tauben für die Versuche verwandt. Auch muss ich nach vielem Proben in Übereinstimmung

[1] Hermann's Handbuch der Physiologie, Bd. II. Theil II. S. 198.

mit FLOURENS[1] davor warnen, dass man die Taube, um die Blutungen zu beschränken, durch langes Hungern und Dursten vorbereite, da das Thier alsdann zu wenig widerstandsfähig ist und leicht an Schwäche zugrundegeht; es reicht völlig aus, wenn man der Taube etwa achtzehn Stunden vor der Operation die Nahrung entzieht. Die Operation selbst wird folgendermaassen ausgeführt.

An der mit Rumpf und Extremitäten in ein Handtuch — ohne Behinderung der Athmung — fest eingewickelten Taube, die auf dem Tische liegt, fixirt ein Gehülfe den Kopf, indem er mit der einen Hand an der Schnabelspitze, mit der anderen am Hinterkopfe angreift. Sobald dann durch einen Sagittalschnitt die von den Federn befreite Kopfhaut gespalten ist, fixirt der Gehülfe mit der zweiten Hand auch die beiden stark seitwärts gezogenen Hautlappen, so dass der vor der Taube sitzende Operateur den Schädel in seiner ganzen Ausdehnung frei vor sich hat. Nun trägt man mit flachen Messerzügen die compacte Knochensubstanz über jeder der beiden Hemisphären ab und lässt nur in der Mitte eine von vorn nach hinten verlaufende, circa 1^{mm} breite Knochenleiste stehen, welche gerade den Sinus longitudinalis bedeckt. Alsdann bricht man mit einer nicht zu grossen, doch festen anatomischen Pincette jederseits Stückchen für Stückchen von der porösen Knochensubstanz weg, welche von der Schädellücke aus nach hinten sich erstreckt, bis man ganz nahe an das Kleinhirn und an den Lobus opticus herangekommen ist, so dass diese Theile zwar nicht freigelegt, aber doch, indem nur noch einige kleine Knochenbälkchen vor ihnen übrig sind, durch deren Zwischenräume hindurch sichtbar werden. Nachdem so die Hemisphären in ihrem grössten Umfange zugänglich geworden, befreit man zuerst die eine und danach die andere Hemisphäre von der Dura. Man sticht dazu ein sehr kleines dreieckiges und äusserst spitzes Messerchen nahe dem vorderen medialen Ende der Knochenlücke durch die Dura und schiebt dasselbe fast horizontal in etwa 1^{mm} Abstand von der mittleren Knochenleiste und dieser parallel möglichst weit nach hinten; an dem so entstandenen sagittalen Spalte der Dura führt man die eine Spitze einer feinen Hakenpincette unter die Dura und zieht dann die grosse laterale Partie der Dura gänzlich lateralwärts von der Hemisphäre ab, die sehr kleine mediale Partie drückt man gegen die mittlere Knochenleiste. Regelmässig ist mit den Manipulationen an der Dura eine Aufregung des Thieres verbunden, und man muss jetzt nöthigenfalls ein wenig pausiren, bis die Bewegungen ein Ende genommen haben, ehe man zu dem

[1] Recherches etc. p. 127. — So rasch, wie FLOURENS, habe ich übrigens nie den Tod eintreten sehen.

Hauptakte, der Exstirpation der Hemisphären, fortschreitet. Es wird erst die eine und dann die andere, sagen wir erst die rechte und dann die linke Hemisphäre exstirpirt, und zwar mittels zweier ganz dünner, ca. 3^{mm} breiter Holzstäbchen — passend zugerichteter Scalpellstiele —, deren Enden und Kanten, um bei mässigem Drucke nicht in die weiche Hirnsubstanz einzuschneiden, gut abgerundet sind. Damit am hinteren Ende der rechten Hemisphäre die nöthige Beleuchtung in der Tiefe nicht fehle, zieht der Gehülfe die Spitze des Schnabels mehr nach unten und hinten und dreht zugleich den Kopf um seine Längsaxe etwas nach links. Man legt die beiden Stäbchen nahe bei einander ganz flach an das sichtbare hintere Ende der rechten Hemisphäre an und sucht mit sanftem, nach oben und vorn gerichtetem Drucke die Hemisphäre in die Höhe zu hebeln. Die Hemisphäre folgt auch willig; und indem man nun mit den Stäbchen regelmässig abwechselnd so agirt, dass man, während man mit dem einen fixirt und drückt, das andere etwas weiter unten anlegt, hebt man die Hemisphäre mehr und mehr vom Kleinhirn, vom Lobus und endlich vom Thalamus opticus ab und gelangt immer tiefer unter die untere Fläche der Hemisphäre. Endlich stösst man auf einen Widerstand, welchen der sanfte Druck nicht zu überwinden vermag. Man lässt jetzt das laterale Stäbchen ruhig an seinem Platze und verschiebt das mediale Stäbchen, ohne dass es die Hemisphäre verlässt, dem medialen Contour der Hemisphäre folgend, im Bogen nach vorn und innen. Dabei stösst man bald von neuem auf einen Widerstand, und man überwindet denselben sogleich, indem man das freie obere Ende des Stäbchens ruckweise in der Richtung nach unten und aussen bewegt: man hat die kleine Commissur, welche die medialen Flächen der Hemisphären nahe deren hinteren Enden verband, das Meckel'sche Balken-Rudiment, zerrissen. Unmittelbar danach drückt man mit beiden Stäbchen zugleich, während man sie einander nähert und schliesslich das eine sogar ein Stück hinter das andere schiebt, kräftig etwas schief nach vorn[1] und unten, bis man auf Knochen stösst. Dadurch ist die Hemisphäre vom Pedunculus abgetrennt, und sie lässt sich nun rasch, durch Vorschieben der Stäbchen, als ein Ganzes aus der Schädelhöhle entfernen, so dass nur der Lobus olfactorius zurückbleibt. Mit der Lostrennung vom Pedunculus ist eine Blutung eingetreten, und der Gehülfe hat darauf den Kopf der Taube um seine Längsaxe so nach rechts gedreht, dass die linke Hemisphäre jetzt

[1] Drückte man nicht etwas schief nach vorn, sondern gerade nach unten, so würde man in das vordere Ende der mittleren Schädelgrube gerathen und das Chiasma nn. opticorum treffen. Nach solcher Verletzung sterben die Tauben immer sehr bald und meist schon in den ersten Stunden.

gerade so zugänglich ist, wie vorher die rechte. In ganz derselben Weise, wie die erste, wird nunmehr auch die zweite Hemisphäre entfernt; man hat allerdings nicht mehr die Hemisphären-Commissur zu zerreissen, aber das mediale Stäbchen muss doch auch hier, bevor man die Hemisphäre abtrennt, im Bogen nach vorn und innen verschoben sein. Sobald auch die zweite Hemisphäre exstirpirt ist, geht man an die Stillung der Blutung. Man führt dazu jederseits in die mittlerweile mit Blut gefüllte Höhle einen flachen, äusserst dünnen und recht lockeren Watte-Tampon, den man in der ungefähren Grösse der Knochenlücke vorbereitet hat, ganz oberflächlich ein, so dass er nur ein wenig unterhalb des Niveaus der Knochenlücke diese Lücke gerade verschliesst, und drückt dann lose auf die Knochenlücke ein kleines Schwämmchen auf. Nach 5—10 Minuten nimmt man die beiden Schwämmchen ab, wickelt die Taube vorsichtig aus dem Handtuch aus und lässt den Gehülfen die Fixirung zuerst der seitwärts gezogenen Lappen der Schädelhaut, welche sich ihrer ursprünglichen Lage wieder nähern, und schliesslich auch des Kopfes aufheben. Das Thier bleibt sich selbst überlassen, und jede weitere Berührung oder Erschütterung wird für die nächsten Stunden sorgsam vermieden.

Die Schilderung mag minutiös erscheinen, und doch ist sie es durchaus nicht gegenüber der Feinheit des Versuches, so dass dem Experimentator, der meinen Weisungen folgt, immer noch ein weiter Spielraum für die individuelle Geschicklichkeit gelassen ist. Ich habe vor allem die Maassnahmen hervorheben zu müssen geglaubt, welche nach meinen Erfahrungen für die totale Exstirpation unumgänglich sind. Die dünne Membran von Hirnsubstanz, welche an der hinteren und an der medialen Partie der Hemisphäre die Ventrikeldecke bildet, wird unfehlbar durchschnitten, wenn man mit dem Messer oder dem scharfen Löffel angreift, und sie wird auch, zumal infolge ihrer Befestigung am Pedunculus und an der anderen Hemisphäre, jedesmal dann zerrissen, wenn man nur mit dem Scalpellstiele unsanft an ihr zieht. Daher sind meine Vorgänger regelmässig, statt zwischen der Hemisphäre und dem Lobus opticus vorzudringen, in den Ventrikel gerathen und haben einen mehr oder weniger grossen, aber immer ansehnlichen Theil jener Membran in der Schädelhöhle zurückgelassen. Sie bemerkten den Fehler nicht, weil das Operationsfeld sehr bald mit Blut überschwemmt war, und sie hätten ihn auch gar nicht nachträglich corrigiren können, selbst wenn nicht die grösste Hast für die Beendigung der Operation ihnen geboten erschienen wäre. Man kann den Fehler nur vermeiden, indem man in der vorgegebenen Weise die hintere poröse Knochendecke entfernt und dann von hinten und unten her gewissermaassen schiebend die Hemisphäre heraus-

drückt. So ist man auch, da alle Manipulationen sich an die Hemisphäre halten, vor den sonst leicht möglichen Verletzungen der Nachbartheile, insbesondere des Thalamus opticus, gesichert; und da es erst infolge der Lostrennung vom Pedunculus zur Blutung kommt, sind alle Schwierigkeiten der Operation bereits überwunden, wenn man blindlings vorzugehen gezwungen ist. Dadurch dass man die Blutung der ersten Seite nicht sogleich zu stillen sucht und den Kopf der Taube nach eben dieser Seite dreht, bleibt das Operationsfeld an der zweiten Hemisphäre unverdunkelt: ein Vortheil, dem gegenüber es wenig zu besagen hat, dass die Blutung etwas länger währt, da ich diese nie eine gefährliche Grösse habe erreichen sehen.

Das Verfahren hat, wie nicht zu verkennen ist, einen schwachen Punkt in der Lostrennung der Hemisphäre vom Pedunculus, bei welcher das Auge keine Hülfe zu gewähren vermag; und dadurch werden wir in der That die Erfolge beeinträchtigt finden. Aber natürlich kommen auch Unfälle aller Art vor, welche das Verfahren überhaupt nicht durchzuführen gestatten. So reisst manchmal trotzdem, dass man die Hemisphäre von hinten her schiebt, die dünne Ventrikeldecke doch unter den Stäbchen ein, besonders leicht, wenn sie sich in Falten gelegt hat. Oder es schneidet das Messerchen, welches die Dura spaltet, dieselbe Membran in ihrer hinteren Partie durch, weil sie gar zu eng der Dura anliegt. In beiderlei Fällen bleiben dann Fetzen der Membran am Pedunculus hängen, und man kann günstigstenfalls diese Fetzen durch Manipulationen mit den Holzstäbchen verkleinern, doch nie sie ganz fortschaffen. Auch bringen öfters schon sehr kleine Verletzungen der Hemisphäre, die beim Spalten der Dura eintreten, ansehnliche Blutungen mit sich, ja, es reisst hin und wieder sogar, man kann nicht sagen wie, der Sinus ein, und dann ist begreiflich an eine gute Fortsetzung der Operation nicht mehr zu denken. Glücklicherweise sind die derart misslungenen Versuche doch durch die Abweichungen, welche hier das Verhalten der Thiere gegenüber den gelungenen Versuchen darbietet, recht nützlich, wofern nur die Section über die zurückgebliebenen Grosshirnreste Aufschluss bringt.

In den ersten Wochen nach der Operation kann von einer brauchbaren Section nie die Rede sein, weil unter den bröckeligen und erweichten Blutresten die Grenzen der Verstümmelung nicht sicher zu ermitteln sind und auch das normale Verhalten der stehengebliebenen Hirntheile nicht zu constatiren ist. Wo man doch schon so früh und manchmal selbst in den ersten Tagen sich der gelungenen Totalexstirpation vergewissert zu haben glaubte, ist man nur in einer offenbaren Selbsttäuschung befangen gewesen. Welche Methode der Blutstillung auch Anwendung gefunden hat — ich habe alle vor-

geschlagenen Methoden und noch mehr durchgeprobt —, immer ist frühestens nach zwei bis drei Wochen die Wunde so gereinigt, dass verlässige Befunde zu erheben sind. Ich muss angelegentlichst die Methode der Blutstillung empfehlen, welche ich oben angab. Unter dem mit Blut getränkten dünnen Watte-Tampon, der trocken geworden eine vortreffliche schützende Decke abgiebt, bis er nach Monaten (an der Innenseite reich mit Steatomen besetzt) abfällt, bildet sich eine dünne fibröse gefässhaltige Haut, welche von Knochenrand zu Knochenrand die Wunde abschliesst und vorn der Schädelbasis, hinten den erhaltenen Hirntheilen eng anliegt, nur durch ein Minimum einer klaren Flüssigkeit von denselben getrennt; hat man die Haut zurückgeschlagen, so liegt alles klar vor, wie bei einem entsprechenden anatomischen Präparate, das man vom normalen Thiere angefertigt hat. Nur wenn frische Entzündungen und Erweichungen des Hirns, wie es allerdings manchmal noch nach Monaten vorkommt, den Tod herbeigeführt haben, ist natürlich die Section wieder getrübt.

Dieselbe Methode der Blutstillung sichert auch am ehesten gegen die grosse Gefahr, dass die nach aussen zum Stehen gekommene Blutung sich nach innen hin fortsetzt und die zurückgebliebenen Hirntheile comprimirt. Das ist, wenn man grosse Tampons einführt oder nach dem Nähen der Haut tamponirt oder Pulver und dergl. zur Blutstillung verwendet, ein so regelmässiges Vorkommniss, dass man allgemein von Flourens[1] an das Erbrechen oder, bei leerem Kropfe, die Brechbewegungen als naturgemäss mit der Entfernung des Grosshirns verbunden aufgefasst hat, während sie doch nichts anderes als eine Folge jener Hirncompression sind. Seitdem ich im Besitze der Methode bin, habe ich die Grosshirn-Exstirpationen regelmässig, ohne dass es zu Brechbewegungen kam, ausgeführt, und in den Fällen, in welchen doch noch zu einer späteren Zeit Brechbewegungen auftraten, hat sich jedesmal eine Nachblutung als die Ursache herausgestellt. Ich schreibe den Vorzug meiner Methode dem Umstande zu, dass der so dünne und lockere Watte-Tampon, indem er die allmähliche Gerinnung des Blutes befördert, doch dem Vordringen des Blutes nach aussen keinen zu grossen Widerstand entgegensetzt.

Ist die Blutung gestillt, so ist das Thier schleunigst, wie ich angab, sich selbst zu überlassen, und es hat insbesondere das Nähen der Haut zu unterbleiben, das nicht nützen, wohl aber viel schaden kann, da die Schmerz- und Abwehrbewegungen des Thieres häufig Nachblutungen veranlassen. Und schon ohnedies sind die Nach-

[1] Recherches etc. p. 128. — Flourens giebt den Rath, den Kropf, wo er gefüllt ist, zu öffnen und zu entleeren.

[illegible] genug. Sie gehen bei mehr als der Hälfte der [illegible] in den ersten Stunden nach der Operation, doch auch noch im Verlaufe des zweiten Tages, im Gefolge von Bewegungen der Thiere, zuweilen selbst [illegible] der Defäcation, oder ohne jeden [illegible] Zwangsbewegungen [illegible]. Schiefstellungen [illegible] Verdrehungen [illegible] und die Folgen, und die Thiere sterben [illegible] in den nächsten Tagen. Am sichersten [illegible] ohne Unfall verlaufen war. [illegible] dass das Blut in den dritten Ventrikel und [illegible] den Aquaeductus Sylvii in den vierten Ventrikel gelangt ist [illegible] Medulla [illegible] oder mit dieser auch [illegible] Theil des Kleinhirns [illegible] hat. Dagegen zeigt sich [illegible] Medulla [illegible] die Thiere trotz der [illegible] am Leben geblieben sind, und das sind zugleich fast [illegible] Fälle, in welchen die Operation weniger vollkommen [illegible] gekommen ist. [illegible] danach wohl das Zurückbleiben von Resten der Ventrikeldecke den tödtlichen Bluterguss in die Ventrikel verhütet, wird es [illegible] erklärlich, was anfangs ganz räthselhaft erscheinen musste, dass bei den früheren Grosshirn-Exstirpationen, auch nach meinen eigenen Erfahrungen, die Verluste durch die Blutungen bei weitem kleiner waren: denn bei jenen älteren Versuchen sind immer ansehnliche Stücke der Ventrikeldecke stehengeblieben.

Einzelne Tauben gehen auch durch Erweichungen des Pedunculus und des Thalamus opticus in wenigen Tagen nach der Operation zugrunde. Ich sage: einzelne Tauben, weil ich, obwohl die anatomischen Befunde nicht so selten sind, doch nur die spärlichen Fälle hierherziehe, in welchen nicht zugleich eine Nachblutung vorlag. Es mag sein, dass gerade Zerrungen und Entzündungen des Pedunculus mehrfach die Nachblutungen veranlassen, aber ich habe darüber aus dem Verhalten der Thiere keinen Aufschluss zu gewinnen vermocht. Und überhaupt habe ich um ein tieferes ursächliches Verständniss der vielerlei Zwangsbewegungen, Schiefstellungen u. s. w., welche zur Beobachtung kommen, vergeblich mich bemüht. Ich will deshalb nur noch eine Gruppe hierhergehöriger Erscheinungen besonders erwähnen, deren Kenntniss bei einer späteren Gelegenheit für uns von Nutzen sein wird. Tauben, welche nach beendeter Operation durch eine Viertelstunde, eine halbe Stunde bis zwei Stunden in normaler Haltung stillgestanden haben, recken und drehen plötzlich den Kopf und setzen sich in Bewegung. Die einen gehen oder laufen nunmehr, die anderen fliegen, die meisten wechseln mit Laufen und Fliegen ab. Diese Bewegungen erfolgen aber nicht continuirlich, sondern werden durch

Pausen unterbrochen, während welcher die Tauben ruhig auf dem Platze verharren; und zwar nimmt die Dauer der Pausen ziemlich regelmässig zuerst bis zu einem Maximum ab und dann wieder zu, die Dauer der Bewegungen zuerst bis zu einem Maximum zu und dann wieder ab. Meist treten auch früher oder später Brechbewegungen auf. Endlich gelangen die Tauben wieder zur Ruhe, nach Stunden oder nach Minuten, je nachdem die Pausen und die Bewegungszeiten ganz allmählich oder sehr rasch sich verändert haben. In allen diesen Fällen lehrt die Besichtigung der Tauben, dass Nachblutungen eingetreten sind, den Bewegungen in Grösse und Geschwindigkeit des Anwachsens gut entsprechend; und man hat öfters Gelegenheit zu beobachten, wie mit der plötzlichen Verstärkung der Blutung, wenn das Thier beim Laufen hart an ein Object gestossen ist oder gar beim Fliegen heftig gegen die Zimmerdecke geprallt ist, auch die Bewegungen stürmischer sich entwickeln.

Sind die ersten Tage nach der Operation ohne Blutungen und Entzündungen vorübergegangen, so verheilt und vernarbt alles sehr schön, und die Tauben können durch Monate am Leben erhalten werden, ohne dass es zu einer Störung in ihrem Befinden kommt, wenn man sie künstlich füttert — wir führten einmal täglich gequollene Erbsen ein, bis der Kropf gefüllt war. Für die Zwecke der Untersuchung ist es schliesslich auch unbedingt erforderlich, dass die Tauben die Operation lange überleben, weil die Beobachtungen und Prüfungen, sollen sie zu entscheidenden Ergebnissen führen, mindestens durch sechs Wochen fortgesetzt werden müssen; denn es wiederholt sich an diesen Tauben, was ich schon mehrfach von den am Grosshirn operirten Hunden und Affen zu bemerken hatte, dass sie, wenn ihnen noch Reste eines Sinnes verblieben sind, diese Reste erst mit der Zeit gut verwerthen lernen und dadurch dem Experimentator verrathen. Aber hinsichtlich der Prüfungen thut dabei eine gewisse Vorsicht noth. Die verstümmelten Thiere sind nämlich, besonders in den ersten Wochen, sehr empfindlich gegen starke Erschütterungen und gehen danach leicht an Hirn-Blutungen oder -Entzündungen in den nächsten Tagen zugrunde. Deshalb ist es in der ersten Zeit soweit nur möglich zu vermeiden, dass die Tauben vom Tische fallend auf den Boden aufschlagen, im Fluge heftig gegen die Wand stossen u. dgl. m.; und erst vom zweiten Monate an sind ganz frei nach Bedürfniss auch die rigorosen Prüfungen zu unternehmen, durch welche das Leben der Tauben gefährdet ist. Geht man unbedächtig mit den Prüfungen vor, so kommt man nicht nur rasch um das mühsam erworbene Material, sondern man opfert es noch dazu nutzlos, da die gewonnenen Ergebnisse doch nicht zuverlässig sind.

Nach alledem wird es nicht überraschen, dass ich nur mit einem Verluste von circa 80 Procent der Versuche das Viertelhundert Tauben erhalten habe, über welches ich jetzt berichten will. Ich habe die Thiere alle durch eine lange Zeit, durch zehn Wochen bis sieben Monate nach der Operation beobachtet. Nach gewissen Verschiedenheiten, welche sie darboten, lassen sie sich in drei Gruppen ordnen, und ich schildere ihr Verhalten soweit, als es unsere Frage nach dem Gesichtssinne der Thiere verlangt.

Bei der ersten Gruppe war die Operation beiderseits gut zur Ausführung gekommen, und es erwies auch die Section die totale Exstirpation beider Hemisphären, bei Unversehrtheit des übrigen Hirns. Die Taube stand, ob im Behälter oder auf dem Fussboden oder auf dem Tische, meist unverrückt auf dem Platze, den Kopf eingezogen zwischen den Flügeln, in normaler Haltung, zeitweise — doch im ganzen selten — auf einem Beine und führte dabei in unregelmässigem Wechsel eine Reihe von Bewegungen aus: sie drehte von Zeit zu Zeit den Kopf nach rechts und nach links; sie schüttelte ihn seitwärts hin und her; sie hob ein wenig einen oder beide Flügel in die Höhe; sie schüttelte die Flügel, indem sie dieselben etwas weiter hob und ausbreitete; sie öffnete und schloss den Schnabel; sie rieb den Kopf an den Rückenfedern; sie reckte sich, indem sie krampfhaft unter Heben der Flügel den Kopf nach vorn und ein Bein nach hinten in die Luft streckte; sie putzte die Federn mit dem Schnabel; sie putzte den Schnabel mit dem einen oder dem anderen Fusse. So lange der Kropf nicht leer oder nahezu leer war, traten alle diese Bewegungen verhältnissmässig spärlich auf, und das Stehen wurde nur dadurch unterbrochen, dass die Taube etwa alle halbe Stunde mit erhobenem Kopfe einige Schritte vorwärts oder, um zu kothen, rückwärts trippelte — geradeaus oder im Bogen rechts- oder linksum — und, wenn sie beim Putzen aus dem Gleichgewichte gekommen war, ein Bein oder beide Beine verstellte. War aber der Kropf leer geworden, so erfolgten jene ersteren Bewegungen häufiger, und auch die Gehbewegungen wiederholten sich desto rascher, je länger die neue Fütterung unterblieb; trotzdem kam noch jetzt die Taube meist nicht recht von der Stelle, weil das Trippeln abwechselnd rechtsum und linksum und nur manchmal geradeaus erfolgte. Hin und wieder geschah es derzeit auch, wenn die Taube, wie ich es vorhin angab, die Flügel schüttelte, dass sie schliesslich noch, nach plötzlichem Anziehen beider Beine, 2—4^{cm} hoch über dem Boden sehr schnell bis auf 1—2 Fuss weit gerade oder im Bogen nach vorn dahinstrich und durch Vorstrecken der Beine sich wieder fixirte. Aber weiter als zu solcher Flüsterbewegung, zu einem wirklichen Auffliegen der

Taube kam es nie; selbst die stärkste und noch so oft wiederholte Reizung, z. B. durch Druck auf die Zehen, hatte höchstens Gehbewegungen zur Folge. Hatte die Taube in der Nähe des Tischrandes gestanden, so überschritt sie denselben oft sowohl beim Gehen wie beim Flüstern und fiel flatternd zu Boden; nur wenn sie beim Gehen bloss mit einem Theile des einen Fusses in die Luft getreten war, vermochte sie noch unter Zurückziehen des Fusses und Flügelbewegungen sich auf dem Tische zu behaupten. An alle Hindernisse auf ihrem Wege stiess die Taube an, oder sie ging sogar geradezu in dieselben hinein, so in die anderen Tauben und die Wände ihres Behälters, in die Gegenstände auf dem Tische u. s. w.; und sie wurde dann in der Regel durch dieselben abgelenkt — meist sogleich, selten nachdem sie dieselben vergebens zu überwinden gesucht hatte, nachdem sie z. B. an ihnen in die Höhe gegangen war —, oder sie nahm auch die Hindernisse, wenn sie niedrig waren, indem sie mühsam und ungeschickt auf sie hinauf oder über sie hinweg stolperte. Was auch vor den Augen der Taube sichtbares sich vollzog, und wenn man im hellsten Zimmer plötzlich die Augen tief beschattete oder im finsteren Zimmer plötzlich das grellste Licht vor die Augen brachte, nichts beeinflusste die Taube anders, als dass ihre Pupillen sich erweiterten oder verengten. Liess man die Taube in der Luft los, indem man die sie stützende Hand hinwegzog, so flog die Taube mit halb aufgerichtetem Rumpfe, zurückgezogenem Kopfe und weit vorgestreckten Beinen schräg geradeaus oder gewöhnlich in einer Rechts- oder Linkswindung abwärts; und sie kam entweder mit hörbarem Aufschlage und unter Überschlagen auf dem Boden an, oder sie glitt erst noch eine Strecke über den Boden hin, ehe sie zum Stehen kam. Befanden sich Objecte auf der Flugbahn, so vermied die Taube dieselben nie, sondern streifte sie oder stiess gerade in sie hinein; und wenn dadurch der Flug einigermaassen gehemmt worden war und die Taube sich nicht sogleich an dem Objecte hatte fixiren können, so fiel sie flatternd vertical herab und schlug hart auf den Boden auf, unter Umständen so hart, dass sie Knochenbrüche oder Verstauchungen davontrug. Nur wenn die Taube mit ihren Füssen unterwegs einen Gegenstand streifte, an welchem sie sich rasch genug halten konnte, setzte sie sich daran fest, und dabei war dann das Überschlagen oder Gleiten ebenso zu beobachten, wie wenn die Taube zu Boden kam. Im übrigen konnten der Gegenstände noch so viele dicht am Wege der Taube gelegen und durch die geringste Änderung der Flugbahn zu erreichen sein, die Taube flog immer an ihnen vorbei. Warf man die Taube hoch in die Luft, so trug sie, so lange der Wurf sie in die Höhe führte, die Beine angezogen; aber sobald

sie zu fallen begonnen hatte, streckte sie weit die Beine vor, und sie flog nunmehr gerade so abwärts, wie ich es vorhin beschrieb.

Von dieser ersten Gruppe unterschied sich die zweite Gruppe bloss durch zwei Abweichungen im Verhalten der Thiere. Hier vermied die Taube von der dritten Woche an beim Gehen manche Hindernisse, während sie in andere hineinging: regelmässig wich sie jetzt der Wand, dem Schranke, der Kiste, meist auch dem Tischfusse aus, dagegen stiess sie an weniger hohe Objecte, an die anderen Tauben in ihrem Behälter, an Gläser, Schalen, Apparate, Holzklötze u. dergl. m., welche sich auf dem Tische oder dem Fussboden befanden, nach wie vor an und stolperte über dieselben hinweg. Dazu kam, dass die Taube meist vom Ende des ersten Monates, einmal erst von der siebenten Woche an scheute, wenn man die Hand in der Richtung von oben nach unten gegen das eine, sagen wir das linke[1] Auge bewegte: sie schloss das Auge und zog den Kopf gegen den rechten Flügel zurück, manchmal trippelte sie auch einen oder zwei Schritte seitwärts nach rechts. Am ehesten und besten machte sich dieses Scheuen bemerklich, wenn man in den Pausen zwischen den Flugversuchen, welche man mit den Tauben anstellte, die Prüfungen vornahm. Näherte man aber die Hand nicht von oben, sondern in sonst gleicher Weise von vorn oder hinten oder unten dem linken Auge, oder hantirte man ebenso in beliebiger Richtung vor dem rechten Auge, so blieb stets das Scheuen aus. Weitere Abweichungen kamen in Monaten nicht zur Beobachtung. War den Tauben — nach $1^1/_2$ — 3 Monaten — noch das linke Auge exstirpirt worden, so verhielten sie sich danach in allen Stücken wie die Tauben der ersten Gruppe.

Bei der dritten Gruppe hatte sich die Operation auf der einen, sagen wir der rechten Seite nicht gut ausführen lassen, und die Section ergab, dass nichts von der linken Hemisphäre erhalten war, wohl aber von der rechten ein Fetzen der Ventrikeldecke, der, an Gestalt und Grösse vielfach verschieden, doch in seiner grössten Ausdehnung nicht 2^{mm} erreichend, vom Pedunculus aus, mit welchem er in Verbindung geblieben war, medial- und aufwärts sich erstreckte und unversehrt erschien wie das übrige Hirn. Auch diese Tauben wichen in ihrem Verhalten während der ersten und manchmal noch der zweiten Woche nicht von den Tauben der ersten Gruppe ab. Dann aber setzten sie sich öfter als diese in Gang und blieben länger

[1] Der Kürze halber wähle ich hier und in der Folge beliebig die eine oder die andere Seite; beobachtet habe ich alles die einen Male rechts, die anderen Male links und ohne dass ein Unterschied bemerklich war.

im Gehen; ja, nach einigen Wochen kam es vor, dass solche Taube einmal zuerst langsam und darauf schneller durch 5 — 10 Minuten ununterbrochen auf dem Tische oder dem Fussboden umherspazierte. Die Tauben gingen sowohl geradeaus wie im Bogen rechtsum und linksum, nur ein Theil bevorzugte auffällig die Rechtsdrehung. Zum Beginne und während des Gehens bewegten die Tauben den Kopf manchmal in den verschiedensten Richtungen, wie wenn sie lugten oder spähten; und wenn sie stillstanden, hielten sie den Kopf hin und wieder so um seine Längsaxe gedreht, dass das eine Auge mehr nach oben, das andere nach unten sah. Nur über kleine und niedrige Objecte auf ihrem Wege stolperten die Tauben öfters, allen grösseren Hindernissen wichen sie stets gut aus; und wenn sie zu dem Ende des Tisches gelangten, setzten sie wohl manchmal über den Rand hinaus den Fuss, manchmal aber schwenkten sie vorher zur Seite ab. Von der zweiten oder dritten Woche an scheuten die Tauben, wenn man die Hand gegen das linke Auge bewegte, am ehesten und häufigsten, wenn die Hand sich von oben oder hinten her näherte, aber auch wenn sie von unten kam; die gleichen Hantirungen vor dem rechten Auge blieben erfolglos. Brachte man im finsteren Zimmer ein grelles Licht vor die Augen und bewegte es nach allen Richtungen, so kam nie mehr als der Pupillarreflex zur Beobachtung. Vom zweiten Monate an flogen die Tauben auf, meist im Gefolge des Flügelschüttelns, so dass das Fliegen hin und wieder an die Stelle des Flüsterns trat, oder nachdem sie stark gereizt worden waren, z. B. durch wiederholtes Drücken der Zehen; in sehr vereinzelten Fällen auch dann, wenn sie beim Gehen auf ein unebenes Terrain oder an ein Hinderniss gekommen waren. Immerhin war solches Auffliegen selbst nach Monaten nur ein höchst seltenes Vorkommniss, und der Flug ging nur einige Fuss hoch und dauerte nur kurze Zeit an. Entweder drehten sich dann die Tauben im Fluge und liessen sich ungefähr dort wieder nieder, woher sie aufgeflogen waren, oder sie setzten sich höher oben auf einen Froschtopf, einen Tisch, einen Käfig, einen Schrank u. s. w. Liess man die Tauben in der Luft los oder warf man sie in die Höhe, so flogen sie etwa von der fünften Woche an nach Art der normalen Taube mit vorgestrecktem Kopfe und angezogenen Beinen, und zwar fast immer in Linkswindungen abwärts; und sie setzten sich, indem sie zum Schlusse die Beine vorstreckten, auf den Fussboden, unsanft und ungeschickt, doch mit wenig Überschlagen oder Gleiten. War dazu Gelegenheit geboten, so kamen sie auch gar nicht zu Boden, sondern setzten sich schon vorher, wiederum ungeschickt, auf den Tisch, den Käfig u. dergl. m.; ja, wenn ihr Flug sie nicht gerade auf solche Objecte zu, sondern nur dicht an ihnen vorbei führte, änderten

sie wohl einmal plötzlich die Flugrichtung, bogen nach rechts oder nach links um oder hoben sich nochmals ein wenig, um die Objecte zu erreichen. Andererseits stiessen aber auch die Tauben, besonders während der ersten Zeit des Fluges, häufig an Hindernisse auf ihrem Wege an oder geradezu in dieselben hinein; und wenn sie sich nicht sogleich fixiren konnten, z. B. am Ofen, an der Wand u. s. w., fielen sie flatternd vertical herab, und bloss einzelne bewahrten sich vor dem harten Aufschlagen durch eine Windung, welche sie noch dicht vor dem Boden beschrieben. War solchen Tauben das linke Auge vernäht worden, so flogen sie nicht anders wie die Tauben der ersten Gruppe; und wenn man sie unmittelbar vor und unmittelbar nach der Entfernung der Nähte prüfte, so liess sich auch constatiren, dass die Tauben im letzteren Falle seltener und weniger heftig an die Objecte auf ihrem Fluge stiessen, als im ersteren Falle. War endlich den Tauben noch das linke Auge exstirpirt worden, so verhielten sie sich fortan in allen Stücken wie die Tauben der ersten Gruppe.

Was aus diesen Versuchen zu entnehmen ist, bedarf keines langen Commentars. Sie zeigen zunächst im allgemeinen, dass über den Gesichtssinn der Tauben guten Aufschluss zu gewinnen und selbst noch die letzten Reste des Sinnes zu erkennen keine Schwierigkeiten hat, wenn man nur lange und umfassend genug die Thiere untersucht. Im besonderen sodann folgt nicht bloss aus dem Verhalten jeder einzelnen Gruppe für sich, sondern ausserdem noch aus den Verschiedenheiten im Verhalten zwischen den verschiedenen Gruppen mit aller Sicherheit: dass die Tauben der ersten Gruppe den Gesichtssinn völlig eingebüsst hatten, und dass die anderen Tauben nur noch mit einem Auge sahen und nur sehr wenig, die Tauben der zweiten Gruppe bloss ganz spurweise, die der dritten Gruppe etwas mehr. Demgemäss lehren die Tauben der ersten Gruppe, dass die völlige Entfernung des Grosshirns bei der Taube andauernde völlige Blindheit mit sich bringt. Und dasselbe ergeben die Tauben der dritten Gruppe, da nur so es verständlich ist, dass, wo die eine Hemisphäre ganz und die andere Hemisphäre fast ganz entfernt ist, die Taube mit dem einen Auge gar nicht und mit dem anderen Auge sehr wenig sieht. Dasselbe erweisen aber auch die Tauben der zweiten Gruppe. Denn es wäre widersinnig, anzunehmen, dass durch die gleiche totale Exstirpation der beiden Hemisphären völlige Blindheit auf dem einen und fast völlige Blindheit auf dem anderen Auge bedingt seien, und unabweislich ist die Erkenntniss, dass bei diesen Tauben doch noch ein Rest von der einen Hemisphäre erhalten war, dem restirenden spurweisen Sehen gemäss äusserst klein, so dass er der Constatirung

entging. Vollends endlich wird dasselbe durch die Gesammtheit der Versuche ausser Zweifel gesetzt, da diese von der dritten zur ersten Gruppe hin, entsprechend der fortschreitenden Vervollkommnung der Exstirpation auch der zweiten Hemisphäre, die bis zur Erblindung fortschreitende Verschlechterung des Sehens auch des zweiten Auges darthut.

Die grosshirnlose Taube ist also für die Dauer ganz blind, und es war ein Irrthum meiner Vorgänger, dass sie anderes behaupteten. Allerdings waren ihre Versuchsthiere nicht blind, aber diese Thiere hatten auch nicht das Grosshirn ganz eingebüsst. Wieviel jedesmal erhalten war, das würde, auch wenn es der Mühe lohnte, nicht genauer festzustellen sein, weil auf das Sehen mit dem einzelnen Auge nie geachtet und auch sonst allermeist nur unzureichend geprüft worden ist. Aber da nach den Schilderungen[1] die Thiere Erscheinungen der Art zeigten, dass sie oft und stundenlang von selber gingen, Hindernisse beim Gehen und Fliegen regelmässig vermieden, nach dem Fliegen sich in normaler Weise fixirten, pickten, girrten, auf grelle Beleuchtung blinzelten, der Bewegung des Lichtes mit dem Kopfe folgten u. s. w., ist nach den vorgeführten Versuchen mit aller Bestimmtheit zu sagen, dass überall mehr vom Grosshirn zurückgeblieben war, als bei unseren Tauben der dritten Gruppe; und darauf, dass bald wenig, bald viel mehr restirte, sind, wie ich mich durch weitere Versuche überzeugt habe, einfach die Verschiedenheiten zurückzuführen, welche das Verhalten der Thiere in den verschiedenen Fällen darbot. Bei der mangelhaften operativen Technik meiner Vorgänger, vor allem weil sie nicht die Knochendecke abnagten, bis sie hinter die Hemisphäre gelangten, konnte es eben gar nicht anders sein, als dass sie in den Ventrikel geriethen und mindestens ein ansehnliches Stück der Ventrikeldecke zurückliessen; und treffend charakterisirt, was geschah, Hrn. Voit's[2] Versicherung: »ich bin vollkommen gewiss, dass die beiden Hemisphären völlig entfernt waren, und namentlich hatte ich die hinteren Halbkugeln ganz ausgeschält,« da von solchem Ausschälen der hinteren Halbkugeln nur dann die Rede sein kann, wenn man die sogenannten Corpora striata umgreift, welche die Ventrikelhöhle nach

[1] Magendie, l. c. (s. o. S. 795). — Longet, a. a. O. Bd. I. S. 525. — J. M. Schiff, Lehrbuch der Physiologie des Menschen. Bd. I. Lahr 1858—59. S. 332. — Renzi, l. c. Vol. 186 p. 387—93. — Bischoff, Sitzungsberichte der Münchener Akademie d. Wissensch. 1863 Bd. I. S. 479—82. — Voit, ebenda 1868. Bd. II. S. 106—7. — J. Rosenthal, Centralblatt für die medicin. Wissensch. 1868. S. 739. — Lussana e Lemoigne, Fisiologia dei centri nervosi encefalici. Padova 1871. Vol. I. p. 8—11; 52. — Sigm. Exner, Hermann's Handbuch der Physiologie, Bd. II. Theil II. Leipzig 1879. S. 199—200.

[2] A. a. O. S. 107.

unten und aussen begrenzen. Dass aber auch bei der Section, selbst wenn das Thier längere Zeit am Leben geblieben war, der Grosshirnrest nicht gefunden wurde, erklärt sich daraus, dass, was von der Ventrikeldecke stehengeblieben ist, nicht sich umschlägt und nun etwa als gefaltete Membran am Pedunculus hängt, sondern seine normale Lage beibehält: die glatte hintere Begrenzung der Höhle, welche die Section aufdeckt, täuscht die reinliche Fortnahme der Hemisphäre vor, und die dünne der Dura dicht anliegende Membran wird, wenn man nicht genau zusieht, für die Dura gehalten. Bei grossen und gar beiderseitigen Resten ist natürlich ein Übersehen nicht mehr möglich; da zeigt sich, was Hr. Voit[1] für einen seiner Fälle beschreibt: eine ununterbrochen und unmerklich in die Grosshirnschenkel übergehende weisse Masse vom Ansehen und von der Consistenz weisser Hirnmasse, welche die Form zweier Halbkugeln hat, in deren jeder eine kleine mit Flüssigkeit gefüllte Höhle und dazwischen ein Septum sich befindet.[2]

Nur Flourens unter meinen Vorgängern kommt eine besondere Stellung zu. Man hat seine oft wiederkehrende Angabe, dass die Vögel nach Exstirpation des Grosshirns nicht sahen, wenig beachtet, und auch ich dürfte auf die nackte Angabe kein besonderes Gewicht legen, weil er sie ebenso für andere Thiere gemacht hat, bei welchen sie sich nicht bewährt hat. Aber Flourens' zerstreute und beiläufige Bemerkungen[3] ergeben doch, wenn man sie zusammenstellt, dass jene Vögel von Zeit zu Zeit einige zwecklose Schritte machten, aber sonst nicht von selber gingen, dass sie nüchtern öfter und länger trippelten als nach der Fütterung, dass sie beim Gehen immer an die Hindernisse stiessen, dass sie nicht pickten, dass sie auf Licht nicht reagirten: und alles das passt ganz gut auf Vögel, welchen das Grosshirn vollkommen entfernt ist. Wenn also auch Flourens' Untersuchung der Functionen des Grosshirns infolge seiner Unklarheit und infolge des Durcheinander von richtigen und falschen Versuchsergebnissen zu einem guten Erfolge nicht hat führen können, so ist das doch jedenfalls anzuerkennen, dass es möglicherweise Flourens zuerst und für 60 Jahre allein gelungen ist, grosshirnlose Vögel zu beobachten. Hätte man jene Bemerkungen nicht geringgeschätzt, so wäre man wahrscheinlich längst zu richtigeren Anschauungen über die fundamentalen Leistungen des Grosshirns gelangt, als sie noch jetzt gänge und gebe sind.

---

[1] A. a. O. S. 107—8.
[2] Vergl. auch Flourens, l. c. p. 164.
[3] L. c. p. 32, 34, 49, 90—7, 125, 130, 156.

Aber ich bin mit der Untersuchung der Taube noch nicht zu Ende. Schon Flourens[1] hatte angegeben, dass die Vögel nach der Exstirpation einer Hemisphäre auf dem gegenseitigen Auge für die Dauer blind seien, und Hr. McKendrick[2] und Hr. Jastrowitz[3] hatten die Angabe in neuerer Zeit wiederholt. Die Beweiskraft der bezüglichen Versuche hatte Hr. Blaschko[4] mit gutem Grunde angezweifelt, da er an Tauben, welche nach einseitiger Hirnverletzung vollkommen blind auf dem entgegengesetzten Auge geschienen hatten, doch noch ein gewisses Sehvermögen auf diesem Auge erhalten fand, wenn das andere Auge exstirpirt worden war. Jetzt haben, von allem solchen Zweifel frei, meine obigen Versuche durchweg, wo die Totalexstirpation einer Hemisphäre gelungen war, bleibende volle Blindheit des gegenseitigen Auges ergeben. Da nun grosshirnlose Tauben nur äusserst schwer für die Beobachtung zu erhalten sind und so selten, dass ich selber mit den grössten Opfern es doch nur auf vier der ersten und neun der zweiten Gruppe angehörige Tauben gebracht habe, so wird man mit Recht fragen, warum ich denn, wo die Entfernung einer einzelnen Hemisphäre ausreichen konnte, doch so sehr um die Entfernung beider Hemisphären mich bemüht habe, und wenn ich schon dies that, warum ich hier gar nicht von der einseitigen, sondern immer nur von der beiderseitigen Totalexstirpation gehandelt habe. Darüber muss ich noch Aufschluss geben; und indem ich dazu nachhole, was ich anscheinend bisher versäumte, wird auch die Lösung meiner Aufgabe noch eine wesentliche Vervollkommnung erfahren.

Die Exstirpation einer einzelnen Hemisphäre, mit den selbstverständlichen Beschränkungen derart ausgeführt, wie ich es für die Exstirpation beider Hemisphären beschrieb, ist mir ungleich seltener als die letztere missglückt, und insbesondere sind die Verluste durch Nachblutungen und Entzündungen viel kleiner gewesen. Ja, man kann, wie ich zuletzt fand, noch einen Theil der Verluste dadurch verhüten, dass man die Thiere während der ersten Stunden nach der Operation eingewickelt im Tuche verbleiben lässt; denn gerade die willkürlichen Bewegungen, welche solche Tauben bald nachdem man sie freigelassen, ausgiebig machen, sind häufig zu Nachblutungen Anlass. Die meisten Thiere ernährten sich nach der Operation wie vorher;

---

[1] L. c. p. 31—7, 94, 151—2, 161—2.

[2] Observations and experiments on the corpora striata and cerebral hemispheres of pigeons. Reprint. from the Transact. of the R. Soc. of Edinburgh, 1873. p. 20—2. — Bei diesen Versuchen war allerdings nur die membranartige Ventrikeldecke mit dem oberen Theile des sogenannten Corpus striatum entfernt worden; aber da Blindheit des gegenseitigen Auges die Folge war, gehören die Versuche a fortiori hierher.

[3] Archiv für Psychiatrie, Bd. VI. 1876. S. 612—8.

[4] A. a. O. S. 27—8.

[illegible]

unverändert. Hin und wieder scheuten auch die Tauben, wenn man im finsteren Zimmer plötzlich ein Licht vor den Schnabel brachte; tauchte das Licht in anderer Stellung zum linken Auge auf, so kam nichts anderes als der Pupillarreflex zur Beobachtung. In seltenen Fällen girrten die Tauben. Bei diesem Verhalten blieb es für die Folge, auch wenn die Thiere noch durch Monate am Leben blieben.

Bei allen den Thieren, welche ich eben schilderte, war die Operation gut zur Ausführung gekommen und hatte auch die Section die totale Exstirpation der einen Hemisphäre erwiesen. Immerhin ist es nicht ausgeschlossen, wie uns unsere zweite Gruppe der Tauben belehrt hat, dass doch ein äusserst kleiner Rest der Hemisphäre noch erhalten war, welcher sich der Constatirung entzog. Aber solchem Reste der Hemisphäre das restirende Sehvermögen unserer Tauben zuzuschreiben, geht nicht an. Dafür sahen die Tauben viel zu gut: durchaus nicht spurweise wie die Tauben der zweiten Gruppe, sondern sogar noch etwas besser als die Tauben der dritten Gruppe, bei welchen allen doch der stehengebliebene Fetzen der Ventrikeldecke gefunden worden war. Auch ist es gar zu unwahrscheinlich, dass hier die naturgemäss leichtere Operation niemals vollkommen gelungen sein sollte; wechselten aber ganz geglückte Versuche mit nicht ganz geglückten ab, so kann offenbar der Rest des Sehvermögens, der bei allen diesen Tauben der gleiche war, mit jenem Reste der Hemisphäre nichts zu schaffen haben. Endlich und hauptsächlich bot das Sehen dieser Tauben in gewisser Hinsicht eine wesentliche Verschiedenheit von dem Sehen der vorbehandelten Tauben dar. Denn alle Tauben der zweiten Gruppe scheuten bloss dann vor der gegen das Auge bewegten Hand, wenn dieselbe von oben her kam; und im gleichen Falle scheuten immer auch die Tauben der dritten Gruppe, sie scheuten nur ausserdem noch, wenn die Hand von hinten oder unten kam: dagegen scheuten diese Tauben hier nie anders, als wenn die Hand von vorn her sich dem Auge näherte, dann aber scheuten sie durchweg, und ebenso hatten der Bleistift und das Licht nur die angegebenen Erfolge, wenn dieselben vor dem Auge sich befanden.

Flourens' Angabe, dass die Vögel nach der Exstirpation einer Hemisphäre auf dem gegenseitigen Auge für die Dauer blind seien, und die entsprechenden Angaben von Hrn. McKendrick und Hrn. Jastrowitz sind also unrichtig und durch die unzureichende Untersuchung der Versuchsthiere veranlasst. Recht behalten hier, die das Gegentheil behaupteten, Hr. Renzi[1] und die HH. Lussana und Lemoigne,[2]

[1] L. c. Vol. 186 p. 417—23.

[2] Fisiologia dei centri nervosi encefalici. Padova 1871. Vol. I. p. 13—5.

freilich aber nur auf Grund ihrer unvollkommenen Operationen, welche sie wiederum hinsichtlich der Folgen beiderseitiger Exstirpation in den umgekehrten Irrthum haben verfallen lassen. Der wahre Sachverhalt ist, dass die Taube durch den Verlust beider Hemisphären auf beiden Augen für die Dauer völlig blind wird, nach dem Verluste einer einzelnen Hemisphäre aber nicht völlig blind auf dem gegenseitigen Auge ist, sondern hier einen Rest des Sehvermögens noch behalten hat. Und damit stehen wir durchaus nicht vor einer Paradoxie, welche ja auch schon dadurch ausgeschlossen ist, dass wir es eben bloss mit nackten Versuchsergebnissen zu thun haben. Vielmehr fliesst daraus nur die Erkenntniss, dass jede Retina bei der Taube zu beiden Hemisphären in Beziehung steht und vorwiegend mit der gegenseitigen, viel weniger mit der gleichseitigen Hemisphäre verbunden ist. Unsere letzten Versuche lehren dazu ferner noch, dass die äusserste laterale (hintere) Partie der Retina der gleichseitigen, die ganze übrige Retina der gegenseitigen Hemisphäre zugehört.

Bei solcher Verwickelung der Sache war natürlich durch den ausschliesslich einseitigen Angriff des Grosshirns die Bedeutung, welche diesem für das Sehen bei den Vögeln zukommt, nicht festzustellen. Ja, diese Verwickelung trägt auch überhaupt neben den unvollkommenen Exstirpationen wesentlich mit die Schuld an aller der Verwirrung und den Widersprüchen, welche hinsichtlich jener Bedeutung so lange bestanden. Hatte man die Vögel nach dem Verluste einer Hemisphäre auf dem entgegengesetzten Auge sehend gefunden, so nahm man es als selbstverständlich, dass sie auch ohne das ganze Grosshirn sahen; und hatten sie nach der Entfernung des ganzen Grosshirns blind geschienen, so mussten sie auch nach dem Verluste einer Hemisphäre auf dem entgegengesetzten Auge blind sein. Aber der Glaube, von welchem man sich dabei leiten liess, dass die Sehnerven der Vögel eine totale Kreuzung erfahren, war eben irrig; und soviel ihn auch bis in die neueste Zeit[1] die Anatomie des Chiasma gestützt hat, so wird er doch sicher durch die Versuche widerlegt, welche eine bloss partielle Kreuzung erweisen, so dass ein kleiner Theil der Sehnervenfasern zur gleichseitigen Retina zieht. Ebenso war es falsch, was man von jeher mit der totalen Kreuzung der Sehnerven in Zusammenhang brachte, dass die Gesichtsfelder der beiden Augen bei den Vögeln vollständig getrennt sein sollten. Heinrich Müller hat bei vielen Vögeln ausser der etwa in der Mitte des hin-

[1] von Gudden, von Gräfe's Archiv für Ophthalmologie. Bd. 20. Abth. II. 1874. S. 251; 267. — Vgl. auch ebenda Bd. 25. Abth. I. 1879. S. 19. Das Misstrauen, welches hier von Gudden, auf Grund seiner neueren Erfahrungen am Kaninchen, selber gegen seine Ergebnisse an den Vögeln gefasst hat, war, wie sich zeigt, nur zu berechtigt.

teren Augensegments oder etwas mehr nach der Schläfenseite hin befindlichen Fovea centralis noch eine zweite Fovea aufgefunden, welche noch mehr nach der Schläfenseite hin gelegen ist und bis fast an die Ora serrata rücken kann. »Das Experiment zeigt«, sagt er, »dass die eine Fovea dem monoculären, die andere aber dem binoculären Sehen dient. Es fällt nämlich das Bild eines gerade nach vorn gelegenen Lichtpunktes nachweislich in beide [sc. laterale] Foveae zugleich. Hiernach müssen in dem Gesichtsfeld dieser Vögel drei Stellen deutlicheren Sehens vorausgesetzt werden.«[1] Ich kann als einfachen und klaren Beweis für das binoculare Sehen hinzufügen, dass die Taube nach der Exstirpation eines Auges oder einer Hemisphäre in der ersten Zeit sehr häufig die zerstreut auf dem Boden liegenden Erbsen beim Picken verfehlt, indem sie mit dem Schnabel seitlich an ihnen vorbei schlägt, und erst allmählich die Erbsen besser treffen lernt.

Schliesslich klärt es sich auch noch in recht interessanter Weise auf, woher der trügerische Anschein rührte (s. oben S. 821), als ob unsere Versuche, bei welchen beide Hemisphären angegriffen worden waren, die FLOURENS'sche Angabe bezüglich der Folge einseitiger Exstirpation bestätigten. Für uns auf unserem jetzigen Standpunkte ist, was schon die Erfahrungen der HH. MCKENDRICK[2], MUSEHOLD[3],

---

[1] (ZEHENDER's Klinische Monatsblätter, 1863. S. 438—40.) HEINRICH MÜLLER's gesammelte Schriften zur Anatomie und Physiologie des Auges. Bd. I. Herausgeg. von OTTO BECKER. Leipzig 1872. S. 142—3. — Diese Ermittelungen HEINRICH MÜLLER's sind mir erst neuerdings bekannt geworden, und sie sind mir deshalb so lange entgangen, weil VON GUDDEN (a. a. O. Bd. 25) bloss die ältere Angabe von H. MÜLLER (Ges. Schr. S. 138) citirt, dass bei den Eulen der hintere Pol des Auges so weit auswärts liege, dass ein gemeinschaftlicher Sehakt mit der Fovea beider Augen sehr wahrscheinlich sei; ich meinte VON GUDDEN eine volle Kenntniss der bezüglichen Litteratur und insbesondere gerade der Ermittelungen von H. MÜLLER zutrauen zu dürfen. Infolge dessen hat der Glaube an die totale Kreuzung der Sehnerven bei der Taube in hohem Grade verwirrend auch auf den Gang meiner Untersuchung gewirkt, so lange ich hinsichtlich der Technik der Totalexstirpation in Nöthen war; und erst als ich die operativen Schwierigkeiten überwunden und die Verschiedenheiten in den Resten des Sehvermögens constatirt hatte, drängte sich mir die Lösung aller Räthsel auf. Infolge dessen habe ich ferner, was ich noch mehr bedauere, zur Zeit nicht erkannt, dass BLASCHKO's Unternehmen an der Taube scheitern musste, als er die anfangs geübten beiderseitigen Exstirpationen, weil er die Thiere nicht am Leben erhalten konnte, aufgab und auf einseitige Exstirpationen sich beschränkte. Dass doch BLASCHKO's Bemühungen an der Taube nicht fruchtlos gewesen sind, lehrt die Folge oben im Text.

Die beiden Foveae hat später J. HIRSCHBERG (DU BOIS-REYMOND's Archiv, 1882. S. 90) auch bei der ophthalmoskopischen Untersuchung der Taube gefunden, die centrale Fovea in der Mitte, die laterale hoch oben an der Retina.

[2] L. c. p. 20 f.

[3] Experimentelle Untersuchungen über das Sehcentrum bei Tauben. Inaugural-Dissertation. Berlin 1878. S. 14 ff.

Moeli[1] wahrscheinlich machten, durch Hrn. Blaschko's[2] Versuche zur Gewissheit gebracht, dass die Sehsphäre der Taube an der Oberfläche des hinteren Theiles der Hemisphäre sich befindet; denn dort allein hatten partielle Exstirpationen Sehstörungen zur Folge, und die Störungen waren desto grösser, je ausgedehnter exstirpirt worden war. Hrn. Blaschko scheint es sogar einmal gelungen zu sein, eine ganze Sehsphäre zu exstirpiren; denn bei der einen Taube, welche nur noch mit dem hinteren (lateralen) oberen Stücke der gegenseitigen Retina sah, dürfte nicht, wie Hr. Blaschko meinte, wegen der anatomischen Schwierigkeiten ein Rest der Sehsphäre zurückgeblieben sein, sondern bloss diejenige Retinapartie, welche der unverletzten gleichseitigen Hemisphäre zugehörte, sich zu erkennen gegeben haben. Ob die dünne Ventrikeldecke, welche Hr. Blaschko immer allein entfernte, auch wirklich für sich allein die Sehsphäre ausmacht, liesse sich nach Hrn. Blaschko's Versuchen noch bezweifeln, weil die obere Schicht des sogenannten Corpus striatum durch die reactive Entzündung zugrundegegangen sein konnte; allein ich habe wiederholt zu beobachten Gelegenheit gehabt, dass nach Fortnahme des ganzen Grosshirns bis auf die Ventrikeldecken das Sehen noch überall erhalten war, dass solche Tauben nach einigen Wochen regelmässig scheuten, gleichviel in welcher Richtung die Hand den Augen genähert wurde. Nehmen wir dazu, was unsere Tauben der zweiten und der dritten Gruppe als der Sehsphäre angehörig ergeben, so lässt sich zwar die Sehsphäre der Taube noch nicht genau begrenzen, aber es ist doch mit Sicherheit zu sagen, dass die vom Pedunculus aus nach oben und vorn sich erstreckende Ventrikeldecke in grosser Ausdehnung die Sehsphäre bildet. Nun haben wir an unseren Tauben der zweiten Gruppe das Sehvermögen bloss für die unterste Partie der Retina erhalten gefunden; es muss also diese Retinapartie der untersten, am Pedunculus gelegenen Sehsphärenpartie zugeordnet sein. Und an unseren Tauben der dritten Gruppe, bei welchen der zurückgelassene Fetzen der Ventrikeldecke immer medial- und aufwärts vom Pedunculus sich erstreckte, hat sich das Sehvermögen erhalten gezeigt besonders für die untere und die mediale Retinapartie; so dass die mediale Retinapartie der medialen Sehsphärenpartie zugehört. Danach bleibt nur übrig, dass die laterale Retinapartie zugeordnet ist der lateralen Sehsphärenpartie. Das ist aber derjenige Theil der Ventrikeldecke, welcher am besten zugänglich und am leichtesten zu exstirpiren ist; und weil bei unseren beiderseitigen Exstirpationen immer die lateralen

[1] Virchow's Archiv, Bd. 76. 1879. S. 484.
[2] A. a. O. S. 27—9.

Partien beider Sehsphären entfernt waren, konnte es nicht anders sein, als dass jedesmal, wenn dort die Exstirpation einer Hemisphäre ganz gelungen war, auch das gegenseitige Auge vollkommen blind war.

Somit lasse ich, soviel ich sehe, nirgend mehr, auch nicht in Hinsicht auf die Ergebnisse meiner Vorgänger, eine Dunkelheit zurück, wenn ich jetzt die Untersuchung der Taube abschliesse. Und was an dieser ermittelt ist, darf für die Vögel überhaupt gelten, weil meine Vorgänger ausser der Taube noch die verschiedensten anderen Vögel (Huhn, Ente, Falke u. s. w.) untersucht und nie Abweichungen in den Erfolgen der Versuche bemerkt haben. Auch bei den Vögeln sind also, wie beim Hunde und beim Affen, alle centralen Vorgänge des Gesichtssinnes an das Grosshirn geknüpft und ist ebenso jede Hemisphäre mit beiden Retinae in Verbindung gebracht; ja sogar die Lage der Sehsphären und die Projection der Retinae auf die Sehsphären finden sich bei den Vögeln derart, wie bei jenen höheren Säugethieren, wieder.

(Fortsetzung folgt.)

35. Über einige Eigenschaften kreuzweise verbundener Magnetstäbe.

Von A. Toepler
in Dresden.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 19. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [S. XXXVI]; — ausgegeben am 26. Juli.)

Bekanntlich bedient man sich bei Ablenkungsbeobachtungen der Drehmomente, welche ein Magnet vom Momente M in den beiden Hauptlagen auf einen zweiten Magnet m in grossem Abstande r ausübt, welche Drehmomente mit

$$\frac{Mm}{r^3}\left(1+\frac{\varkappa}{r^2}+\ldots..\right)$$

proportional sind. Der Factor $\varkappa$ des zweiten Gliedes bestimmt sich aus Beobachtungen in zwei Abständen oder aus gewissen Annahmen über die Lage der Pole in den Magneten. Vierte und höhere Glieder werden gegen die Einheit vernachlässigt. Lamont hat bemerkt (Magnetismus S. 182), dass bei den sogenannten Sinusablenkungen das zweite Glied verschwindet, wenn der Abstand der Pole im Ablenkungsmagnete in einem bestimmten Verhältniss steht zum Polabstand in der Magnetometernadel. Bedient man sich einer Nadel, deren Dimensionen für den gewünschten Genauigkeitsgrad ausser Betracht fallen, so lässt sich das zweite Glied durch eine Anordnung beseitigen, welche keine Voraussetzung über den Polabstand[1] im Ablenkungsmagnete erfordert.

Auf einem unendlich dünnen Stabe seien die beiden Magnetismen symmetrisch zur Stabmitte angeordnet, so zwar, dass beim Zusammenlegen der Stabhälften der unmagnetische Zustand entstehen würde. In dem einen solchen Linearmagnet in der Ferne umgebenden Raum ergeben sich Vereinfachungen für zwei zum Magnete concentrische und coaxiale Kegelflächen.

[1] Unter Polabstand verstehe ich in dem von v. Helmholtz (Sitzungsbericht vom 5. April 1883 S. 405) angegebenen Sinne den aus dem zweiten Gliede nach der Formel $\rho^2=\frac{\Sigma\lambda^3\nu}{\Sigma\lambda\nu}$ abgeleiteten mittleren Abstand der Stabmagnetismen, wobei λ den Abstand je zweier correspondirender Theilchen diesseits und jenseits der Stabmitte, ν ihren Magnetismus bezeichnet.

Auf einer Kegelfläche, deren halber Öffnungswinkel α_1 der Bedingung $\operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ entspricht, verschwindet das zweite Glied aus denjenigen Kraftcomponenten, welche in die Kegelfläche fallen. Die auf einen entfernten Pol n in dieser Kegelfläche wirkende Componente ist daher mit sehr grosser Annäherung $2\frac{Mn}{r^3}\cos\alpha_1$.

Auf einer zweiten Kegelfläche, deren halbe Öffnung durch die Bedingung $\operatorname{tg}\alpha_2 = 2$ bestimmt ist, verschwindet das zweite Glied aus den Componenten senkrecht zur Fläche. Die Componente ist für grosse Abstände $\frac{Mn}{r^3}\sin\alpha_2$.

Die auf den Kegelflächen verschwindenden Glieder nehmen in beiden Fällen positiven oder negativen Werth an, je nachdem der Pol n innerhalb oder ausserhalb des von der betreffenden Kegelfläche umschlossenen Raumes liegt[1].

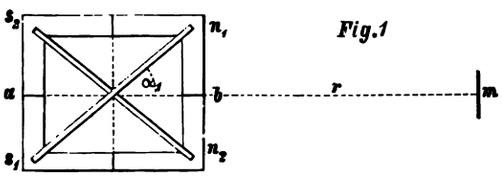


Fig. 1

Aus dem von der ersteren Kegelfläche Gesagten folgt, dass, wenn man auf eine sehr kleine Nadel m aus grossem west - östlichem Abstande r einen regelrecht magnetisirten Stab $n_1 s_1$ wirken lassen würde, welcher mit r den Winkel $\alpha_1 = 39^\circ\,13'\,54''$ bildet, man Ablenkungen erhalten müsste, deren Tangenten mit r^{-3} sehr nahe proportional sind, falls man Sorge trägt, die zu r senkrechte Kraftcomponente, für welche jene Proportionalität nicht gilt und welche zu der Directionskraft des Erdmagnetismus hinzukommt, zu eliminiren. Diese Elimination ist möglich, indem man den Magnet $n_1 s_1$

---

[1] Sei m das Moment, λ der Abstand zweier punktförmiger Pole, r die Entfernung eines beliebig gelegenen Poles n von der Mitte von λ, α der Winkel zwischen r und λ, so ist mit Ausschluss von vierten, sechsten u. s. w. Gliedern die Componente in der Richtung von r durch

$$2\frac{mn\cos\alpha}{r^3}\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2\cos^2\alpha}{r^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\lambda^2\sin^2\alpha}{r^2}\right\}$$

und die Componente senkrecht zu r durch

$$\frac{mn\sin\alpha}{r^3}\left\{1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\lambda^2\cos^2\alpha}{r^2} - \frac{3}{8}\cdot\frac{\lambda^2\sin^2\alpha}{r^2}\right\}$$

ausgedrückt. Wenn α beziehungsweise einer der beiden obigen Bedingungen entspricht, so verschwinden in der betreffenden Componente die Correctionsglieder für jedes λ, also auch für die betrachtete magnetische Linie. Das Übrige folgt ohne Weiteres. Durch dieselben Zahlen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ und 2, welche im vorliegenden Falle Winkel bestimmen, ist bei dem LAMONT'schen Verfahren das Verhältniss der Poldistanzen der Magnete bestimmt. Sonst haben die Methoden nichts gemein.

unter constantem Winkel α_1 um r dreht, bis er in die zu m senkrechte Ebene fällt. Das Experiment würde aber schwierig sein, weil kleine Änderungen von α_1 schon merklichen Einfluss auf das Magnetometer haben.

Ganz gut gelingt jedoch die Elimination, wenn man den Magnet $n_1 s_1$ mit einem zweiten $n_2 s_2$ von annähernd gleicher Stärke so verbindet, dass sich dieselben unter dem Winkel $2\alpha_1 = 78^\circ\ 27'\ 48''$, gemessen zwischen gleichnamigen Schenkeln, kreuzen. Vor dem Härten und Magnetisiren liess ich zwei Stäbe in der Mitte zur Hälfte ausfeilen, so dass sie mit den Einschnitten ineinandergefügt, die in Fig. 1 gezeichnete Combination bilden. Auf einer passenden Umrahmung wurde die Mittellinie ab markirt. Längs dieser Mittellinie berühren sich nun die beiden obenerwähnten, dem Winkel α_1 entsprechenden Kegelflächen beider Stäbe. Daher verschwinden längs dieser Mittellinie sowohl als auch in dem nächst benachbarten Bereich die Correctionsglieder 2. Ordnung für die der Mittellinie parallele Kraftcomponente. Orientirt man diese Mittellinie wie die Axe eines Magnetes in der ersten Hauptlage, so ist, falls die Momente M_1 und M_2 der beiden Stäbe nur angenähert gleich sind, der durch Vernachlässigung der zu r (Fig. 1) senkrechten und nicht ganz compensirten Kraftcomponenten begangene Fehler klein. Er beeinflusst bei 1 Procent Unterschied der Stabmomente die Ablenkungsbeobachtung nur mit etwa $^1/_{9300}$ ihres Werthes, falls der mit Spiegel gemessene einfache Ausschlagswinkel 3° nicht überschreitet. Die Orientirung des Systems braucht nur nach Augenmaass zu geschehen. Abweichungen bis zu 1° rechts oder links veranlassen kaum einen merklichen Unterschied in der Einstellung des Magnetometers. Kurz, der beschriebene Kreuzmagnet verhält sich gegenüber einer entfernten kleinen Nadel, auf welche seine Mittellinie hinzielt, abgesehen von vierten u. s. w. Gliedern, wie ein sehr kleiner aber sehr kräftiger Magnet vom Moment $(M_1 + M_2)\cos\alpha_1$ in der ersten Hauptlage. Für die Ablenkungsbeobachtungen ist es gleichgültig, ob die Ebene des Systems horizontal oder vertical gestellt ist (s. unten).

Ebenso wie für die erste Hauptlage, so lässt sich auch für die zweite ein entsprechender Kreuzmagnet herstellen. Man braucht den Magnetstäben nur den zwischen ungleichnamigen Schenkeln gemessenen Winkel $2\alpha_2 = 126^\circ\ 52'\ 12''$ zu geben und die Transversale cd (siehe Fig. 2) in der Meridianebene auf die Nadel m hinzielen zu lassen, während ab horizontal liegt. Hier gelten ähnliche Erwägungen wie oben, jedoch darf die Stabcombination selbstverständlich nicht um cd gedreht werden. Dagegen kann r jede beliebige Neigung zum Horizont haben. Wenn nur ab senkrecht zur Meridianebene steht und

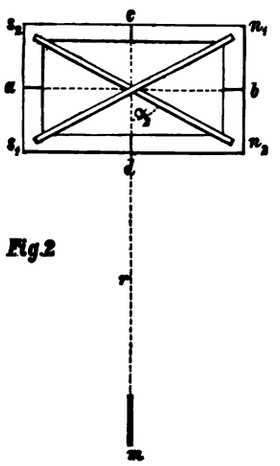


Fig. 2

cd nach m hinzielt, so wirkt das System wie ein sehr kleiner Magnet vom Moment $(M_1 + M_2)$ sin α_2 in der zweiten Hauptlage. Der aus der Ungleichheit der Momente hervorgehende Fehler der Ablenkungsbeobachtung ist aber in diesem Falle im Verhältniss 4 cotg α_1 cotg $\alpha_2 = 2.45$ mal grösser als im vorigen.

Die oben angegebenen Winkelwerthe α_1 und α_2 brauchen nur angenähert innegehalten zu werden. In dem Folgenden sind einige Beobachtungen zusammengestellt, welche die thatsächlichen Verhältnisse erläutern. Der Kürze halber will ich die in Rede stehenden Stabcombinationen beziehungsweise mit den Benennungen »erster« und »zweiter Kreuzmagnet« (K_1 und K_2) bezeichnen, womit zugleich die Hauptlage angegeben ist, für welche die betreffende Combination Geltung hat.

Der erste Kreuzmagnet bestand aus zwei lamellenförmigen Stäben von 160^{mm} Länge, 17.5^{mm} Breite und 3.4^{mm} Dicke, welche in der Richtung der Breite ineinander gefügt waren. Der oben definirte Kreuzungswinkel war 78° 4′. Der zweite Kreuzmagnet hatte Lamellen derselben Dimensionen, sein Kreuzungswinkel war 128° 29′.

Jedes der beiden Systeme wurde zum Vergleich in beiden Hauptlagen untersucht, die Mittellinie ab (Fig. 1 und 2) selbstverständlich jedesmal nach West-Ost gerichtet. Das Wegfallen des zweiten Gliedes zeigt sich in der Constanz des Productes r^3 tg ϕ, unter ϕ die im Abstande r erzielte Ablenkung verstanden. Die folgende Tabelle giebt die Werthe dieses Productes für eine Reihe von um je 100^{mm} zunehmenden Abständen. Die vierte Columne bezieht sich auf eine Anordnung, von der unten die Rede sein wird. Sämmtliche Zahlen sind um drei Stellen gekürzt.

Abstände r	Beobachtungen in erster Hauptlage			in zweiter Hauptlage	
	K_1	K_2	Parallelstäbe	K_1	K_2
e	19554	25468	11925	12681	15216
$e + 100$	19569	25382	12467	12574	15211
$e + 200$	19546	25288	12817	12496	15218
$e + 300$	19551	25265	13157	12473	15228
$e + 400$	19579	25227	13372	12436	15228
$e + 500$	19585	25219	—	12414	15211
$e + 600$	19574	—	—	—	—
Mittel	19566	—	—	—	15219

Der Anfangsabstand e war bei diesen zu verschiedenen Zeiten beobachteten Reihen verschieden. Er betrug für die Columnen 2 bis 6 beziehungsweise 497.5, 600, 502, 499 und 499^{mm}. Auch waren die magnetischen Ladungen der einzelnen Combinationen wegen anderweitiger Beobachtungen, auf welche es hier nicht ankommt, von Fall zu Fall verschieden.[1] Jedesmal waren aber die Momente der Stäbe einer und derselben Combination angenähert ausgeglichen. Der Unterschied der Stabmomente betrug bei den Beobachtungen der Columnen 2 und 6 nur 0.65 bez. 0.35 Procent des grösseren. Man sieht, dass die Zahlen in diesen beiden Columnen noch nicht $^1/_{1000}$ bez. $^1/_{1500}$ vom Mittelwerth abweichen. Eine grössere Übereinstimmung konnte bei den angewandten Hülfsmitteln nicht erwartet werden. Das Magnetometer war ein kleiner gedämpfter Stahlring mit Spiegel.

Bekanntlich nimmt bei gewöhnlichen Stabmagneten das Product $r^3 \operatorname{tg} \phi$ mit wachsendem r ab für die erste, zu für die zweite Hauptlage. Die Columnen 3 und 5 zeigen, dass sich der zweite Kreuzmagnet in der ersten Hauptlage normal, der erste Kreuzmagnet in der zweiten Hauptlage anomal verhält. Der Letztere ist für diesen Fall übercorrigirt, wie es nach den obigen Erklärungen in der That sein muss.

Wenn sich ein Stabmagnet angenähert durch ein einfaches Polpaar ersetzen lässt, so liegt der Gedanke nahe, den Kreuzmagnet durch zwei parallel gerichtete Magnetstäbe zu ersetzen, deren hypothetische Pole den Eckpunkten des dem Magnetkreuz umschriebenen Rechtecks entsprechen. Unter der von F. KOHLRAUSCH angegebenen Voraussetzung, dass der Polabstand $^5/_6$ der Stablänge betrage, wurden zwei Stäbe von 100^{mm} Länge und 15^{mm} Dicke und Breite im Abstande der Axen $= 68^{mm}$ fest verbunden, wonach man das Verhalten von K_1 hätte erwarten sollen. Die auf diesen Fall bezüglichen Resultate der Columne 4 zeigen, dass das System für die erste Hauptlage übercorrigirt war, woraus zu folgern ist, dass der Polabstand für diesen Fall kleiner hätte angenommen werden müssen. Auch eine längs der kürzeren Seite im homogenen Felde magnetisirte Rechtecksplatte zeigte sich anomal. Für solche übercorrigirte Systeme lässt sich kein bezüglich der betreffenden Hauptlage äquivalentes magnetisches Punktpaar auf der Mittellinie angeben.[2]

---

[1] Selbstverständlich ergeben sich, wenn ein und derselbe Kreuzmagnet unverändert aus der ersten in die zweite Hauptlage gebracht wird, Productwerthe, welche sich bis auf den Einfluss des zweiten Gliedes wie 2 : 1 verhalten, ganz wie beim einfachen Stabe. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass auch dieser Umstand durch die Beobachtung bestätigt wird.

[2] Der Einfluss der vierten Glieder drückt sich beziehungsweise

Eine angenehme Eigenschaft der Kreuzmagnete ist ihre kräftige Wirkung, Die gekreuzten Lamellen ergaben trotz der schiefen Stellung erheblich grössere Ablenkungen, als wenn sie direct aufeinander liegend in eine der Hauptlagen gebracht wurden. Dies erklärt sich aus der bekannten Schwächung durch gegenseitige Influenz. Die Schwächung betrug beim Aufeinanderlegen etwa 20, bei der Kreuzstellung beziehungsweise nur 1.3 und 3 Procente.

Sind die Magnetismen der gekreuzten Stäbe merklich ungleich, so weicht selbstverständlich die Richtung der magnetischen Axe des Systems von der Mittellinie ab ab. Man beurtheilt leicht, wann dieser Umstand zu berücksichtigen ist. Bezeichnet M' das arithmetische Mittel der Momente M_1 und M_2, $\pm\Delta$ ihre Abweichung von diesem Mittel, so ist das resultirende Moment

$$M = 2\,M' \cos\frac{a}{2}\left\{1 + \frac{\Delta^2}{M'^2}\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

worin a den Winkel zwischen den gleichnamigen Schenkeln, also $2\alpha_1$ oder $2(90^\circ - \alpha_2)$ bedeutet. Die magnetische Axe bildet mit ab einen Winkel δ, welcher durch

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\Delta}{M'}\cdot\operatorname{tg}\frac{a}{2}$$

ausgedrückt ist. Beträgt der Unterschied der Stäbe 1 Procent, also $\frac{\Delta}{M} = \frac{1}{200}$, so sind die resultirenden Momente der beiden Combinationen K_1 und K_2 nur um verschwindende Grössen von $2\,M'\cos\frac{a}{2}$ verschieden. Die Winkelabweichung δ beträgt $14'\,2''$ bez. $8'\,36''$. Derartige Abweichungen der magnetischen Axe werden auch durch den von Seiten der Erde inducirten Magnetismus bewirkt; sie würden bei Schwingungsbeobachtungen von Einfluss sein.

Schwingt ein Kreuzmagnet mit horizontaler Kreuzungsebene unter Einfluss des Erdmagnetismus, wobei die Mittellinie ab um die

---

für K_1 durch $\frac{3}{16}\cdot\frac{l^4}{r^4}\cos^4\alpha_1\left\{1 - 5\operatorname{tg}^2\alpha_1 + \frac{15}{8}\operatorname{tg}^4\alpha_1\right\} = -\frac{81}{800}\cdot\frac{l^4}{r^4}$

für K_2 durch $\frac{15}{16}\cdot\frac{l^4}{r^4}\cos^4\alpha_2\left\{1 - \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\alpha_2 + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^4\alpha_2\right\} = -\frac{9}{80}\cdot\frac{l^4}{r^4}$

aus. Hier bedeutet l einen durch die Formel $l^4 = \frac{\Sigma\lambda^5\nu}{\Sigma\lambda\nu}$ bestimmten Mittelwerth. Der durch Vernachlässigung des vierten Gliedes begangene Fehler ist abgesehen vom Vorzeichen kleiner als derjenige, welcher beim einfachen Stabe in den Hauptlagen begangen wird. Es folgt auch, dass durch Systeme, bei denen die Tangenten der halben Kreuzungswinkel $\sqrt{\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{14}{5}}}$ resp. $\sqrt{6 \pm 2\sqrt{7}}$ betragen, das vierte Glied für sich beseitigt werden könnte.

Meridianrichtung oscillirt, so erfährt das System bezüglich dieser Mittellinie eine vom Ausschlagswinkel abhängige Längs- und Quermagnetisirung. Wenn man voraussetzt, dass der von der Substanz und der Gestalt abhängige Factor, welcher die Längsmagnetisirung des einzelnen Stabes im homogenen Felde bestimmt und k heissen möge, für beide Stäbe der gleiche sei, wenn man ausserdem von der Quermagnetisirung des einzelnen Stabes absieht, so lässt sich folgern, dass das magnetische Moment des Kreuzmagnetes in die bekannte Formel für die Schwingungsdauer bei kleinen Amplituden mit dem Werthe

$$2M' \cos\frac{a}{2}\left\{1 + \frac{Hk\cos a}{M'\cos\frac{a}{2}}\right\}$$

eingeht, wobei wie oben M' das Mittel aus den als nahe gleich vorausgesetzten permanenten Momenten beider Stäbe, a den Winkel zwischen gleichnamigen Schenkeln bedeutet. Man sieht, dass zwei rechtwinklig gekreuzte, gleichbeschaffene Magnetstäbe vom Einfluss des inducirten Magnetismus auf die Schwingungsdauer befreit sein würden,[1] was sich auch ohne Rechnung einsehen lässt. Eine derartige Compensation für Schwingungsbeobachtungen scheint mir einfacher zu sein als die von JOULE angegebene. Mit roher Annäherung kann auch schon der oben beschriebene erste Kreuzmagnet als für Schwingungen compensirt gelten, da bei ihm $\cos a = \cos 2\alpha_1$ klein ist. Die Vernachlässigung des inducirten Magnetismus würde bei den von mir benutzten Lamellen einen Fehler in der Bestimmung der Horizontalcomponente H zur Folge haben, welcher auf etwa $\frac{1}{2500}$ ihres Werthes zu schätzen wäre.

Schwingt derselbe Kreuzmagnet mit verticaler Kreuzungsebene, so ist der Einfluss des inducirten Magnetismus selbstverständlich grösser und leicht in Rechnung zu ziehen. Ist das System K_1 mit der Mittellinie ab nach West-Ost orientirt und zwar einmal mit horizontaler, darauf mit verticaler Kreuzungsebene, so wird dasselbe im ersten Falle durch die horizontale, im zweiten durch die verticale Componente des Erdmagnetismus quermagnetisirt, was ebenfalls mit einer Richtungsänderung der magnetischen Axe verbunden ist. Dieser Umstand hat jedoch keinen merklichen Einfluss auf die Ablenkungsbeobachtung. Es konnte keine Spur eines Unterschiedes wahrgenommen werden, als der Kreuzmagnet in genau gleichem Abstande, abwechselnd horizontal und vertical gestellt, auf das Magnetometer wirkte, wie auch

[1] Die Schlussfolgerung bezieht sich selbstverständlich nur auf Schwingungen in einem schwachen magnetischen Felde.

nach den obigen Erörterungen vorherzusehen war. Ferner konnte weder beim ersten noch beim zweiten Kreuzmagnete ein Unterschied bemerkt werden, wenn eines der Systeme um die Mittellinie ab als Axe so gedreht wurde, dass in Fig. 1 oder 2 der Stab $n_1 s_1$ in die Lage von $n_2 s_2$ kam und umgekehrt. Bei dieser Lagenvertauschung wirkt der zu Anfang erwähnte Fehler wegen der Ungleichheit der Momente das eine Mal im Sinne des Erdmagnetismus, das andere Mal gegen denselben. Das Experiment ist ein sehr einfaches Hülfsmittel um zu prüfen, ob die Stabmomente für die in Rede stehenden Beobachtungen hinreichend ausgeglichen sind.

In wieweit die besprochenen Eigenschaften der Kreuzmagnete in der einen oder anderen Weise bei praktischen Untersuchungen verwendbar sind, lasse ich dahingestellt. Mögen diese Eigenschaften immerhin vielleicht mehr theoretisches Interesse haben, so hielt ich ihre Erwähnung doch nicht für unnütz. Die auf das zweite Glied bezügliche Eigenschaft kann man als eine Bestätigung des Coulomb'schen Gesetzes ansehen. Übrigens ist es nicht schwierig Magnete herzustellen, deren Momente bis auf Ein Procent übereinstimmen. Die permanenten Momente der Stäbe, mit welchem W. Weber den von der Lage zur Erde abhängigen Theil des Magnetismus untersuchte, verhielten sie wie 190 : 191. Schwieriger scheint es mir zu sein, diese Übereinstimmung auf die Dauer zu erhalten. Dass unter gewissen Voraussetzungen ein Kreuzmagnet durch zwei gleiche Stäbe in gleichen Abständen diesseits und jenseits des Magnetometers vertreten werden kann, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

36. Weitere Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen.

Von L. Kronecker.

(Vorgelegt am 26. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVII]; — ausgegeben am 2. August.)

In meiner vorigen Mittheilung habe ich gezeigt, wie mit Hülfe der associirten Formen das Additionstheorem der elliptischen Functionen in reducirter Form dargestellt werden kann, und wie daraus die Formeln für die Multiplication unmittelbar in ihrer reducirten Form hervorgehen. Man kann aber bei dieser Anwendung des Additionstheorems die Einführung der associirten Formen, gemäss den allgemeinen, in meiner Festschrift gegebenen Entwickelungen, auf zwei verschiedene Weisen umgehen, und man gelangt dabei zu zwei verschiedenen Methoden der Herleitung der Multiplications-Formeln, welche ich im Anschluss an meine vorige Mittheilung und unter Beibehaltung der darin angenommenen Bezeichnungen hier auseinandersetzen will.

I.

Nach den mit (C) und (D) bezeichneten beiden Gleichungen kann das Additionstheorem in den zwei verschiedenen Weisen:

$$(C') \qquad \begin{aligned} f(a+b)\cdot F\big(f(a),f(b)\big) &= \Phi\big(f(a),f(b)\big) \\ f(a+b)\cdot \Psi\big(f(a),f(b)\big) &= G\big(f(a),f(b)\big) \end{aligned}$$

dargestellt werden, deren Zusammenfassung in der Gleichung:

$$f(a+b)\big[F\big(f(a),f(b)\big)+u\Psi\big(f(a),f(b)\big)\big]=\Phi\big(f(a),f(b)\big)+uG\big(f(a),f(b)\big)$$

durch die Theorie der associirten Formen ermöglicht wird und zu dem mit (C^∞) bezeichneten Ausdrucke für $f(a+b)$ führt. Hierbei ist:

$$f(a)=\frac{k\sqrt{k}}{4(k^2-1)}\,\mathrm{sn}\,\mathrm{am}\,(a,k)\ ,\quad f(b)=\frac{k\sqrt{k}}{4(k^2-1)}\,\mathrm{sn}\,\mathrm{am}\,(b,k)\ ,$$

und wenn:

$$f(c)=z\ ,\quad f(nc)=\mathrm{H}_n(z)$$

gesetzt wird, so geht aus dem Gleichungssystem (C'), welches die Darstellung des Additionstheorems in reducirter Form vertritt, das System der beiden Gleichungen:

$$(E) \qquad F_0 \mathrm{H}_{r+s}(z) = \Phi_0 \ , \ \Psi_0 \mathrm{H}_{r+s}(z) = G_0$$

hervor, welches die Darstellung der Multiplications-Formeln in ihrer reducirten Form enthält. Denn nach den in meiner vorigen Mittheilung eingeführten Bezeichnungen sind

$$F_0 \ , \ G_0 \ , \ \frac{\Phi_0}{z^{(r+s)}} \ , \ \frac{\Psi_0}{z^{(r+s)}}$$

ganze rationale Functionen von z, und $z^{(r+s)}$ ist für ungrade Werthe von $r+s$ gleich Eins, für grade Werthe aber gleich z', d. h. gleich der Quadratwurzel aus:

$$1 - \left(k + \frac{1}{k}\right)\left(4k - \frac{4}{k}\right)^2 z^2 + \left(4k - \frac{4}{k}\right) z^4 ;$$

der grösste gemeinsame Theiler von F_0 und $\frac{\Psi_0}{z^{(r+s)}}$ kann daher auch als grösster gemeinsamer Divisor von F_0 und Ψ_0 selbst bezeichnet werden, und wenn:

$$\mathrm{Dv}\,(F_0 \, , \, \Psi_0)$$

eben diesen Divisor bedeutet, so folgt unmittelbar aus den Gleichungen (E), dass:

$$(E') \qquad \mathrm{H}_{r+s}(z) = \frac{\mathrm{Dv}\,(G_0 \, , \, \Phi_0)}{\mathrm{Dv}\,(F_0 \, , \, \Psi_0)}$$

sein muss. Diese Gleichung, welche dasselbe besagt, wie die Gleichung:

$$\mathrm{H}_{r+s}(z) = \frac{\Phi_0 + uG_0}{F_0 + u\Psi_0}$$

in meiner vorigen Mittheilung (vergl. S. 12 [728]), ergiebt $\mathrm{H}_{r+s}(z)$ in der reducirten Form, da die vier Functionen $F_0 \, , \, G_0 \, , \, \Phi_0 \, , \, \Psi_0$, wie in meiner vorigen Mittheilung nachgewiesen ist, für keinen Werth von z gleichzeitig verschwinden und also der grösste gemeinsame Theiler von G_0 und Φ_0 mit demjenigen von F_0 und Ψ_0 keinen Factor gemein haben kann.

Die Darstellung der Multiplications-Formeln in ihrer reducirten Form ist zwar in der Gleichung (E') gegeben, aber zur Bestimmung des Grades von Zähler und Nenner muss man noch die analoge Gleichung:

$$(E'') \qquad \mathrm{H}_{r-s}(z) = \frac{\mathrm{Dv}\,(G_0 \, , \, \Psi_0)}{\mathrm{Dv}\,(F_0 \, , \, \Phi_0)}$$

zu Hülfe nehmen, welche aus den beiden Gleichungen:

$$(E^\circ) \qquad H_{r,-s}(z) = \frac{\Psi_0}{F_0} = \frac{G_0}{\Phi_0}$$

resultirt.

Da gemäss den Gleichungen (E), (E°), (E'), (E''):

$$\frac{\Phi_0}{F_0} = \frac{G_0}{\Psi_0} = \frac{\mathrm{Dv}\,(G_0\,,\,\Phi_0)}{\mathrm{Dv}\,(F_0\,,\,\Psi_0)}\,,\quad \frac{\Psi_0}{F_0} = \frac{G_0}{\Phi_0} = \frac{\mathrm{Dv}\,(G_0\,,\,\Psi_0)}{\mathrm{Dv}\,(F_0\,,\,\Phi_0)}$$

ist, so muss:

$$(F)\quad \begin{array}{l} \mathrm{Dv}\,(F_0\,,\,\Phi_0)\cdot\mathrm{Dv}\,(F_0\,,\,\Psi_0) = F_0\,,\ \mathrm{Dv}\,(G_0\,,\,\Phi_0)\cdot\mathrm{Dv}\,(G_0\,,\,\Psi_0) = G_0 \\ \mathrm{Dv}\,(F_0\,,\,\Phi_0)\cdot\mathrm{Dv}\,(G_0\,,\,\Phi_0) = \Phi_0\,,\ \mathrm{Dv}\,(F_0\,,\,\Psi_0)\cdot\mathrm{Dv}\,(G_0\,,\,\Psi_0) = \Psi_0 \end{array}$$

sein. Denn die erste und dritte dieser vier Gleichungen geht daraus hervor, dass der Bruch $\frac{\Phi_0}{F_0}$, wenn er auf die reducirte Form gebracht wird,

$$\frac{\Phi_0}{\mathrm{Dv}\,(F_0\,,\Phi_0)} \text{ als Zähler und } \frac{F_0}{\mathrm{Dv}\,(F_0\,,\Phi_0)} \text{ als Nenner}$$

haben muss, während andererseits derselbe Bruch $\frac{\Phi_0}{F_0}$ in seiner reducirten Form durch den Ausdruck:

$$\frac{\mathrm{Dv}\,(G_0\,,\,\Phi_0)}{\mathrm{Dv}\,(F_0\,,\,\Psi_0)}$$

dargestellt ist. In ähnlicher Weise ergeben sich aus der reducirten Form des Bruches $\frac{\Psi_0}{G_0}$ die zweite und vierte von jenen vier Gleichungen (F).

Die in meiner vorigen Mittheilung angegebene Bildungsweise der Functionen F_0 und G_0 zeigt, dass die Grade von:

	F_0,	G_0
für grade Werthe von $r+s$:	$2(r^2+s^2)$,	$2(r^2+s^2-1)$
für ungrade Werthe:	$2(r^2+s^2-1)$,	$2(r^2+s^2)$

in Beziehung auf z werden. Setzt man also voraus, dass die Grade von Zähler und Nenner des reducirten Ausdrucks (E'') für $H_{r,-s}(z)$, d. h. die Grade von:

	$\mathrm{Dv}\,(F_0\,,\Phi_0)$,	$\mathrm{Dv}\,(G_0\,,\Psi_0)$
für grade Werthe von $r \pm s$:	$(r-s)^2$	$(r-s)^2 - 1$
für ungrade Werthe:	$(r-s)^2 - 1$	$(r-s)^2$

sind, so folgt aus den beiden ersten der vier Gleichungen (F), dass die Grade von:

	$\mathrm{Dv}\,(F_0, \Psi_0)$,	$\mathrm{Dv}\,(G_0, \Phi_0)$
für grade Werthe von $r+s$:	$(r+s)^2$,	$(r+s)^2-1$
für ungrade Werthe:	$(r+s)^2-1$,	$(r+s)^2$

sein müssen, und hiermit ist die Gradbestimmung für Zähler und Nenner des reducirten Ausdrucks (E′) von $\mathrm{H}_{r+s}(z)$ vollständig geliefert.

Abel hat ausser der ersten, im Eingang meiner vorigen Mittheilung erwähnten, eine zweite Methode der Herleitung der Multiplications-Formeln gegeben,[1] in welcher er die analytischen Eigenschaften der elliptischen Functionen nicht zu Hülfe nimmt, sondern nur algebraische Betrachtungen anwendet. Diese zweite Abel'sche Entwickelung der Multiplications-Formeln aus dem Additionstheorem, auf welche ich neuerdings durch meinen Freund Weierstrass aufmerksam gemacht worden bin, lässt sich unter Benutzung der obigen Bezeichnungen folgendermaassen darstellen.

Aus den Additionsformeln:

$$f(a+b) = \frac{\Phi\big(f(a), f(b)\big)}{F\big(f(a), f(b)\big)}\ ,\ f(a-b) = \frac{\Psi\big(f(a), f(b)\big)}{F\big(f(a), f(b)\big)}$$

folgt, unter Anwendung der Relation $FG = \Phi\Psi$, die Gleichung:

$$f(a+b)\,f(a-b) = \frac{G\big(f(a), f(b)\big)}{F\big(f(a), f(b)\big)},$$

und hieraus geht für die Multiplication der elliptischen Functionen die Formel:

$$\text{(G)} \qquad \mathrm{H}_{r+s}(z) \cdot \mathrm{H}_{r-s}(z) = \frac{G_0}{F_0}$$

hervor, welche — übereinstimmend mit der Formel (44′) bei Abel — den Ausgangspunkt der dortigen und auch der schon in meiner vorigen Mittheilung (S. 6, [722]) citirten Königsberger'schen Entwickelung für den (allein in Betracht kommenden) Fall der Multiplication mit ungraden Zahlen bildet. Setzt man $r = s+1$, so wird $\mathrm{H}_{r-s}(z) = z$, und es resultirt die Gleichung:

$$\text{(H)} \qquad \mathrm{H}^2_{r+1}(z) = \frac{\frac{1}{z} G_0}{F_0},$$

durch welche $\mathrm{H}_{2r+1}(z)$ in reducirter Form dargestellt wird. Der Nachweis, dass dies wirklich der Fall ist, lässt sich direct aus den obigen

[1] Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. Journal für Mathematik. Bd. IV. S. 258 und Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel, nouvelle édition, 1881. tome I, p. 543.

Gleichungen (E'), (E''), (F) entnehmen, welche für $r = s + 1$ ergeben, dass gemäss (E''):

$$\text{(J)} \qquad \mathrm{Dv}\,(G_0, \Psi_0) = z \;,\; \mathrm{Dv}\,(F_0, \Phi_0) = 1 \;,$$

folglich G_0 durch z theilbar und nun gemäss (F):

$$\text{(K)} \qquad \mathrm{Dv}\,(G_0, \Phi_0) = \tfrac{1}{z}\, G_0 \;,\; \mathrm{Dv}\,(F_0, \Psi_0) = F_0 \;,$$

also endlich gemäss (E') der Bruch auf der rechten Seite von (H) ein reducirter sein muss. Derselbe Nachweis ist auch schon von ABEL a. a. O. vollständig geführt, und es ist dabei ebenfalls — wie besonders hervorgehoben werden muss — das Additionstheorem in den beiden Ausdrucksweisen (C'):

$$\text{(C')} \qquad f(a+b) = \frac{\Phi\big(f(a), f(b)\big)}{F\big(f(a), f(b)\big)} = \frac{G\big(f(a), f(b)\big)}{\Psi\big(f(a), f(b)\big)}$$

benutzt worden, deren Zusammenfassung mittels der Theorie der associirten Formen das Additionstheorem in reducirter Form ergiebt. Dies scheint daher den am Schlusse des Art. II meiner vorigen Mittheilung ausgesprochenen Zweifel noch zu bestätigen, nämlich den Zweifel daran, dass der Nachweis der reducirten Form des Bruches für $\mathrm{H}_{2r+1}(z)$ in (H) in ähnlicher Weise wie für $\mathrm{H}_{2r}(z)$ geführt werden kann, ohne wie in jenem Art. II die analytischen Eigenschaften der elliptischen Functionen oder wie in jenem Art. IV die reducirte Form des Additionstheorems zu Hülfe zu nehmen.

In der angeführten ABEL'schen Deduction erscheint auf den ersten Blick die Gleichung (G), sowie die Annahme $r = s + 1$, welche den Ausgangspunkt bilden, als die Hauptsache und das spätere Zurückgehen auf die Additionsformeln (C') als etwas nur Beiläufiges. Die obige Entwickelung zeigt dagegen, dass es sich gerade umgekehrt verhält. Sobald man überhaupt von den Gleichungen (C') Gebrauch machen muss, bedarf es weder der beschränkenden Annahme $r = s + 1$ noch der Benutzung der zusammengesetzten Additionsformel (G) an Stelle der einfachen (E):

$$\mathrm{H}_{r+s}(z) = \frac{\Phi_0}{F_0} = \frac{G_0}{\Psi_0} \;;$$

grade diese Gleichungen führen vielmehr ganz direct und ganz allgemein in der Gleichung (E') zum reducirten Ausdruck für $\mathrm{H}_{r+s}(z)$. Freilich vereinfacht sich derselbe formal für den Fall $r = s + 1$ insofern, als dann gemäss (K) der Zähler gleich $\frac{1}{z}\, G_0$ und der Nenner gleich F_0 wird; aber für den bezüglichen Nachweis muss man doch

ebenso den Ausdruck für $\mathbf{H}_{r,-s}(z)$ zu Hülfe nehmen, wie für die obige Gradbestimmung von Zähler und Nenner des reducirten Ausdrucks von $\mathbf{H}_{r,+s}(z)$ bei beliebigen Werthen von r und s.

II.

Der eine wie der andere der durch die Gleichung (C') gegebenen Ausdrücke von $f(a+b)$ genügt der Gleichung:

(L) $$F^2Z^4 - (\Phi^2 + \Psi^2)\,Z^2 + G^2 = 0\,,$$

wenn der Kürze halber

$$F\,,\ \Phi\,,\ \Psi\,,\ G$$

an Stelle von

$$F\big(f(a)\,,f(b)\big)\,,\ \Phi\big(f(a)\,,f(b)\big)\,,\ \Psi\big(f(a)\,,f(b)\big)\,,\ G\big(f(a)\,,f(b)\big)$$

gesetzt wird. Diese Gleichung definirt gewissermaassen den algebraischen Ausdruck von $f(a+b)$ in der reducirten Form, nämlich in derselben Weise, wie jede ganze algebraische Grösse eines Gattungs-Bereichs, als solche, durch eine Gleichung charakterisirt wird, in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz der Unbekannten gleich Eins ist, während die übrigen Coëfficienten ganze Grössen des natürlichen Rationalitäts-Bereichs sind, dem der Gattungs-Bereich entstammt. Die vier Wurzeln der Gleichung (L) sind:

$$Z = \pm f(a+b)\,,\ \pm f(a-b)\,,$$

und das aus den drei Coëfficienten der Gleichung gebildete Modulsystem:

$$(F^2\,,\ \Phi^2 + \Psi^2\,,\ G^2)$$

ist aequivalent Eins, da nach Art III meiner vorigen Mittheilung eine Gleichung:

(M) $$F_1F + G_1G + V(\Phi^2 + \Psi^2) = 1$$

besteht, in welcher F_1, G_1, V »*ganze*« Grössen des Bereichs $[\mathfrak{A}\,,\mathfrak{A}'\,,\mathfrak{B}\,,\mathfrak{B}'\,,\mathfrak{M}]$ sind. Hierbei ist V durch die Gleichung $V\Phi = \Phi_1$ bestimmt und also:

$$V = 2^3\big(1 - 2\mathfrak{M} - 2^7\mathfrak{M}\,(\mathfrak{M}-1)\,(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)\big)\,.$$

Es ist daher:

(N) $$F_0^2Z^4 - (\Phi_0^2 + \Psi_0^2)\,Z^2 + G_0^2$$

eine ganze Grösse des natürlichen Rationalitäts-Bereichs $[\mathfrak{M}\,,Z\,,z^2]$, welche für keinen von Z unabhängigen Werth von z, aber für die vier Werthe von Z:

$$Z = \pm\,\mathbf{H}_{r,+s}(z)\,,\ \pm\,\mathbf{H}_{r,-s}(z)$$

verschwindet und also in vier Factoren zerlegbar ist, die, je nachdem $r+s$ grade oder ungrade ist, dem Rationalitäts-Bereich:

$$[\mathfrak{M}, Z, z, z'] \text{ oder } [\mathfrak{M}, Z, z]$$

angehören. Diese Zerlegung des Ausdrucks (N) liefert unmittelbar die reducirten Brüche für $\mathrm{H}_{r+s}(z)$ und $\mathrm{H}_{r-s}(z)$. Denn, wenn

$$F_0^2 Z^4 - (\Phi_0^2 + \Psi_0^2) Z^2 + G_0^2 = (Q^2 Z^2 - P^2)(S^2 Z^2 - R^2)$$

ist, so sind die Werthe von $\mathrm{H}_{r+s}^2(z)$, $\mathrm{H}_{r-s}^2(z)$ durch die Brüche:

$$\frac{P^2}{Q^2}, \frac{R^2}{S^2}$$

gegeben, und diese sind in reducirter Form, weil die drei ganzen Functionen von z:

$$F_0^2, \Phi_0^2 + \Psi_0^2, G_0^2$$

keinen Theiler mit einander gemein haben. Da die Grade von:

	F_0^2	G_0^2
für grade Werthe von $r+s$:	$2(r^2+s^2)$	$2(r^2+s^2-1)$
für ungrade Werthe aber:	$2(r^2+s^2-1)$	$2(r^2+s^2)$

in Beziehung auf z^2 sind, da ferner die Grade von:

	R^2	S^2
für grade Werthe von $r+s$ gleich:	$(r-s)^2-1$	$(r-s)^2$
für ungrade Werthe aber gleich:	$(r-s)^2$	$(r-s)^2-1$

vorausgesetzt werden können, so ergeben sich aus den Relationen:

$$F_0^2 = Q^2 S^2, \; G_0^2 = P^2 R^2$$

die Grade von:

	P^2	Q^2
für grade Werthe von $r+s$ gleich:	$(r+s)^2-1$	$(r+s)^2$
für ungrade Werthe aber gleich:	$(r+s)^2$	$(r+s)^2-1$.

Die beiden hier dargelegten Methoden führen, wie man sieht, zu zwei verschiedenen rein algebraischen Bestimmungen der Zähler und Nenner der Multiplications-Formeln und ihres Grades; die erstere schliesst sich derjenigen an, welche ABEL in seinem *Précis d'une théorie des Fonctions elliptiques* angewendet hat, die letztere stimmt fast vollständig mit der Herleitungsweise überein, welche Hr. RUNGE neuerdings für die Multiplication von cos am u gegeben hat.[1] Der Ver-

[1] Journal für Mathematik, Bd. 94, S. 349.

einigungspunkt der beiden Methoden und der eigentliche Grund ihres Erfolges liegt darin, dass das Additionstheorem in reducirter Form benutzt wird, freilich nur *implicite*, und also nicht deutlich hervortretend; denn bei der wirklichen Aufstellung der reducirten Form des Additionstheorems kann nicht füglich — wie es hier bei dessen Anwendung auf die Herleitung der Multiplications-Formeln geschehen ist — die Theorie der associirten Formen umgangen werden. Wohl lässt sich auch aus jener Hauptformel III des §. 54 von JACOBI's *Fundamenta* ersehen, dass Zähler und Nenner der Additionsformel (A°) für $\sin \mathrm{am}\, a = \sin \mathrm{am}\,(b + K'i)$,[1] gleichzeitig mit $\Theta(a-b)$, verschwinden; aber die Division durch $\Theta(a-b)$ führt doch nicht allgemein zu einer »reducirten Form« des Additionstheorems, da z. B., wenn für $\sin \mathrm{am}\, a$, $\sin \mathrm{am}\, b$ und k ganze Zahlen genommen werden, der gemeinsame Theiler von Zähler und Nenner nicht durch $\Theta(a-b)$ dargestellt wird.

[1] Vergl. Art. II meiner vorigen Mittheilung, S. 5, [721].

37. Zur Theorie der Formen höherer Stufen.

Von L. KRONECKER.

(Vorgelegt am 26. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVII]; — ausgegeben am 2. August.)

Das Streben nach Erforschung der einfachsten Grundlagen der Theorie der Formen hat mich schon vor langer Zeit auf eine Frage geführt, die dem Anscheine nach ganz elementar ist, und die ich dennoch früher nicht zu erledigen vermochte. Als sich mir aber vor Kurzem bei anderen algebraischen Untersuchungen jene Frage von Neuem aufdrängte, fand ich die Lösung durch höchst einfache Betrachtungen, die mir durch die Ideensphäre, in welcher sich diese Untersuchungen bewegten, sehr nahe gelegt wurden.

Bedeuten $M_0, M_1, M_2, \ldots M_{n+1}$ ganze Grössen irgend eines Rationalitäts-Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$, so werden durch die Gleichung:

$$\sum_h M_h U^h \cdot \sum_i M_{m+i} U^{i-1} = \sum_k M'_k U^k \qquad \begin{pmatrix} h=0,1,\ldots m \\ i=1,2,\ldots n-m+1 \\ k=0,1,\ldots n \end{pmatrix},$$

wenn U eine Unbestimmte ist, $n+1$ demselben Bereich $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots]$ angehörige Grössen $M'_0, M'_1, \ldots M'_n$ definirt. Da nun das Product:

$$\sum_h M_h U_h \cdot \sum_i M_{m+i} U_{m+i} \qquad \begin{pmatrix} h=0,1,\ldots m \\ i=1,2,\ldots n-m+1 \end{pmatrix},$$

in welchem $U_0, U_1, \ldots U_{n+1}$ verschiedene Unbestimmte bedeuten, offenbar nur für dieselben Werthe der Variabeln $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ gleich Null werden kann, wie das Product:

$$\sum_h M_h U^h \cdot \sum_i M_{m+i} U^{i-1} \qquad \begin{pmatrix} h=0,1,\ldots m \\ i=1,2,\ldots n-m+1 \end{pmatrix},$$

so folgt, dass die beiden Gleichungs-Systeme:

$$M_h M_{m+i} = 0 \,,\; M'_k = 0 \qquad \begin{pmatrix} h=0,1,\ldots m \\ i=1,2,\ldots n-m+1 \\ k=0,1,\ldots n \end{pmatrix}$$

genau dieselben Bestimmungen für die Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ enthalten, dass sie also — obgleich das eine System aus $m(n-m)+n+1$, das andere nur aus $n+1$ Gleichungen besteht — einander vollständig aequivalent sein müssen. Dies deutet offenbar darauf hin, dass auch die beiden aus den Elementen $M_h M_{m+i}$ und M'_k zu bildenden Modul- oder Divisoren-Systeme einander vollständig aequivalent sein müssen,

und führt demnach zu der Aufgabe, eine genaue Begriffsbestimmung für diese vollständige Aequivalenz zu ermitteln.

Nimmt man an Stelle der beiden Summenausdrücke:

$$\sum_h M_h U^h\,,\ \sum_i M_{m+i} U^{i-1} \qquad \left(\begin{smallmatrix} h=0,1,\ldots m \\ i=1,2,\ldots n-m+1 \end{smallmatrix}\right)$$

die beiden Productausdrücke:

$$\mathfrak{g}_0 \prod_h (1+x_h u)\,,\ \mathfrak{g}'_0 \prod_i (1+x_i u) \qquad \left(\begin{smallmatrix} h=1,2,\ldots m \\ i=1,2,\ldots n-m \end{smallmatrix}\right)$$

und setzt:

$$\mathfrak{g}_0 \prod_h (1+x_h u) = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 u + \mathfrak{g}_2 u^2 + \ldots + \mathfrak{g}_m u^m \qquad (h=1,2,\ldots m),$$
$$\mathfrak{g}'_0 \prod_i (1+x_i u) = \mathfrak{g}'_0 + \mathfrak{g}'_1 u + \mathfrak{g}'_2 u^2 + \ldots + \mathfrak{g}'_{n-m} u^{n-m} \qquad (i=1,2,\ldots n-m),$$
$$\mathfrak{f}_0 \prod_k (1+x_k u) = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{f}_1 u + \mathfrak{f}_2 u^2 + \ldots + \mathfrak{f}_n u^n \qquad (k=1,2,\ldots n),$$

so ist:

$$\sum_{h,i} \mathfrak{g}_h \mathfrak{g}'_i u_{hi} \qquad (h=0,1,\ldots m;\ i=0,1,\ldots n-m)$$

eine »*Form*« mit den $m(n-m)+n+1$ Unbestimmten u_{hi}, deren Coëfficienten ganze rationale Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und zwar in Beziehung auf jede derselben nur linear sind. Es ist daher, wenn man jene Form mit G_0 und die durch Permutationen der n Grössen x daraus entstehenden Formen mit $G_1, G_2, \ldots G_{\varrho-1}$ bezeichnet, das Product:

$$\prod_r (G - G_r) \qquad (r=0,1,\ldots \rho-1)$$

gleich einer ganzen Function von G:

$$G^\varrho - \mathfrak{F}_1 G^{\varrho-1} + \mathfrak{F}_2 G^{\varrho-2} - \ldots \pm \mathfrak{F}_\varrho\,,$$

in welcher die Coëfficienten $\mathfrak{F}_r$ homogene, ganze, ganzzahlige Functionen von $\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ sind, deren Dimensionen gleich dem Index r ist. Überdies sind die Coëfficienten $\mathfrak{F}_r$ zugleich ganze Functionen der Unbestimmten u_{hi}; $\mathfrak{F}_r$ ist also eine »*Form mit den Unbestimmten* u_{hi}, *welche das Formenproduct:*

$$\prod_h (\mathfrak{f}_0 v_{h0} + \mathfrak{f}_1 v_{h1} + \mathfrak{f}_2 v_{h2} + \ldots + \mathfrak{f}_n v_{hn}) \qquad (h=1,2,\ldots r)$$

enthält«, — das »*Enthalten*« in dem Sinne genommen, wie es im §. 22, I meiner Festschrift definirt ist.

Setzt man für die Grössen $\mathfrak{f}_k$, $\mathfrak{g}_h$, $\mathfrak{g}'_{i-1}$ beziehungsweise die Grössen M'_k, M_h, M_{m+i}, so folgt aus der angegebenen Entwickelung, dass das Formenproduct:

$$\sum_h M_h U_h \cdot \sum_i M_{m+i} U_{m+i} \qquad \left(\begin{smallmatrix} h=0,1,\ldots m \\ i=1,2,\ldots n-m+1 \end{smallmatrix}\right)$$

einer algebraischen Gleichung ϱ^{ten} Grades genügt, in welcher der

Coëfficient der ρ^{ten} Potenz gleich Eins, aber derjenige der r^{ten} Potenz eine das Formenproduct

$$\prod_h \sum_k M'_k V_{hk} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots r \\ k = 0, 1, \ldots n \end{pmatrix}$$

enthaltende Form ist.

Der hier bewiesene Satz löst die gestellte Aufgabe, indem er auf eine wesentliche Erweiterung der in meiner Festschrift gegebenen Begriffsbestimmungen für das »Enthalten-Sein« sowie für die »Aequivalenz« der Divisoren-Systeme und Formen höherer Stufe führt. Man hat nämlich zuvörderst den Begriff des Enthalten-Seins dahin zu erweitern, dass ein Divisoren-System:

$$(M_0^\circ, M_1^\circ, M_2^\circ, \ldots .)$$

als »das Divisoren-System $(M'_0, M'_1, M'_2, \ldots .)$ enthaltend« angesehen werden muss, wenn die aus dem ersteren gebildete Form:

$$M_0^\circ U_0 + M_1^\circ U_1 + M_2^\circ U_2 + \ldots .$$

Wurzel einer algebraischen Gleichung ρ^{ten} Grades ist, in welcher der Coëfficient der ρ^{ten} Potenz gleich Eins und der Coëfficient der $(\rho - r)^{\text{ten}}$ Potenz eine das Formenproduct:

$$\prod_h (M'_0 V_{h0} + M'_1 V_{h1} + M'_2 V_{h2}, \ldots .) \qquad (h = 1, 2, \ldots r),$$

im früheren engeren Sinne des Wortes enthaltende Form ist. Demgemäss soll nun auch die Form:

$$M_0^\circ U_0 + M_1^\circ U_1 + M_2^\circ U_2 + \ldots .$$

als die Form:

$$M'_0 V_0 + M'_1 V_1 + M'_2 V_2 + \ldots .$$

im weiteren Sinne des Wortes enthaltend bezeichnet werden, und aus dem erweiterten Begriffe des Enthalten-Seins der Divisoren-Systeme und Formen folgt unmittelbar der erweiterte Begriff der *Aequivalenz*, wenn dieser ebenso wie der frühere, engere auf das gegenseitige Enthalten-Sein von Divisoren-Systemen oder Formen gegründet wird.

Der erweiterte Begriff des Enthalten-Seins genügt ebenso, wie der frühere engere, der Bedingung, dass aus dem Enthalten-Sein eines Modulsystems (M') in (M°) und aus dem von (M'') in (M') das Enthalten-Sein von (M'') in (M°) folgt. Auch kann die Bedeutung der Congruenz:

$$M \equiv M' \text{ (modd. } M_1^\circ, M_2^\circ, M_3^\circ, \ldots .)$$

darauf ausgedehnt werden, dass die Differenz $M - M'$ das Modulsystem $(M_1, M_2^\circ, M_3^\circ, \ldots)$, im weiteren Sinne des Wortes, enthält.

Endlich kann nunmehr, im Anschluss an die bei Grössen eines Bereichs üblichen Bezeichnungen, auch der Quotient zweier Formen des Bereichs $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots]$ als »*ganz im Sinne der Aequivalenz*« bezeichnet werden, wenn die Form, welche den Nenner bildet, in der Form des Zählers, im weiteren Sinne des Wortes, enthalten ist. Es zeigt sich alsdann die fundamentale Bedeutung des oben bewiesenen Satzes darin, dass durch ihn die eingeführten Begriffsbestimmungen gerechtfertigt werden; denn jener Satz besagt, dass das Product zweier, im Sinne der Aequivalenz »ganzen« Formen-Ausdrücke ebenfalls »ganz«, im Sinne der Aequivalenz, ist, und hieraus folgt alsdann, dass überhaupt bei Bildung von ganzen ganzzahligen Functionen die Sphäre der »ganzen« Formen-Ausdrücke nicht verlassen wird.

Es muss hervorgehoben werden, dass für Formen, die im weiteren Sinne einander aequivalent sind, gemäss der in meiner Festschrift entwickelten allgemeinen Eliminationstheorie auch eine Aequivalenz im engeren Sinne besteht; aber es kann dies bloss eine Aequivalenz einer gewissen *Stufe* sein. Diese beiden verschiedenen Arten der Aequivalenz lassen sich schon an einem ganz einfachen Beispiele darlegen. Nimmt man nämlich oben $m = 1$, $n = 2$ und bezeichnet die alsdann sich ergebenden beiden Formen von wesentlich zweiter Stufe:

$$(M_0 + M_1 U)(M_2 + M_3 U), \quad (M_0 U_0 + M_1 U_1)(M_2 U_2 + M_3 U_3)$$

mit $F(U)$, $G(U_0, U_1, U_2, U_3)$, so sind einerseits die Coëfficienten von F lineare homogene Functionen der Coëfficienten von G, und es ist daher G in F (im engeren Sinne) enthalten. Andrerseits ist F in dem Product:

$$(M_0 V_0 + M_1 V_1 + M_2 V_2 + M_3 V_3)\, G(U_0, U_1, U_2, U_3),$$

dessen erster Factor eine Form vierter Stufe (also für Formen zweiter Stufe uneigentlich primitiv) ist, enthalten, und zwar ebenfalls im engeren Sinne; es ist aber auch G Wurzel der Gleichung:

$$G^2 - PG + Q = 0,$$

in welcher:

$$P = G(U_0, U_1, U_2, U_3) + G(U_2, U_3, U_0, U_1)$$
$$Q = G(U_0, U_1, U_2, U_3) \cdot G(U_2, U_3, U_0, U_1)$$

ist, so dass P die Form F selbst und Q sogar das Product zweier aus den Coëfficienten von F gebildeten Formen:

$$(M_0' U_0 + M_1' U_1 + M_2' U_2)(M_0' V_0 + M_1' V_1 + M_2' V_2)$$

im engeren Sinne des Wortes enthält.

38. Bestimmung der Elasticitäts-Constanten des Kupfers.

Von W. Voigt.

(Vorgelegt am 26. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVII]; — ausgegeben am 2. August.)

Die Bestimmung der Elasticitäts-Constanten von Metallen wird dadurch besonders erschwert, dass die gebräuchlichen Herstellungsweisen zumeist kein homogenes, isotropes Material liefern, sondern in völlig undefinirbarer Weise comprimirtes und dilatirtes. Durch Giessen grösserer Massen von ausgesuchtem Material und sehr langsames Abkühlen könnte man zwar Stücke gewinnen, die wenigstens im Innern als isotrop und homogen angesehen werden dürften und aus denen sich demgemäss zur Beobachtung geeignete Präparate fertigen liessen, aber die Herstellung derselben würde nur bei verhältnissmässig wenig Metallen möglich und bei diesen sehr mühsam sein. Dagegen scheinen galvanoplastisch niedergeschlagene Platten leichter für viele Metalle zu erhalten und zu bearbeiten zu sein, und ich habe demgemäss schon seit mehreren Jahren versucht, dergleichen zu erhalten. Sei es nun aber, dass die Schwierigkeit der Herstellung grösser ist, als ich vermuthete oder dass die grösseren galvanoplastischen Institute sich mit so kleinen Bestellungen nicht gern befassen, nach langem Suchen und Drängen habe ich bisher doch nur erst einige Kupferplatten erhalten können, die in dem Institut von Wunder in Berlin nach meiner Vorschrift ganz allmählig niedergeschlagen sind.

Dieselben haben Dimensionen von 70, 42 und 5 Millimetern und zeigen nicht die Spur einer körnigen Structur von aussen noch von Lücken im Innern. Aus denselben sind durch Hrn. Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. Höhe Stäbchen hergestellt, an welchen ich in der früher am Steinsalz[1] und Glas[2] benutzten Weise Biegung und Torsion beobachtet habe. Ich theile die Resultate mit, in der Hoffnung, dass die Veröffentlichung mir vielleicht weitere Präparate zur Erweiterung der Untersuchungen verschaffen möchte.

[1] W. Voigt, Pogg. Ann. Erg. Bd. VII S. 1 und 177, 1875.
[2] W. Voigt, Wied. Ann. Bd. XV S. 497, 1882.

Die vier aus dem Kupfer ausgesägten Stäbchen liegen mit ihren Längsrichtungen parallel, aber mit den Breitseiten theils der Plattenebene parallel, theils senkrecht dazu. Diese Lagen waren gewählt worden, um eine Verschiedenheit der Elasticität parallel und senkrecht zur Platte durch Torsionsbeobachtungen constatiren zu können, wie ich schon bei den Beobachtungen des Glases gethan habe.

Die Biegungsbeobachtungen gaben vollständig übereinstimmende Werthe der Coëfficienten, — die Platte war hiernach also als homogen anzusehen sowohl in der Richtung parallel, wie normal zu ihrer Ebene, insofern nämlich die Stäbchen theils über, theils neben einander liegend aus der Platte geschnitten waren, — aber die Torsionscoëfficienten wichen für die beiden Gattungen um ein Fünftel von einander ab. Die Platte verhielt sich also nicht wie ein isotroper, sondern wie ein krystallinischer Körper.

Es fragt sich, wie man sich seine Structur zu denken hat. Ich hatte mir die Vorstellung gebildet, dass die mikroskopischen Krystallindividuen, welche die Platte zusammensetzen, sämmtlich mit Octaëderflächen (den Zwillingsebenen des regulären Kupfers) der Plattenebene parallel liegen, im Übrigen aber beliebige Stellungen haben möchten, entsprechend dem Umstand, dass die galvanische Ausscheidung wahrscheinlich an allen Stellen der Platte gleichzeitig und selbstständig beginnt. Hr. Prof. M. Bauer hat meine Vermuthung auf Grund der in der Natur vorkommenden plattenförmigen Aggregate von Kupferkrystallen in der Hauptsache bestätigt, vertritt aber die Ansicht, dass die Platte aus einer grossen Anzahl von parallelen Schichten besteht, von denen jede einzelne lauter gleich orientirte Individuen enthält, während die Individuen der Nachbarschichten zu einander in Zwillingsstellung stehen, d. h. mit den gleichwerthigen Richtungen um die Normale der Octaëder- (Zwillings-) Ebene um 180° gegen einander gedreht sind.

Es ist von Wichtigkeit, dass für das elastische Verhalten der ganzen Platte beide Constructionen gleichwerthig sind.

Besteht das galvanoplastisch niedergeschlagene Kupfer aus Schichten parallel der Octaëderfläche, die um 180° gegen einander gedreht liegen, so hat die ganze Platte eine solche Structur, dass senkrecht zur Octaëdernormale je 6 um 60° gegeneinander geneigte Richtungen sich gleichmässig verhalten.

Besteht unsere Kupferplatte aber aus beliebig orientirten Elementarkrystallen, die nur mit einer Octaëdernormalen einander parallel und in der Plattennormale liegen, so sind alle Richtungen in der Plattenebene gleichwerthig.

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass aus der Gleichwerthigkeit von sechs gleichgeneigten Richtungen in Hinsicht auf die Elasticität die Gleichwerthigkeit aller Richtungen in der Plattenebene folgt und demgemäss für unsere Untersuchungen beide Annahmen von gleichen Folgen sind.

Eine homogene Substanz, welche normal zu einer ausgezeichneten Richtung sechs gleichartige, unter gleichen Winkeln geneigte hat, besitzt die charakteristische Eigenschaft der hexagonalen Krystalle. Wir können daher, wenn wir die Z-Axe in die Plattennormale legen, für unsere Kupferplatten das für das hexagonale System gültige elastische Potential[1] anwenden, welches in den gebräuchlichen Abkürzungen $x_x, x_y \ldots$ lautet:

$$-2F = \mathrm{A}(x_x^2 + y_y^2) + \mathrm{A}' z_z^2 + 2\mathrm{B} z_z (x_x + y_y) + 2\Delta x_x y_y + \frac{\mathrm{A}-\Delta}{2} x_y^2 + \varepsilon(y_z^2 + x_z^2). \quad 1.$$

Führt man hierin ein neues Coordinatensystem x', y', z' ein, welches gegen das erste um die Z-Axe um den Winkel ϕ gedreht ist, so erhält man

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\phi + y\sin\phi \\ y' &= -x\sin\phi + y\cos\phi \\ z' &= z \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_x &= x'_x\cos^2\phi + y'_y\sin^2\phi - x'_y\sin\phi\cos\phi \\ y_y &= x'_x\sin^2\phi + y'_y\cos^2\phi + x'_y\sin\phi\cos\phi \\ z_z &= z'_z \\ x_y &= 2(x'_x - y'_y)\sin\phi\cos\phi + x'_y(\cos^2\phi - \sin^2\phi) \\ y_z &= y'_z\cos\phi + z'_x\sin\phi \\ z_x &= -y'_z\sin\phi + z'_x\cos\phi. \end{aligned}$$

Dadurch verwandelt sich das elastische Potential in

$$-2F' = \mathrm{A}(x_x'^2 + y_y'^2) + \mathrm{A}' z_z'^2 + 2\mathrm{B} z_z'(x'_x + y'_y) + 2\Delta x'_x y'_y + \frac{\mathrm{A}-\Delta}{2} x_y'^2 + \varepsilon(y_z'^2 + x_z'^2)$$

und dies heisst, da der Winkel ϕ hierin garnicht vorkommt: alle Richtungen um die Z-Axe sind gleichwerthig. Hiernach ist unser Medium vollständig durch die einzige Annahme definirt, dass es aus regulären Elementarkrystallen besteht, welche sämmtlich mit einer Octaëderfläche der Ebene der Platte parallel liegen.[2]

---

[1] W. VOIGT, WIED. Ann. XVI. S. 278, 1882.

[2] Diese einzige nothwendige, sehr wahrscheinliche Hypothese ist durch Elasticitätsbeobachtungen kaum zu prüfen; vielleicht gelingt es aber unter günstigen Umständen die betr. Structur direct sichtbar zu machen.

die aus einem Krystall-Individuum einer Octaëderfläche parallel geschnitten sind, als Mittelwerthe erhalten würde.

Die an einem Individuum zu erhaltenden Mittelwerthe würden vielmehr sein:

$$(E) = \frac{1}{4e} + \frac{A}{2(A-B)(A+2B)}$$
$$(T') = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{A-B}\right)$$
$$(T'') = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{e} + \frac{4}{A-B}\right).$$

Der Grund für die Abweichung liegt in Folgendem. Die letzteren Formeln setzen Stäbchen voraus, welche der Länge nach aus Elementen zusammengesetzt sind, die in sich homogen und so orientirt sind, dass ihre Längsrichtungen sämmtlich senkrecht zu einer Octaëdernormale stehen. Jedes Element torquirt und biegt sich dann nahezu völlig frei, wird also z. B. an den Nebenänderungen, die im Allgemeinen auftreten[1] (Torsionen bei Biegung und umgekehrt), nicht gehindert. Dies ist aber nicht der hier vorliegende Fall, bei welchem jedes Element aus unzähligen verschieden orientirten Krystallindividuen besteht, die aufeinander wirken, speciell in Stäbchen, die parallel einer Octaëderfläche liegen, sich gegenseitig so beeinflussen, dass (wie schon allein aus Symmetrierücksichten zu folgern ist) jene Nebenänderungen in jedem Querschnittselement sich völlig aufheben.

Ich stelle im Folgenden die gemachten Beobachtungen zusammen.

Die Dicken der Stäbchen wurden mit einem Sphärometer gemessen, von dem ein Scalentheil $s = 0.00799^{mm}$ war, und zwar längs der Mittellinie an fünf gleich weit entfernten Stellen in zwei Lagen des Stäbchens je vier bis sechs Mal, ausserdem an verschiedenen Stellen der Sphärometerschraube wiederholt. Bei der Berechnung des Mittels wären eigentlich die Messungen an den Enden mit halbem Einfluss zu berücksichtigen; da aber bei den Biegungen die Dicken der Enden nur verschwindenden Einfluss haben und bei den Drillungen die Stäbchen überhaupt nur bis in circa 1^{cm} Entfernung von den Enden benutzt wurden, habe ich sie nur mit dem vierten Theil des Gewichtes der übrigen eingeführt. Von einer Correction wegen der von der prismatischen abweichenden Gestalt habe ich wegen der Unregelmässigkeit dieser Abweichungen abgesehen. Besondere Beobachtungen zeigten, dass die Dicke in der Mittellinie wirklich als mittlere Dicke angesehen werden konnte.

[1] Vergl. W. Voigt, Wied. Ann. XVI. S. 274 u. f., 1882.

Die Mittel der Messungen in den beiden Lagen, welche bei Wiederholungen nur um einzelne Zehntel Scalentheile verschieden gefunden wurden, sind folgende

I. 122.2 122.4 122.0 122.4 126.9
122.2 121.9 121.9 122.7 127.1.
Mittel: $D = 122.6' = 0.9795^{mm}$.

II. 128.8 128.0 128.1 127.3 125.9
129.1 128.0 128.1 126.8 125.1
Mittel: $D = 127.6' = 1.020^{mm}$.

III. 134.2 132.6 131.4 130.5 133.0
133.7 132.2 131.5 130.5 132.8.
Mittel: $D = 131.7' = 1.052^{mm}$.

IV. 132.4 131.7 130.1 129.4 132.0
132.2 131.7 130.1 129.2 131.8.
Mittel: $D = 130.6' = 1.045^{mm}$.

Die Breitemessungen sind weniger von Einfluss auf die Resultate. Ich theile nur die an fünf gleich weit von einander befindlichen Stellen gefundenen Mittelwerthe mit und zwar in Millimetern. Da die schmalen Seitenflächen ziemlich abgerundet waren, sind diese Messungen an verschiedenen Stellen vorgenommen worden. Das Mittel der auf denselben Querschnitt bezüglichen Messungen ist trotzdem nur bis auf höchstens 0.01^{mm} genau.

I. 5.43 5.46 5.47 5.49 5.47.
Mittel: $B = 5.47^{mm}$.

II. 5.50 5.51 5.49 5.47 5.365.
Mittel: $B = 5.48$.

III. 3.88 3.87 3.84 3.82 3.76.
Mittel: $B = 3.84$.

IV. 4.00 3.98 3.95 3.93 3.94.
Mittel: $B = 3.955$.

Die Messung der Biegungen wurde in der in früheren Arbeiten[1] beschriebenen Weise angestellt. Ich gebe nur die Mittelwerthe von bei 3 bis 5 Belastungen mit je 3 bis 4 Einstellungen erhaltenen Zahlen in Trommeltheilen des benutzten Mikrometermikroskopes, von denen 1009 auf ein Millimeter gehen. Die unter 1. aufgeführten Werthe waren bei derselben Lage des Stäbchens an gegenüberliegenden Stellen der Mikrometerschraube gemessen, die unter 2. in der umgekehrten Lage. ϑ giebt in Celsius-Graden die Temperatur, von welcher die Resultate sich sehr stark abhängig fanden.

[1] W. VOIGT, Pogg. Ann. Erg. Bd. VII, S. 1, 1875.

Stäbchen I. $P = 60\,g$, $\vartheta = 23°$

1. $\eta = 82.7,\ 81.8$; 2. $\eta = 82.9,\ 81.9$.

$\eta_1 = 1.372$.

Stäbchen II. $P = 80\,g$, $\vartheta = 23.5°$.

1. $\eta = 96.5,\ 96.8$; 2. $\eta = 97.0,\ 96.5$.

$\eta_1 = 1.210$.

Stäbchen III. $P = 60\,g$, $\vartheta = 22°$.

1. $\eta = 94.5,\ 94.8$; 2. $\eta = 94.2,\ 94.8$.

$\eta_1 = 1.577$.

Stäbchen IV. $P = 60\,g$, $\vartheta = 23.5°$.

1. $\eta = 95.1,\ 95.0$; 2. $\eta = 94.6,\ 94.6$.

$\eta_1 = 1.580$.

Die Länge war für alle gleich 70^{mm}. Stäbchen IV ist nicht völlig regelmässig gestaltet, sondern hat auf der einen Breitseite eine ziemlich grosse Scharte von etwa 80^{mm} Fläche und wohl bis 0.1^{mm} Tiefe, welche beim Sägen entstanden sein mag und zur Beseitigung verlangt hätte, dass das Schleifen noch viel weiter fortgesetzt worden wäre. Der Zahlenwerth E, der mit ihm erhalten ist, muss also zu gross ausfallen, d. h. der sogenannte Elasticitätscoëfficient $E = \frac{1}{E}$ zu klein.

Die Berechnung nach der Formel $E = \frac{L^3}{4\eta_1 D^3 B}$ giebt in Millimetern und Grammen als Einheiten, für $\vartheta = 23°$

$$E_1 = 1227000,\quad E_1 = 815.10^{-10}$$
$$E_2 = 1228000,\quad E_2 = 814.10^{-10}$$
$$E_3 = 1226000,\quad E_3 = 816.10^{-10}$$
$$E_4 = 1220000,\quad E_4 = 820.10^{-10}.$$

Der letzte Werth ist nach dem Obigen unzuverlässiger, als die übrigen, aber bei der Unsicherheit der Dickebestimmung ist auch die gute Übereinstimmung der drei ersten Zahlen zum Theil zufällig. Ich glaube nicht, dass mehr als der 200. Theil in diesen Resultaten zu verbürgen ist. Jedenfalls zeigen diese Werthe, dass die galvanisch niedergeschlagene Platte einen hohen Grad von Homogenität besitzt. Besonders mache ich darauf aufmerksam, dass auch die beiden ersten Werthe, welche an zwei Stäbchen erhalten sind, die mit ihrer Breitseite der Platte parallel und zwar übereinander (also in merklich verschiedenem Abstand von der Elektrodenfläche) gelegen haben, vollständig übereinstimmen.

Die Resultate der Torsionsbeobachtungen theile ich in der früheren Weise mit.[1] Das drillende Gewicht war das der Wagschale (welches

[1] Vergl. Wied. Ann. XV, S. 502, 1882.

nicht als bekannt eingeführt wird, vielmehr bei dem Verfahren zur Elimination der Reibung herausfällt)[1] und 25 resp. 50 zugefügte Grammen. Die Differenz der hierdurch erzeugten Drehungen der zwei um die Länge L von einander entfernten Querschnitte ist in Millimetern der Scala unter σ angegeben, unter σ_0 der Ausgangspunkt.[2] Hieraus und aus der Entfernung der Scala vom Apparat (3482^{mm}) ist der Drillungswinkel τ berechnet nach der Formel

$$\operatorname{tg} 2\tau = (\sigma + \sigma_0) E$$

und aus den verschiedenen τ nach der Methode der kleinsten Quadrate τ_1, d. h. der einem Gramm Belastung entsprechende. Der Hebelarm R war wie früher $= 38.10^{mm}$.

Stäbchen I. $L = 48.45^{mm}$ $\vartheta = 22.7°$

l. R.	$\sigma = 9.8$	54.7	99.8	$\sigma_0 = -\ 80$	$\rho = 1.2$
r. R.	$\sigma = 9.9$	54.9	99.6	$\sigma_0 = +\ 210$	$\rho = 1.2$

$\tau_1 = 0.000257.$

Stäbchen II. $L = 49.05^{mm}$ $\vartheta = 22.9°$

r. R.	$\sigma = 8.5$	48.0	88.6	$\sigma_0 = +\ 280$	$\rho = 1.5$
l. R.	$\sigma = 7.2$	47.8	87.7	$\sigma_0 = +\ 60$	$\rho = 4.5$

$\tau_1 = 0.000230.$

Stäbchen III. $L = 46.75^{mm}$ $\vartheta = 22.5°$

r. R.	$\sigma = 13.8$	74.2	135.2	$\sigma_0 = +\ 140$	$\rho = 0.8$
l. R.	$\sigma = 12.5$	73.2	134.2	$\sigma_0 = -\ 20$	$\rho = 3.2$

$\tau_1 = 0.000348.$

Stäbchen IV. $L = 46.35^{mm}$ ϑ 22°

l. R.	$\sigma = 10.9$	71.0	131.7	$\sigma_0 = -\ 140$	$\rho = 7.0$
r. R.	$\sigma = 12.9$	73.3	133.9	$\sigma_0 = +\ 20$	$\rho = 2.4$

$\tau_1 = 0.000347.$

Dies letztere Stäbchen war, um die oben erwähnte Unregelmässigkeit der Form ohne Einfluss zu lassen, auf der einen Seite abgesägt worden; demgemäss ist als mittlere Dicke eine andere einzuführen, als oben bei der Berechnung von E, nämlich $D = 1.040^{mm}$.

Was die Berechnung selbst anlangt, so gelten für den Torsionswinkel τ, der beiden Gattungen von Stäbchen I, II und III, IV, die kurz mit $'$ und $''$ bezeichnet werden mögen, die zwei Formeln:[3]

---

[1] W. VOIGT, Pogg. Erg. Bd. VII, S. 189, 1875.

[2] Die mit r. R. und l. R. untereinander gestellten Werthe können einander nicht gleich sein, da in ihnen noch die halbe Wirkung der Reibung steckt, welche an der rechten und linken Rolle (r. R. und l. R.) wie das beigeschriebene ρ zeigt, oft stark verschieden ist. Über den Werth von ρ siehe WIED. Ann. 15. S. 502. 1882.

[3] SAINT VENANT. Mém. des Sav. etc. 14, p. 412. 1856, s. auch W. VOIGT, WIED. Ann. XVI S. 305, 1882.

Relation nicht ausreichend ist. Ich bin, um die bisherigen Erfahrungen zu verwerthen, mit einer Wiederholung der Beobachtungen am Steinsalz beschäftigt, deren Resultate ich binnen Kurzem mittheilen werde.

Die gefundenen Zahlwerthe für A, B und e können auch verwandt werden, um die Elasticitäts-Constanten und daraus die Biegungs- und Torsionscoëfficienten des isotropen Kupfers zu berechnen, falls es gestattet ist, sich dasselbe vorzustellen als ein Aggregat mikroskopisch kleiner nach allen möglichen Richtungen orientirter Krystallindividuen derselben Constitution, wie sie das galvanisch niedergeschlagene Kupfer enthält, — eine Annahme, die wohl sehr wahrscheinlich ist.

Das elastische Potential für das so definirte isotrope Medium wird aus dem für den regulären Krystall gültigen:

$$-2F = A(x_x^{o2} + y_y^{o2} + z_z^{o2}) + 2B(x_x^o y_y^o + y_y^o z_z^o + z_z^o x_x^o) + e(x_y^{o2} + y_z^{o2} + z_x^{o2})$$

erhalten, in dem man dasselbe auf ein beliebiges Coordinatensystem transformirt und von dem erhaltenen Werth das arithmetische Mittel für alle möglichen Lagen dieses Coordinatensystems nimmt.

Die Ausführung der Rechnung ergiebt:

$$\begin{aligned} -2F_m = \frac{1}{5}\big[&(3A + 2B + 4e)(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) \\ &+ 2(A + 4B - 2e)(x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x) \\ &+ (A - B + 3e)(x_y^2 + y_z^2 + z_x^2)\big]. \end{aligned}$$

Man findet also, wie für isotrope Medien nöthig, den letzten Coëfficienten gleich der halben Differenz des ersten und zweiten, so dass man setzen kann:

$$\begin{aligned} -2F_m = &A_m(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + 2B_m(x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x) \\ &+ \frac{A_m - B_m}{2}(x_y^2 + y_z^2 + z_x^2). \end{aligned}$$

Für isotropes Kupfer der oben angenommenen Constitution würden sich dabei folgende Zahlwerthe ergeben:

$$\begin{aligned} A_m &= 1396^{0000\,gr} \\ B_m &= 465^{0000\,gr}, \end{aligned}$$

hiernach also:

$$A_m = 3B_m,$$

wie die Poisson'sche Theorie für isotrope Medien verlangt. Nachdem sich die Poisson'sche Theorie bei zwei aus wässrigen Lösungen bei niedrigen Temperaturen abgeschiedenen Körpern (Steinsalz und Kupfer) bestätigt hat, möchte ich vermuthen, dass die Abweichungen, welche Beobachtungen an Körpern ergeben haben, deren Bearbeitung hohe Temperaturen erfordert (Stahl, Messing und Glas), in diesem letzteren Umstande begründet sind.

Aus A_m und B_m finden sich weiter die Biegungs- und Torsionscoëfficienten für isotropes Kupfer für $\vartheta = 23^\circ$ von folgender Grösse:

$$E_m = \frac{(A_m - B_m)(A_m + 2B_m)}{A_m + B_m} = 1163_{0000}^{gr}$$

$$\mathrm{E}_m = \frac{1}{E_m} = 859.10^{-10}$$

$$T_m = \frac{A_m - B_m}{2} = 465_{0000}^{gr}$$

$$\mathrm{T}_m = \frac{1}{T_m} = 215^{0}.10^{-10}$$

WERTHEIM[1] hat durch Beobachtungen an Drähten gefunden bei 15—20° C.:

für gezogene $E = 1245_{0000}^{gr}$
für angelassene $E = 1052_{0000}^{gr}$.

Unser Werth fällt genau in die Mitte zwischen beiden, und dies bestätigt gewissermaassen die Anschauung über die Constitution des isotropen Kupfers, welche der obigen Berechnung zum Grunde gelegt ist.[2] Für T sind freilich WERTHEIM's Resultate viel kleiner als unsere (bis 36_{00000}^{gr}), was ich nicht zu erklären weiss. Indessen weichen hinsichtlich dieser Grösse die Resultate anderer Beobachter stark von dem WERTHEIM'schen ab; SAVART[3] findet z. B. 42_{0000}, was schon viel besser stimmt.

Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass die Coëfficienten E_m und T_m keineswegs die arithmetischen Mittel sind aus allen an einem einzigen Kupferkrystall in verschiedenen Richtungen zu erhaltenden, obgleich das elastische Potential das arithmetische Mittel aller für denselben Krystall, aber beliebige Coordinaten-Axen gültigen ist. Der Grund dafür ist oben ausführlicher angegeben worden.

---

[1] WERTHEIM, Ann. de chim. (3) 12, p. 421 u. 23 p. 52; auch POGG. Ann. 78 S. 488 1849 und Erg. Bd. II. S. 35, 1848.

[2] WERTHEIM, Ann. de chim. (3) 50, p. 195, 1857.

[3] SAVART, Ann. de chim. (3) 61 (mir nicht zugänglich).

39. Über die magnetisirende Wirkung elektrischer Schwingungen.

Von A. Oberbeck
in Halle a. S.

(Vorgelegt am 12. Juli; — gedruckt im Bericht vom 26. Juli [St. XXXVII]: — ausgegeben am 2. August.)

Die Wirkung des Telephons beruht hauptsächlich auf der schnell wechselnden Magnetisirung des Eisens. Da durch das Telephon die menschliche Stimme, ebenso wie musikalische Töne, selbst von beträchtlicher Höhe, mit wenig veränderter Klangfarbe übertragen werden, so muss man daraus schliessen, dass der Magnetismus des Eisens periodischen Veränderungen der magnetisirenden Kräfte zu folgen im Stande ist, selbst wenn dieselben mehrere Tausend Zeichenwechsel in der Secunde bedingen. Es scheint hiernach, dass die Trägheit der Eisenmoleküle bei schwachen, magnetisirenden Kräften verschwindend klein ist. Weiteren Aufschluss über diese Frage kann man von einer quantitativen Untersuchung des magnetischen Verhaltens des Eisens unter dem Einfluss elektrischer Schwingungen erwarten.

In zwei früheren Mittheilungen[1] hat der Verfasser Methoden beschrieben, die Selbstinduction von Drahtrollen zu messen, wobei Wechselströme benutzt werden. Beide Methoden schienen für den angegebenen Zweck wohl geeignet. Dieselben beruhen beide auf dem Einfluss, welchen die Selbstinduction einer Rolle auf die Phase der elektrischen Schwingungen ausübt, welche durch die Rolle gehen. Die Einführung eines Eisenkernes in die zu untersuchende Rolle bewirkt in Folge der gleichzeitigen Magnetisirung desselben eine Vergrösserung des Potentials der Rolle auf sich selbst und demnach eine weitere Phasenverschiebung, welche in gleicher Weise gemessen werden kann.

Um die Untersuchung unter möglichst einfachen Bedingungen durchzuführen, wurde stets eine Drahtrolle von 500^{mm} Länge benutzt, welche in fünf Lagen 4200 Windungen Kupferdraht enthielt. Der innere Radius der Windungen betrug 19^{mm}, der äussere 22^{mm}. Die

[1] Sitzungsberichte der Akad. der Wissensch. zu Berlin 1882. S. 125—131 und S. 1065—1074. Wiedemann's Ann. 17, 817—841; 19, 213—226.

magnetisirende Kraft kann hiernach im Innern der Rolle — wenigstens in einiger Entfernung von den Enden — als nahezu constant in Bezug auf Richtung und Grösse angesehen werden.

Bezeichnet man mit z die Anzahl der Windungen, mit d die Diagonale der Rolle, mit i die Stromstärke, so beträgt die magnetisirende Kraft:

$$\frac{4\pi zi}{d} = Pi\,.$$

Nimmt man an, dass das magnetische Moment eines dünnen Eisenstabes dieser Kraft proportional ist, so ist dasselbe:

$$m = k \cdot v \cdot Pi\,,$$

wo k die Magnetisirungsconstante, v das Volumen des Stabes bedeuten. Das elektromagnetische Potential des Stabes in Bezug auf die Rolle ist dann:

$$Pm = kvP^2 i\,.$$

Das Potential der Rolle auf sich selbst (p) wird daher durch die Anwesenheit des Eisenkern um den Werth: kvP^2 vergrössert.

Die beiden, oben erwähnten Methoden gestatten auf zwei verschiedene Arten die Grössen p und $p + kvP^2$ zu messen.

Die erste derselben beruht auf der Stromverzweigung der Wheatstone'schen Brücke mit dem Sinusinductor als Stromquelle, die zweite auf der Anwendung des Sinusinductors mit zwei verstellbaren Multiplicatorrollen.

I. Versuchsanordnungen.

Der erste Seitenzweig der Wheatstone'schen Brücke bestand aus der oben beschriebenen Magnetisirungsspirale, deren Widerstand 46 S. E. betrug. Zweig 2 enthielt einen Siemens'schen Widerstandskasten. Die Zweige 3 und 4 bestanden aus wenigen Windungen dünnen Neusilberdrahts und hatten gleiche Widerstände von je 56.5 S. E. Die Brücke wurde durch die bewegliche Rolle des Elektrodynamometers gebildet, während in der Leitung der periodischen Elektricitätsquelle sich die festen Rollen desselben befanden.

Da von den vier Seitenzweigen nur in dem ersten eine erheblichere Selbstinduction vorkommt, so gilt,[1] wenn das Elektrodynamometer keine Ablenkung zeigt, die Gleichung:

$$n^2\pi^2 p^2 = \left(w_2 \frac{w_4}{w_3} - w_1\right)(w_1 + w_2 + w')\,.$$

[1] Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1882. S. 128.

Hier ist p der Selbstinductions-Coëfficient der Rolle im Zweige 1, w_1, w_2, w_3, w_4 sind die Widerstände der Seitenzweige, w ist der Widerstand der Brücke; endlich ist:

$$w' = \frac{w\,(w_3 + w_4)}{w + w_3 + w_4}\,.$$

Die Schwingungszahl n wurde durch Beobachtung der Zeit (τ) für 1000 ganze Umdrehungen des Magnets festgestellt. Es ist also:

$$n = \frac{2000}{\tau}\,.$$

In Folge der Gleichheit der Widerstände der Zweige 3 und 4 nimmt die Gleichung die einfachere Form an:

$$(1) \qquad (n\pi p)^2 = (w_2 - w_1)\,(w_1 + w_2 + w')\,.$$

Nach Einführung des Eisenkerns musste, um die Ablenkung des Elektrodynamometers auf Null zurückzuführen, ein grösserer Widerstand w_2' eingeschaltet werden. Es gilt dann die Gleichung:

$$(2) \qquad (n\pi)^2\,(p + kvP^2)^2 = (w_2' - w_1)\,(w_1 + w_2' + w')$$

oder:

$$\pi\,(p + kvP^2) = c\,,$$

wo:

$$(3) \qquad c = \frac{1}{n}\sqrt{(w_2' - w_1)\,(w_1 + w_2' + w')}$$

gesetzt ist.

Die eben beschriebene Methode ist recht empfindlich. Sie gestattet ausserdem leicht die Umrechnung der beobachteten Grössen auf absolutes Maass, da die Grösse c auf SIEMENS'sche Einheiten und Secunden bezogen ist.

Untersucht wurden cylindrische Eisenstäbe, meist von 400^{mm} Länge und von verschiedenen Durchmessern, theils einzeln, theils zu Bündeln von mehreren Stäben combinirt. Ausserdem wurde ein Drahtbündel benutzt, bestehend aus einer grösseren Zahl dünner Drähte von etwa 0.5^{mm} Durchmesser. Die Ausführung der Versuche zeigte, dass die vorhin definirte Grösse c bei Stäben von grösserem Durchmesser oder bei Bündeln solcher Stäbe regelmässig und ziemlich erheblich mit wachsendem n abnahm. Nur bei dem zuletzt erwähnten Drahtbündel blieb dieselbe constant.

Man könnte daraus schliessen, dass bei Stäben von nicht allzu kleinem Durchmesser die erregten Magnetismen abnehmen, wenn die Anzahl der Stromwechsel in der Secunde wächst. Die weiteren Untersuchungen zeigen indess, dass diese Abnahme, zum Theil einer anderen Ursache zuzuschreiben ist.

Bei der zweiten Methode wurde der früher beschriebene Sinusinductor mit zwei gegen einander drehbaren Multiplicatorrollen benutzt. Dieselben dienten als Stromquellen für zwei verschiedene Stromkreise, deren einer die festen Rollen, der andere die bewegliche Rolle des Elektrodynamometers enthielt. In dem ersten Kreise befand sich ausserdem die oben beschriebene Magnetisirungsspirale. Bei senkrechter Stellung der beiden Multiplicatoren besteht eine einfache Beziehung zwischen der Summe der Selbstinductionscoëfficienten des einen Stromkreises (p_1) und dem Widerstand desselben (w_1). Es ist:

$$p_1 = \gamma \cdot w_1. \tag{4}$$

Hier ist je eine Constante, welche nur von dem zweiten Stromkreis abhängt. In diesem Fall zeigt das Elektrodynamometer keine Ablenkung. Wird in die Magnetisirungsspirale ein Eisenkern eingeführt, so wird p_1 wieder um die Grösse $kv\,P^2$ vermehrt, und es muss, um die bewegliche Rolle auf Null zurückzuführen, ein weiterer Widerstand x eingeschaltet werden, so dass:

$$p_1 + kv\,P^2 = \gamma\,(w_1 + x), \tag{5}$$

oder:

$$kv\,P^2 = p_1 \frac{x}{w_1}. \tag{6}$$

Durch Bestimmung von p_1 nach der früher beschriebenen Methode lässt sich wiederum $kv\,P^2$ auf absolutes Maass zurückführen. Bei Untersuchung derselben Eisenstäbe, wie bei der ersten Methode ergaben sich in den meisten Fällen erheblich kleinere Werthe und ebenfalls eine beträchtliche Abnahme mit wachsender Schwingungszahl der elektrischen Ströme. Nur bei dem Bündel aus ganz dünnen Drähten waren die erhaltenen Werthe in beiden Fällen ziemlich gleich, im letzteren allerdings auch noch etwas kleiner.

Dieser Mangel an Uebereinstimmung deutete darauf hin, dass bei dem ganzen Vorgang ein Umstand mitwirken muss, welcher die Resultate der beiden Methoden in verschiedener Weise beeinflusst. In erster Linie ist hierbei an eine Verzögerung bei dem Entstehen und Verschwinden des Magnetismus zu denken.

II. Phasenunterschied der magnetisirenden Kraft und des inducirten Magnetismus.

Durch eingehende Versuche hat Hr. Beetz[1] nachgewiesen, dass bei ausgedehnteren Eisenmassen nach Schluss oder Öffnung des

[1] Pogg. Ann. 105. S. 487—503. 1858.

magnetisirenden Stromes stets eine gewisse Zeit vergeht, bis der inducirte Magnetismus entstanden oder verschwunden ist. Nur bei ganz dünnen Eisendrähten konnte eine solche Verzögerung nicht wahrgenommen werden, wie schon früher Hr. VON HELMHOLTZ[1] nachgewiesen hat.

Bestehen die magnetisirenden Kräfte aus elektrischen Schwingungen, so ist anzunehmen, dass die entsprechenden, periodischen Veränderungen des Magnetismus eine Phasenverzögerung gegen dieselben haben. Diese Verzögerung wird jedenfalls in erster Linie durch die Inductionsströme in den Eisenkernen veranlasst. Ausserdem kommen aber wahrscheinlich noch Molecularwirkungen der Eisenmasse in Betracht, welche in gleichem Sinne wirken. Über dieselben sind in neuerer Zeit Untersuchungen von den HH. WARBURG[2] und HIMSTEDT[3] angestellt worden. Ist der magnetisirende Strom periodisch, also:

$$i = a \cos n \pi t, \tag{7}$$

die magnetisirende Kraft im Innern der Spirale, wie früher, $P\,i$, so kann das inducirte, magnetische Moment gesetzt werden:

$$m = k \cdot P \cdot v \cdot a \cdot \cos\,(n \pi t - \phi), \tag{8}$$

wo ϕ die eben besprochene Phasenverzögerung bedeutet. Von der Grösse derselben hängt, wie hier beiläufig bemerkt werden mag, die bei der wechselnden Magnetisirung geleistete Arbeit oder die entsprechende Wärmeentwicklung in den Eisenkernen ab. Nach WARBURG (l. c.) ist dieselbe auszudrücken durch:

$$P \int_0^\tau m\, di = \frac{1}{2}\, a^2 \cdot P^2 \cdot k\, v\, n\, \pi \sin \phi.$$

Dieselbe würde also ohne Phasenverzögerung bei elektrischen Schwingungen Null sein.

Bei den oben beschriebenen Versuchen kommt die Rückwirkung des Magnets auf den inducirenden Stromkreis in Betracht. Dieselbe entspricht einer elektromotorischen Kraft:

$$-P\frac{dm}{dt} = P^2 kv \cdot an\pi \left\{ \sin n\pi t \cdot \cos\phi \quad \cos n\pi t \cdot \sin\phi \right\}.$$

Hierfür kann man auch schreiben:

$$-kvP^2 \left\{ \cos\phi \frac{di}{dt} + n\pi \sin\phi \cdot i \right\}.$$

---

[1] POGG. Ann. 83. S. 536. Gesamm. Abhandl. S. 458.
[2] WIEDEMANN'S Ann. 13. S. 141—164.
[3] WIEDEMANN'S Ann. 14. S. 483—503.

Tritt dieser Ausdruck in die Gleichung für die Stromintensität des inducirenden Kreises, welche ohne Mitwirkung des Magnetismus von der Form ist:

$$wi + p\frac{di}{dt} = E,$$

wo E eine periodische, elektromotorische Kraft bedeutet, so erhält man:

$$(9) \qquad (w + kvP^2n\pi \sin\phi)\, i + (p + kvP^2 \cos\phi)\frac{di}{dt} = E.$$

Bei Annahme einer besonderen Phasenverzögerung des Magnetismus wird also nicht allein das Inductionspotential des Kreises oder Zweiges auf sich selbst vergrössert, sondern es erfährt auch der Widerstand desselben eine scheinbare Vergrösserung. Dieser Widerstand kommt aber bei den oben beschriebenen Methoden bei der Berechnung des inducirten Magnetismus in Betracht, und zwar bei beiden in verschiedener Weise, so dass hierdurch die Verschiedenheit der erhaltenen Resultate ihre Erklärung finden kann. Eine entsprechende Correction konnte indess erst dann ausgeführt werden, wenn die Phasenverzögerungen ϕ genauer in jedem einzelnen Fall festgestellt waren.

III. Messung des Phasenunterschiedes der magnetisirenden Kraft und des inducirten Magnetismus.

Zu diesem Zweck wurde die folgende Anordnung getroffen. Der Strom des Sinusinductors wurde durch die festen Rollen des Elektrodynamometers und durch zwei Lagen der oben beschriebenen Magnetisirungsspirale geleitet. Ein zweiter Stromkreis bestand aus den drei anderen Lagen derselben Spirale, der beweglichen Rolle des Elektrodynamometers und einem Widerstandskasten. Das Elektrodynamometer vermittelte also die Wechselwirkung des inducirenden und des inducirten Stromes. Dieselbe müsste Null sein, wenn man von der Selbstinduction des secundären Kreises absehen könnte, da in diesem Falle der inducirende und der inducirte Strom einen Phasenunterschied $\frac{\pi}{2}$ haben würde. In der That war bei leerer Spirale die Wechselwirkung so klein, dass ein Ausschlag des Elektrodynamometers nicht beobachtet wurde. Nach Einsenkung eines Einsenkerns in die Rolle erhielt man ziemlich bedeutende Ausschläge. Durch Einschaltung von Widerständen in den zweiten Stromkreis wurde bewirkt, dass man abwechselnd 200 und 400 S. E. Widerstand in demselben hatte. Aus dem Verhältniss der beiden Ausschläge liess sich der

Phasenunterschied ϕ bestimmen, wie die folgende, einfache Betrachtung zeigt.

Bezeichnet man den Strom des inducirenden Kreises durch J und setzt:

$$J = a \cdot \cos(n\pi t),$$

so kann, wie oben gezeigt, das inducirte, magnetische Moment m gesetzt werden:

$$m = kv \cdot Pa \cos(n\pi t - \phi).$$

Durch die periodischen Veränderungen desselben wird in dem zweiten Stromkreis ein Strom i inducirt, dessen elektromotorische Kraft:

$$-P'\frac{dm}{dt} = kvPP'a \sin(n\pi t - \phi)$$

ist.

Bezeichnet man in diesem Kreise mit w den Widerstand, mit p das Inductionspotential des Kreises auf sich selbst, so gilt die Gleichung:

$$wi + p\frac{di}{dt} = -P'\frac{dm}{dt}.$$

Also:

$$i = -\frac{kvPP'an\pi}{w^2 + n^2\pi^2p^2}\left\{\cos(n\pi t)[w\sin\phi + n\pi p\cos\phi] + \sin(n\pi t)[n\pi p\cdot\sin\phi - w\cos\phi]\right\}.$$

Da die Ablenkung des Elektrodynamometers proportional mit:

$$\frac{1}{T}\int_0^T Jidt$$

ist, so gilt für dieselbe (α) der Ausdruck:

$$\alpha = A\frac{w\sin\phi + n\pi p\cos\phi}{w^2 + n^2\pi^2p^2},$$

wo: $$A = \frac{kv \cdot PP'n\pi a^2}{2}$$ gesetzt ist.

Das zweite Glied des Nenners ist klein im Vergleich zum ersten und giebt nur zu einer kleinen Correction Veranlassung, welche übrigens niemals versäumt wurde. Denkt man sich dieselbe für die beiden Ablenkungen α_1 und α_2 (entsprechend den Widerständen w_1 und w_2) vorgenommen, so erhält man:

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{tg}\phi = \frac{n\pi p}{w_1w_2}\,\frac{\alpha_1w_1^2 - \alpha_2w_2^2}{w_2\alpha_2 - w_1\alpha_1}.$$

Bei den nach dieser Methode mit den früher benutzten Stäben und Bündeln angestellten Versuchen erhielt man stets dieselben Werthe

für $\frac{1}{n}$ tg ϕ. Die Phasenunterschiede wachsen also mit der Anzahl der Stromwechsel.

Die wirklich beobachteten Werthe von ϕ waren von sehr verschiedener Grösse je nach der Gestalt der Eisenstäbe. Bei dem Bündel dünner Drähte waren die gefundenen Werthe von ϕ so klein, dass eine Phasenverzögerung mit Sicherheit nicht festgestellt werden konnte.

Bei dickeren Stäben von 5 bis 8^{mm} Durchmesser wuchsen die Werthe von ϕ mit der Grösse desselben. Bei einem Stab von 17^{mm} Durchmesser waren dieselben nur wenig von $\frac{\pi}{2}$ verschieden, ebenso bei einem Stab, welcher zwar nur 8^{mm} Durchmesser hatte, dabei aber eine Länge von 1^{m}, so dass er nach beiden Seiten aus der Spirale herausragte.

IV. Resultate der früheren Methoden mit Berücksichtigung der Phasenverzögerung.

Nach Gleichung (9) hat sich ergeben, dass eine Phasenverzögerung einer scheinbaren Verzögerung des Widerstandes des inducirenden Stromkreises gleichkommt. Da dieser Widerstand bei den beiden früher angewandten Methoden vorkommt, so wurden dadurch Veränderungen in der Berechnung der magnetischen Momente veranlasst (vergl. Gl. 2 und 3, sowie 4 und 5). Ohne hier auf die Einzelheiten dieser Berechnungen einzugehen, ist doch so viel ohne Weiteres aus den angeführten Gleichungen ersichtlich, dass hierdurch bei der ersten Methode eine Verkleinerung, bei der zweiten eine Vergrösserung der berechneten Zahlenwerthe für die magnetischen Momente eintritt.

Hierdurch näherten sich die nach den beiden Methoden gefundenen Werthe erheblich; doch blieben die Resultate der zweiten Methode stets etwas kleiner. Ein hier vielleicht noch in Betracht kommender Umstand wird noch weiter unten angeführt werden. Abgesehen von den absoluten Zahlenwerthen führten beide Methoden übereinstimmend zu den folgenden Schlüssen:

1. Bei den benutzten Schwingungszahlen von etwa 50 bis 180 in der Secunde sind die magnetischen Momente von Stäben und Drähten bis etwa zu 5^{mm} Durchmesser unabhängig von der Schwingungszahl.

2. Bei grösserer Dicke findet eine Abnahme des inducirten Magnetismus mit wachsender Schwingungszahl statt, welche um so beträchtlicher ist, je dicker die Stäbe sind.

3. Im Ganzen ist der Verlauf der Erscheinungen dazu angethan, hierbei hauptsächlich, wenn nicht ausschliesslich die Wirkung der Inductionsströme in der Eisenmasse als Ursache anzusehen.

4. Vergleicht man die inducirten Momente verschiedener Stäbe bei gleicher Schwingungszahl, so findet man dieselben Gesetze, wie bei constanten Strömen. Die beobachteten Momente sind um so grösser, je grösser die Längsdimension der Stäbe im Vergleich zu den Querdimensionen ist.

Zum Schluss möchte ich noch, anknüpfend an die nicht ganz vollständige Übereinstimmung der absoluten Werthe der beiden Methoden, auf einen eigenthümlichen Umstand hinweisen, welcher hierbei mitwirken könnte.

Die bisher gezogenen Schlüsse beruhen auf der Annahme, dass die beiden Wechselströme dem einfachen Gesetz der Sinusschwingungen folgen. Es entsteht die Frage, ob und wie dieselben zu modificiren sind, wenn die beiden Schwingungen von jener einfachsten Schwingungsform abweichen. Eine solche Abweichung kann, wenn sie auch bei den direct inducirten Strömen nicht vorhanden sein sollte, vielleicht durch Rückwirkung von Eisenkernen in Inductionsspiralen eintreten.

Man kann sich in diesem Falle die beiden periodischen Functionen, welche die Stromintensitäten ausdrücken, in FOURIER'sche Reihen entwickelt denken. Es ist dann:

$$i = \sum \left\{ A_m \cos m \frac{2\pi t}{T} + B_m \sin m \frac{2\pi t}{T} \right\}$$
$$i' = \sum \left\{ A'_m \cos m \frac{2\pi t}{T} + B'_m \sin m \frac{2\pi t}{T} \right\}.$$

Die elektrodynamische Wechselwirkung ist proportional mit dem Ausdruck:

$$\frac{1}{T} \int_0^T i i' dt = \tfrac{1}{2} \sum \left\{ A_m A'_m + B_m B'_m \right\}$$

Alle übrigen Producte verschwinden, wie die bekannte, analytische Entwickelung lehrt, nach welcher die Constanten der FOURIER'schen Reihen gefunden werden.

Folgt nun der eine Strom dem einfachen Sinusgesetz, während der andere eine abweichende Schwingungsform hat, wie dies z. B. bei der zweiten Methode der Fall sein könnte, ist also: $A'_m = B'_m = 0$. mit Ausnahme von A'_1 und B'_1, so ist die elektrodynamische Wirkung proportional mit:

$$\tfrac{1}{2} \left\{ A_1 A'_1 + B_1 B'_1 \right\}.$$

Es kommt also, wenn es gestattet ist, akustische Bezeichnungen hier anzuwenden, nur der Grundton der zusammengesetzten Schwingung zur Wirkung, nicht aber die Obertöne, welche durch die Versuchsanordnung einen Einfluss auszuüben verhindert sind. Die beobachteten magnetischen Momente würden daher kleiner erscheinen, als sie wirklich sind.

Wenn es gelingen sollte, eine Schallschwingung mit unveränderter Klangfarbe in eine elektrische Schwingung umzusetzen, so könnte man nach den oben angeführten Entwickelungen dieselbe in elektrodynamische Wechselwirkung treten lassen mit einfachen Sinusschwingungen von den Schwingungszahlen: n, $2n$, u. s. w. Die Wirkungen würden dann nach einander dem Grundton resp. den einzelnen Obertönen des Klanges entsprechen.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

STK
Q3
M38

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES
MAY 1991

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT VI.

JUNI 1883.

BERLIN 1883.
VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION IN FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ & GOSSMANN.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

4. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung**. Die einzelnen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende einzelne Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeder Sitzungsbericht eröffnet eine Uebersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** eingelegt werden. Abwesende Mitglieder, soweit alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretär selbst oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem ausführlich geeignet erscheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stücke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich ansteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verziehten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, in welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Separatabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretär Anzeige gemacht hat.

§ 8.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung zu [illegible] Secretär zusammen, welcher dazu den Vorsitz [illegible] Derselbe Secretär führt die Oberaufsicht über die [illegible] und den Druck der in dem gleichen Stück [illegible] nenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretär.

§ 29.

1. Der redigirende Secretär ist für den [illegible] geschäftlichen Theils des Sitzungsberichts [illegible] lich. Für alle übrigen Theile derselben [illegible] jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

28. Über Jeremejewit und Eichwaldit vom Berge Soktuj in Daurien.

Von M. Websky.

(Vorgelegt am 14. Juni: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXVIII]; — ausgegeben am 21. Juni.)

Hr. A. Damour machte am 13. März 1883 in der Akademie der Wissenschaften in Paris eine Mittheilung über die chemische Zusammensetzung eines neuen, von ihm Jeremejewit genannten Minerals, welches bei einem Volumengewicht = 3.28 und einer zwischen Quarz und Feldspath liegenden Härte aus normaler borsaurer Thonerde besteht.

Das Material zu dieser Untersuchung wurde Hrn. Damour durch den inzwischen nach Breslau berufenen Prof. Arzruni zugestellt, welcher drei Krystalle, einige Fragmente und eine geschliffene Platte dieser Substanz unter der vorläufigen Bezeichnung: Beryll von Soktuj, als Geschenk des Hrn. Staatsrathes, Prof. Jeremejew in Petersburg, an das hiesige mineralogische Museum unlängst von dorther mitbrachte.

Diese Krystalle wurden vor einigen Jahren von dem damaligen Dirigenten der Nertschinsker Bergwerke, Hrn. Julij Iwanowitsch Eichwald, an Ort und Stelle gesammelt; der Fundort ist nach den gefälligen Mittheilungen des Hrn. Jeremejew, — wie auch Hr. Damour bereits angiebt, — ein Berg Soktuj, ein unbedeutender nördlicher Ausläufer der Adon-Tschilon-Kette, 20 Werst von dem Fort Tschindansk am Onon und 40 Werst nordwestlich vom Berge Tutchaltuj; er schliesst an die Vorläufer des Borschtschowotschnoj-Gebirges bei den Quellen eines Baches Soktuj in der Nähe der Ansiedlungen Turgi und Gatbulat an. Die Localität ist nicht zu verwechseln mit dem weiter südöstlich gelegenen Kosakenposten Soktuj in der Nähe des Flusses Argunj.[1]

Die hier berührten Krystalle fanden sich lose im granitischen Gruss unter dem Rasen. Hr. Damour erhielt eine Mittheilung von

[1] Auf der Karte von Radde, Petermann's geograph. Mitth. 1861, Karte 16. ist dieser letztere Punkt Soktuj, welcher nicht der Fundort ist, angegeben, andererseits aber auch die Lage des alten und neuen Forts Tschindansk und die Bergkette Adon-Tschilon verzeichnet. — Nach Arzruni liegt der Berg Soktuj zehn Werst nordöstlich vom Adon-Tschilon, von diesem getrennt durch das Thal der »dichten Seen«; (vergl. Gornoj-Journal, 1855, VI. 451—453; Semjonow Wörtb. IV. 667.

Hrn. von Kokscharow, dass dem letzteren diese Krystalle wohl bekannt seien, er sie auch als eine besondere Gattung angesehen, eine Besprechung aber vermieden habe, in der Hoffnung, dass er umfangreicher ausgebildete Exemplare erhalten werde; auch habe er einen grossen Feldspath-Krystall, auf dem eine Gruppe von etwa 20 Krystallen jener Art aufgewachsen sind, an das British Museum abgegeben. Nach Hrn. Jeremějew stammen von dem Berge Soktuj einige bemerkenswerthe Exemplare von Turmalin, welche in der Sammlung des Kaiserlichen Berg-Instituts in Petersburg aufbewahrt werden; zwei derselben bestehen aus theils braunrothem, theils rosarothem Turmalin, welche in äusserst grobkörnigen Granit, aus weissem Orthoklas, grauem Quarz und blassrothem Lepidolith in bis 3^{cm} grossen Tafeln bestehend, eingewachsen sind; ein drittes Exemplar ist ein stängliches Aggregat von braunrothen Turmalin-Krystallen, an dem einen Ende in ein gemeinschaftliches flaches Rhomboëder ausgehend, 10 Pfund 72 Solotnik schwer.

Ein besonderes, an diese Krystalle sich knüpfendes Interesse beruht auf einer Beobachtung des Hrn. Jeremějew, welcher dieselben, der ursprünglichen Auffassung als Beryll-Krystalle, denen sie gleichen, folgend, optisch untersuchte unter Bezugnahme auf die Arbeit von Pfaff[1] über die optischen Anomalien des Berylls; als Resultat dieser Untersuchung wurde der Kaiserlichen mineralogischen Gesellschaft in Petersburg[2] mitgetheilt, dass die quer durch die hexagonalen Säulen der Krystalle von Soktuj geschnittenen Platten erkennen lassen, dass nur ein schmaler äusserer Rand derselben sich als optisch einaxig erweise, während der von diesem Rande eingeschlossene Kern aus sechs optisch zweiachsigen Sectoren bestehe, jedoch unter Modalitäten, welche kaum diese optische Zweiaxigkeit als Resultat einer durch Spannung hervorgerufenen Anomalie zu erkennen gestatten.

Ich habe nun versucht, an dem von Hrn. Jeremějew dem Museum verehrten Material festzustellen, ob auch die äusseren morphologischen Erscheinungen Motive dafür darbieten, dass in diesen merkwürdigen Krystallgebilden zwei morphologisch verschiedene Körper orientirt verwachsen sind, und hat sich diese Vermuthung, trotz der Schwierigkeiten, welche die unvollkommene Oberflächen-Ausbildung hervorrief, bestätigt. Die Krystalle bilden sechsseitige Prismen mit pyramidal gestalteter oder flach gewölbter Endigung; die Prismenflächen und die pyramidal

[1] Poggend. Ann. 1865. CXXIV, 448.
[2] Protocolle V. S. 415, Sitzung vom 25. Febr. 1869.

gestalteten Endigungen entsprechen der pyramidal-hemiëdrischen Abtheilung des hexagonalen Krystallisations-Systemes; an den gewölbten Endigungen erscheinen neben den zum erstgenannten System gehörenden Reflexen anderweitige, welche im Anschluss an die optischen Erscheinungen auf einen rhombischen Drilling zurückgeführt werden können.

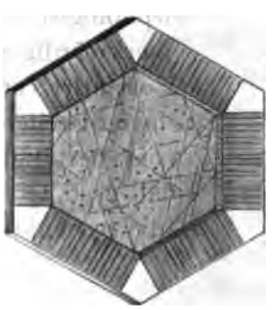
Man hat es also in der That mit zwei morphologisch verschiedenen Körpern zu thun, von denen ein jeder wohl auch selbständig gefunden werden kann; es möchte daher zweckmässig sein, den von Hrn. Damour gewählten Namen Jeremejewit ausschliesslich auf den hexagonalen, den Mantel bildenden Körper zu beziehen, während der eingeschlossene, nur sparsam an die Oberfläche tretende Kern des rhombischen Drillings wohl in dankbarer Erinnerung an den Finder als Eichwaldit zu bezeichnen sein möchte.

Freilich involvirt dieser Vorschlag, angesichts des überaus einfachen Resultates der chemischen Untersuchung des Hrn. Damour, die Hypothese, dass die normale borsaure Thonerde $= B_2 Al_2 O_6$ dimorph sei, eine Frage, welche eigentlich nur durch die Analyse von, nach seinem optischen Verhalten getrennten Material beantwortet werden könnte, was zu ermöglichen leider bei der grossen Seltenheit der Krystalle wohl kaum in Aussicht steht.

Man ist aber hauptsächlich bei den einfachen Verbindungen auf Dimorphie gestossen; auch der Fall einer sich gegenseitig orientirenden Krystallbildung dimorpher Substanzen ist nicht ohne Beispiel, wie die verbreitete Verwachsung von Markasit und Eisenkies dies bekundet.

Die in Rede stehenden Krystallgebilde zeigen im Inneren eigenthümliche Einlagerungen und Incontinuitäten, welche von der Grenze des äusseren Jeremejewit und dem aus Eichwaldit bestehenden Kern ausgehen. Ich verdanke der Güte des Hrn. Jeremějew die Zeichnungen eines an diesen Einlagerungen und Incontinuitäten besonders reichen Quer- und Längsschliffes, welche ich hier zu benützen die Erlaubniss habe und den Querschliff in Fig. 1, den Längsschliff in Fig. 2 wiedergebe; es mögen Darstellungen in vier- bis fünffacher Grösse sein.

Fig. 1.



Da in dem mit Fig. 1 bezeichneten Bilde die Grenzen der im polarisirten Licht sich sondernden Felder nicht eingetragen sind, füge ich noch in Fig. 3 das Bild der uns verehrten, rechtwinklig gegen die Säulenrichtung geschnittenen Platte in genau fünffacher Grösse hinzu, in welchem diese Theilung vermerkt ist.

Fig. 2.

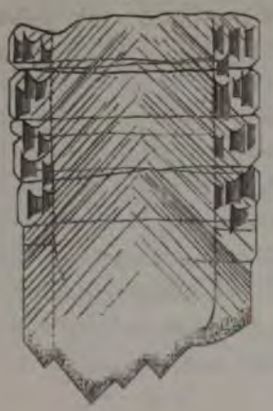


Fig. 3.

Der innere Kern von Eichwaldit ist von dem optisch einaxigen Rande durch einen in Fig. 1 schmalen, in Fig. 3 breiteren, fast opaken sechsseitigen Ring getrennt; die grössere Ausbreitung des Ringes tritt in gewissen Horizonten der sonst klaren Krystalle auf, wie dies die horizontalen Querlinien in Fig. 2 andeuten, die mit äusserlichen Einkerbungen verbunden sind; bei auffallendem Licht erscheint die opake Einlagerung isabellgelb und löst sich bei stärkerer Vergrösserung in ein System feiner Schlingen auf, welche klare Partien einschliessen. Von diesem opaken Ringe gehen sehr zahlreiche, selbst bei sehr starker Vergrösserung keine messbare Breite zeigende Linien oder Schnitte genau rechtwinklig auf die Säulenfläche bis zum Rande der Platte oder bis nahe an denselben, so dass in den sechs Ecken der Platte kleine rhomboïdische Felder von ihnen frei bleiben; ganz beschränkt ist die Zahl ähnlicher im Bereich des Jeremejewit liegender Schnitte in anderen, aber immer hexagonal orientirten Richtungen. Auch nach Innen ziehen sich einzelne feine Linien, in dem in Fig. 3 dargestellten Original aber bei weitem weniger zahlreich, als dies Fig. 1 und 2 darthun. Die in Fig. 2 markirten dunklen Flecke sind andere grössere Spaltflächen, welche einer den inneren Prismenwinkel halbirenden, partiell zum Vorschein kommenden Theilbarkeit entsprechen.

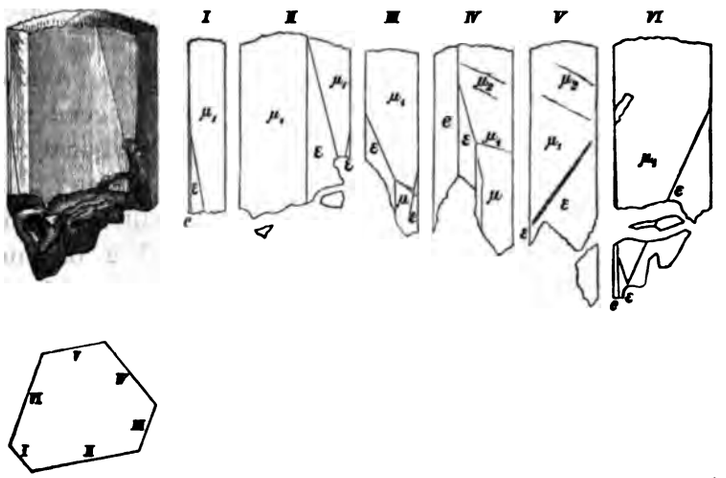
Im convergenten polarisirten Licht geben die von den Schnitten freien rhomboïdischen Felder in den Ecken des aus Jeremejewit bestehenden Randes ein vollkommen regelmässiges, optisch einaxiges Interferenzbild negativen Charakters, welches im Bereich der feinen, unter einander parallelen Schnitte allerhand unbedeutende Deformationen erfährt, je nachdem diese mehr oder minder zahlreich zu Wirkung kommen.

Der von dem Mantel eingeschlossene, aus Eichwaldit bestehende Kern zerfällt im parallelen polarisirten Lichte in sechs Segmente; die Grenzen derselben stehen senkrecht auf den Säulenflächen und projectiren sich als scharfe gerade Linie, wenn die Grenze parallel der Verticalaxe folgt, als breite Säume, wenn die Begrenzung schräg niedergeht, was in Fig. 3 durch Doppellinien angedeutet ist. Jedes Segment zeigt im convergenten polarisirten Licht ein vollkommenes,

in allen Segmenten gleichartiges optisch zweiaxiges Interferenzbild negativen Charakters. Die Ebene der optischen Axen macht mit jeder der beiden Seiten in einer Ecke der Platte den Winkel von 30°, die Bissectrice steht senkrecht auf der Platte, parallel der Säulenrichtung. Die Apertur der optischen Axen in Luft ist $2E = 52°$, für rothes Licht etwas grösser als für blaues; bei 1.83^{mm} Platten-Dicke berührt sich der zweite Interferenzring ohngefähr in der Bissectrice; durch Tubus-Verschiebung eines Mikroskopes wurde der Brechungsindex für Licht in der Axenebene schwingend $\alpha = 1.65$, für rechtwinklig darauf schwingendes Licht $\beta = 1.64$ gefunden, Zahlen, die allerdings nur approximativ zu verstehen sind. Übrigens sind die Erscheinungen in jedem Segmente dieselben, sobald man sich innerhalb der Begrenzungen hält, und auch dieselben in jedem Theil des Segmentes.

Morphologisch konnte der hexagonale Charakter des Jeremejewit am genauesten an dem in Fig. 4 in doppeltem Maassstabe dargestellten

Fig. 4.



18^{mm} langen, 7 und 10^{mm} breiten Krystall erkannt werden. Er endet oben in eine flache, fast ganz mit kleinen Zapfen bedeckte Wölbung, einem flachen, auf die Kanten aufgesetzten Dihexaëder gleichend; das untere Ende ist theils verbrochen, theils unregelmässig begrenzt; der obere Theil ist klar, sehr blass gelblich gefärbt, der untere Theil zeigt 4 bis 6 opake Ringe, in der Zeichnung nicht angegeben.

Die sechs ziemlich glänzenden Säulenflächen haben keine einheitliche Oberfläche, sondern sind vicinal gegliedert; jede einzelne giebt eine in zwei sich kreuzenden Zonen belegene Reflex-Gruppe, von denen die eine die allen Säulenflächen gemeinsame Horizontalzone ist,

während die andere auf steile Hemididihexaëder führt; die etwas gebogen verlaufende Streifung der zu dieser Zone gehörenden Oberflächen-Partieen geht von Oben-links nach Unten-rechts mit 67—77° Neigung gegen die Vertical-Kante; die hierher gehörenden Flächen convergiren sämmtlich nach Oben.

Die Kreuzstelle der beiden Zonen ist zuweilen nicht, meist nur von einem schwachen Reflex angedeutet, doch aber goniometrisch einstellbar; ich fand die Normalenbögen zwischen den Kreuzstellen

$$60° 0' 38'' + 59° 59' 6'' + 59° 59' 42'' + 60° 1' 12'' + 59° 59' 44'' + 59° 59' 14'' = 359° 59' 46'',$$

welche Werthe den hexagonalen Charakter der Form constatiren.

Die von den Kreuzstellen markirte Position habe ich als zweites hexagonales Prisma $a = (a : \frac{a}{2} : a : \infty c) = \infty P2 = (1.\ 1.\ \bar{2}.\ 0)$ Bravais aufgefasst, weil alsdann die übrigen Flächen der Horizontal-Zone einfachere Symbole erhalten. Zu beiden Seiten der Kreuzstelle und zwar theils auf der linken, theils auf beiden Seiten gleichzeitig treten andere nahe gelegene Prismen auf, und zwar bilden die auf der linken Seite belegenen Prismen eine andere Reihe, wie die auf der rechten Seite, wodurch pyramidal-hemiedrische Ausbildungsweise angedeutet ist.

An drei Kanten beginnt die Reihe der linken Seite mit dem Prisma

$$e = \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{a}{2} : \tfrac{a}{3} : a : \infty c) = \frac{\infty P\frac{3}{2}}{2} = \tfrac{1}{2}\,(2.\ 1.\ \bar{3}.\ 0)$$

$$a\,|\,e = 10° 53' 37'', \text{ gem. } 10° 48' 2'' - 10° 53' 58''.$$

Es folgen dann, wenn man alle Beobachtungs-Resultate vereinigt,

$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\,(4.\ 3.\ \bar{7}.\ 0)$ mit 4° 42′ 54″ Abstand von a,
gem. 5° 28′ 11″ — 4° 17′ 46″;

$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\,(6.\ 5.\ \bar{11}.\ 0)$ mit 3° 0′ 19″ Abstand,
gem. 3° 29′ 2″ — 2° 38′ 54″;

$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}\,(8.\ 7.\ \bar{15}.\ 0)$ mit 2° 12′ 15″ Abstand,
gem. 2° 12′ 24″ — 1° 58′ 40″;

$\varepsilon_4 = \frac{1}{2}\,(10.\ 9.\ \bar{19}.\ 0)$ mit 1° 44′ 28″ Abstand,
gem. 1° 39′ 16″;

$\varepsilon_5 = \frac{1}{2}\,(14.\ 13.\ \bar{27}.\ 0)$ mit 1° 13′ 30″ Abstand,
gem. 1° 22′ 22″ — 1° 15′ 58″;

$\varepsilon_6 = \frac{1}{2}\,(20.\ 19.\ \bar{39}.\ 0)$ mit 0° 50′ 53″ Abstand,
gem. 0° 52′ 18″ — 0° 51′ 58″;

$\varepsilon_7 = \frac{1}{2}\,(22.\ 21.\ \bar{43}.\ 0)$ mit 0° 46′ 9″ Abstand,
gem. 0° 45′ 42″;

$\varepsilon_8 = \frac{1}{2}\,(28.\ 27.\ \bar{55}.\ 0)$ mit 0° 36′ 5″ Abstand,
gem. 0° 37′ 29″ — 0° 37′ 20″;

$\varepsilon_9 = \frac{1}{2}(44.\,43.\,\overline{87}.\,0)$ mit 0° 22′ 49″ Abstand,
gem. 0° 23′ 8″ — 0° 22′ 22″.

Auf der rechten Seite der Kreuzstelle folgen dann in derselben Richtung

$\varepsilon_{10} = \frac{1}{2}(32.\,33.\,\overline{65}.\,0)$ mit 0° 30′ 32″ Abstand,
gem. 0° 33′ 58″ — 0° 29′ 44″;

$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(24.\,25.\,\overline{49}.\,0)$ mit 0° 40′ 30″ Abstand,
gem. 0° 39′ 20″;

$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(20.\,21.\,\overline{41}.\,0)$ mit 0° 48′ 24″ Abstand,
gem. 0° 49′ 10″;

$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(16.\,17.\,\overline{33}.\,0)$ mit 1° 0′ 8″ Abstand,
gem. 1° 0′ 5″ — 0° 55′ 34″

? $\varepsilon_{14} = \frac{1}{2}(12.\,13.\,\overline{25}.\,0)$ mit 1° 19′ 22″ Abstand,
gem. 1° 14′ 16″ — 1° 12′ 56″, was besser dem Symbole von ε_5 mit 1° 13′ 30″ entspricht;

? $\varepsilon_{15} = \frac{1}{2}(8.\,9.\,\overline{17}.\,0)$ mit 1° 56′ 43″ Abstand,
gem. 2° 12′ 42″, was besser dem Symbole ε_4 mit 2° 12′ 15″ entspricht;

$\varepsilon_{16} = \frac{1}{2}(4.\,5.\,\overline{9}.\,0)$ mit 3° 40′ 14″ Abstand,
gem. 3° 43′ 16″.

Die mit dem Fragezeichen hervorgehobenen Symbole ε_{14} und ε_{15} sind im Sinne gleichartiger Gestaltung in der rechten Reihe aufgestellt; die Abmessungen entsprechen aber besser den Symbolen ε_5, ε_4 der linken Seite, in die rechtseitige Reihe eingestellt; man kann dabei an eine Zwillingsbildung denken, welche in der Prismen-Reihe die homoëdrische Gestaltung wieder herstellt und weiter unten in der That nachgewiesen wird; alsdann fallen die Symbole ε_{14} und ε_{15} aus.

Die Beobachtungen vertheilen sich auf die einzelnen Säulenflächen, anfangend an der schmalen Seite I in der Figur, wie folgt:

auf I: e, ε_5 ...,
II: ε_3, ε_9 ... a .... ε_{11},
III: ε_1, ε_2, ε_4, ε_7 ..... a ... ε_{11}, ε_{15} (oder ε_4),
IV: e, ε_2, ε_4 ....
V: ε_1 ..... a .... ε_{10}, ε_{13}, ε_{14} (oder ε_5), ε_{16}
VI: e, ε_5, ε_6, ε_8, ε_9, ... a ... ε_{10}, ε_{14} (oder ε_5), ε_{15} (oder ε_4).

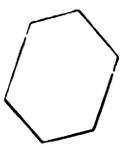
Die Flächen der Horizontalzone nehmen mit Ausnahme ihrer Ausbildung auf Säulenfläche IV, wo sie breit entwickelt sind, einen kleinen Theil der Oberfläche der Säulenflächen ein; der grössere Theil ist von Flächen der geneigten Zone occupirt; sie beginnen zunächst der Kreuzungsposition zuweilen mit einer Fläche, deren Reflex nur etwa 0° 2′ von letzterer entfernt scheint; von den weiter abliegenden

Reflexen habe ich die präciseren mit Hülfe des SCHRAUF'schen Signals[1] auszumessen versucht, jedoch ziemlich schwankende Resultate erhalten; ich fand für einen solchen

auf Fläche I:	70° 39′	Zonenaxenneigung,	0° 20′ 5″	Zonenbogen,
II:	67° 31′	»	0° 25′ 20″	»
III:	73° 50′	»	0° 25′ 0″	»
V:	70° 7′	»	0° 50′ 20″	»
VI:	72° 42′	»	0° 41′ 55″	»
	76° 58′	»	0° 15′ 30″	»

durchschnittlich 71° 58′ Zonenaxenneigung; die Unsicherheit beruht auf der Schwierigkeit, in den complicirten Reflexsystemen die zueinander gehörenden Reflexlinien zu verfolgen. Für diese Flächen sind kaum Symbole aufzustellen; ich nehme etwa zwei derselben, μ_1 und μ_2 an, mit pp. 25′ und 50′ Bogenabstand von dem Prisma a; ausserdem zeigt sich zuweilen noch der Reflex einer steileren, μ, mit etwa 12′ Bogenabstand.

Fig. 5.



Bevor ich zu den Resultaten übergehe, welche die Untersuchung der gewölbten Endfläche ergab, will ich mich der Betrachtung eines zweiten Krystalls zuwenden, welcher in Fig. 5 in doppelter Grösse dargestellt ist; derselbe hat eine Länge von 47^{mm}, bei 5—7^{mm} Dicke und zeigt an beiden Enden Ausbildungs-Erscheinungen; er ist gleichfalls blassgelb gefärbt, in der oberen Hälfte klar, in der unteren von ungefähr zwölf Ringen neben allerhand anderen Incontinuitäten durchzogen; im Grossen und Ganzen bildet er eine sechsseitige Säule; es convergiren aber die Flächen nach oben, so dass die gegenüberliegenden einen Winkel von durchschnittlich 0° 24′ 30″ einschliessen; eine eben noch erkennbare von Oben — links nach Unten rechts — gehende Streifung lässt die scheinbaren Säulenflächen mit dem am ersten Krystall beschriebenen steilen Hemididihoxaëdern in eine Reihe bringen und würden sie die steile Form μ repräsentiren.

Am oberen Ende wird der Krystall, ähnlich dem vorhin betrachteten, durch eine flache, mit kleinen Zapfen besetzte Wölbung geschlossen, nur feiner und unbestimmter gegliedert. Das untere Ende geht in einige wenige grössere sechsseitige Zapfen aus, deren Flächen schief auf die Kanten der scheinbaren Säule aufgesetzt sind; ihre Polkanten werden durch glänzende, aber viel-

[1] Sitzungsberichte 1882. S. 969.

fach abgesetzte Flächen ungleichwinklig abgestumpft; zwei unregelmässig gestaltete Einschnürungen, von denen die eine im Bilde sichtbar ist, zeigen ähnliche Bildungen.

Eine der am unteren Ende auf die Kanten der scheinbaren Säule aufgesetzten Flächen, welche g heissen möge, ist hinreichend homogen ausgebildet, um ihre Neigung zu den angrenzenden Flächen μ links und μ^1 rechts messen zu können, und zwar ergab

$$g\,|\,\mu \text{ den Normalenbogen} = 54^\circ\,41'\,41''$$
$$g\,|\,\mu^1 \text{ » » } = 43^\circ\,33'\,26''$$

so dass die Kanten

$$\mu\,|\,\mu^1 \text{ und } g\,|\,\mu \text{ den ebenen Winkel} = 180^\circ - 51^\circ\,56'\,16''$$
$$\mu\,|\,\mu^1 \text{ und } g\,|\,\mu^1 \text{ » » » } = 180^\circ - 68^\circ\,49'\,15''$$

einschliessen.

Da nun jene Winkel sehr nahe denjenigen ausfallen werden, welche g mit den benachbarten Flächen des Prisma a machen würden, und da

$$\text{tg}\,51^\circ\,56'\,16'' = 0.4948\ \text{tg}\,68^\circ\,49'\,15'' \text{ oder nahe}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\text{tg}\,68^\circ\,49'\,15'' \text{ ist,}$$

so kann man der Fläche g das Symbol

$$= \tfrac{1}{2}\,(3a : \tfrac{b}{2} : \tfrac{3}{5}a : \tfrac{b}{3} : \tfrac{3}{4}a : b : c') = \tfrac{1}{2}\,(1.\,4.\,\bar{5}.\,\bar{3})$$

geben.

Nun ist aber der Winkel $68^\circ\,49'\,15''$ sehr nahe der Zonenaxenneigung der Flächen μ_1 und μ_2 am zuerst beschriebenen Krystall, so dass man annehmen kann, dass g, a, μ, μ_1, μ_2 tautozonal sind. Aus der Convergenz der Flächen μ am zweiten Krystall von $0^\circ\,24'\,30''$ berechnet sich die Neigung der Fläche μ zu der angrenzenden a in einer Zone von $68^\circ\,49'\,15''$ Axenneigung auf $0^\circ\,13'\,8''$, so dass g mit a in dieser Zone den Normalenbogen $43^\circ\,33'\,26'' - 0^\circ\,13'\,8'' = 43^\circ\,20'\,18''$ macht.

Setzt man die Axeneinheit $c = 1$, so wird die Axeneinheit

$$a = \tfrac{1}{3}\sqrt{25\,\text{tg}^2\,43^\circ\,20'\,18'' - 3} = 1.462884$$
$$= \text{num}\,(\log = 0.1652101),$$

$$\text{also } a : c = 1.462884 : 1 \text{ oder } 1 : 0.683581.$$

Das erste Dihexaëder dieser Elemente, $d = (1.\,0.\,\bar{1}.\,1)$ macht mit der Basis den Normalenbogen $d|c = 38^\circ\,17'\,6''$ und — behufs späterer Vergleichung hier zu bemerken — das Dihexaëder $\frac{1}{3}d = (1.\,0.\,\bar{1}.\,3)$ den Bogen $\frac{1}{3}d|c = 14^\circ\,44'\,28''$, das Dihexaëder $\frac{1}{4}d = (1.\,0.\,\bar{1}.\,4)$ den

Bogen $\frac{1}{4}d|c = 11° 9' 47''$. Was nun die Fläche anbelangt, welche die Polkanten des Hemididihexaëder g, also beispielsweise die Kante zwischen den Flächen $4.\,1.\,\bar{5}.\,\bar{3}$ und $\bar{1}.\,5.\,\bar{4}.\,\bar{3}$ abstumpft, so gehört dieselbe einem spitzen Dihexaëder erster Ordnung an, $\frac{7}{5}d = (7.\,0.\,\bar{7}.\,5)$, welches mit der Basis den Normalenbogen von $47° 51' 26''$ macht. Die Neigung von $0.\,7.\,\bar{7}.\,\bar{5}$ zu $4.\,1.\,\bar{5}.\,\bar{3}$ ist $= 36° 40' 51''$, zu $\bar{1}.\,5.\,\bar{4}.\,\bar{3}$ $= 25° 46' 48''$ und zu der Prismenfläche $1.\,2.\,1.\,0 = 50° 2' 56''$, gemessen $g|\mu$ $50° 16' - 50° 17''$.

Bezüglich der Art der Hemiëdrie, welche in dem Hemididihexaëder g aufkommt, wird man mit Rücksicht auf das einseitige Auftreten der Fläche e und der Gruppe ε am ersten Krystall erwarten, dass eine pyramidale Ausbildung, analog der des Apatit obwalte und wir daher am oberen Ende die Flächen der Form g auf der Seite des Prisma e finden, wie am unteren.

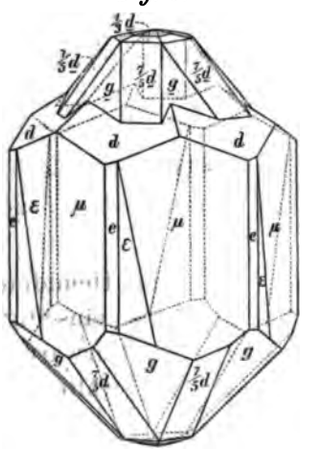
Dies ist aber nicht der Fall, wie dies die Betrachtung des hierzu allein geeigneten ersten Krystall erkennen lässt, zu dem ich wiederum übergehe. Es gliedern sich hier die besagten Zapfen, welche die gewölbte Endigung bilden, ungleich deutlicher, erreichen eine Länge von 0.4^{mm}, so dass man sie sehr gut mit der Lupe unterscheiden kann; sie stehen am Rande des Krystalls nicht ganz dicht und sitzen auf den Flächen eines flachen Dihexaëders erster Ordnung auf, sind gebildet von den Flächen g und $\frac{7}{5}d$ und geendet durch einen nicht scharf gegliederten Complex flacher Flächen. Mehr nach der Mitte zu werden dieselben kürzer und sinken zu flachen Polstern herab; ganz im Centrum stehen sie vereinzelt und tritt hier der Flächen-Complex, den ich auf Eichwaldit beziehe, als Unterlage hervor.

Verfolgt man die Lage der Flächen g an den Zapfen am Rande, so erscheinen dieselben tautozonal mit den Flächen μ_2, μ_1, a und somit tautozonal mit den — hier nicht ausgebildeten Flächen g des unteren Endes, welche am zweiten Krystall besprochen wurden, genau so als ob trapezoëdrische Hemiëdrie vorhanden wär.

Man kann aber diesen Widerspruch beheben, wenn man eine Zwillingsbildung annimmt nach dem Gesetz, Zwillingsaxe senkrecht auf einer Fläche des Prisma a, verbunden mit hemimorpher Ausbildung.

Unter Bezugnahme auf die sogleich zur Erwähnung gelangenden Reflexerscheinungen am oberen Ende glaube ich annehmen zu können, dass an den einfachen Krystallen an dem oberen Ende das Dihexaëder d und die Flächen der Gruppe μ, an dem unteren Ende das pyramidale Hemididihexaëder g und die Dihexaëder $\frac{7}{5}d$, $\frac{1}{3}d$, $\frac{1}{4}d$ auftreten, der Zwilling aber so zu Stande kommt, dass das Neben-Individuum sich

Fig. 6.



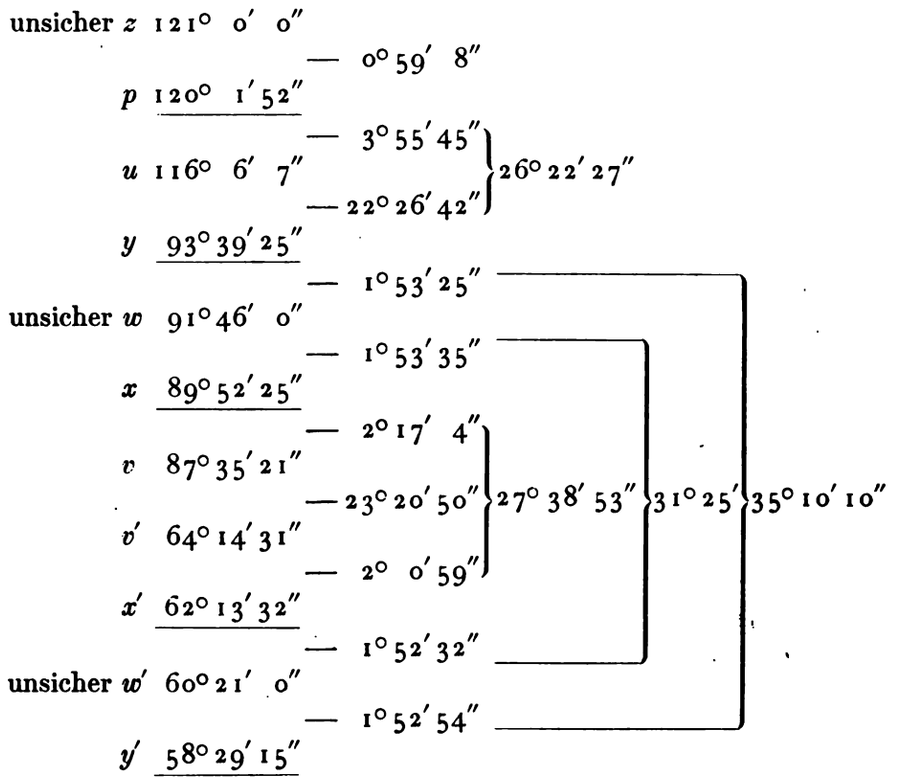
mit seinem aufwärts gerichteten unteren Ende aus dem Dihexaëder *d* des Haupt-Individuums heraushebt, wie dies in Fig. 6 schematisch dargestellt ist. In Wirklichkeit zersplittert sich aber das Neben-Individuum in eine grosse Anzahl von Sub-Individuen, indem es in einen Complex von Zapfen übergeht, was durch die in Fig. 7 gegebene Skizze verdeutlicht werden soll.

Fig. 7.

In der Mitte der gewölbten Endigung tritt die Krystalloberfläche des Eichwaldit zwischen mehr vereinzelt stehenden flachen Zapfen des Jeremejewit in grösserer Ausdehnung hervor und culminirt in einer dreikantigen Ecke, deren Kanten jedoch sehr bald dichotomiren, so dass eine sechsflächige Gliederung entsteht mit einer Kantenrichtung senkrecht auf die Säulenflächen, vollkommen analog den Grenzen der im polarisirten Licht erkennbaren Krystall-Individuen, wie sie in Fig. 3 dargestellt sind. Um dies und die eigenthümliche dreieckige Facettirung der Flächen zu erkennen, ist eine fünfzigfache lineare Vergrösserung und eine schiefe Beleuchtung von Oben nothwendig; die Reflexe dieser Gegend erreichten daher erst unter Anwendung eines verkleinernden Beobachtungs-Apparates eine einstellbare Präcision, und war dies auch nur in einer einzigen Richtung zu erzielen. Der Krystall wurde so auf dem Goniometer befestigt, dass die Flächen III und VI parallel der Lymbus-Ebne standen; die in dieser Stellung erscheinende Reflexreihe nimmt ihren Ursprung etwa in der Mitte zwischen Ecke IV|V und dem Centrum und reicht etwas über das letztere hinaus.

In dieser Reflexreihe unterscheidet man zunächst drei Gruppen buntfarbiger, auch seitlich der Zone cumulirter Reflexmassen, deren ziemlich scharf präcisirten Grenzpositionen ich mit zu, vw und $w'v'$ bezeichnen will; zwischen ihnen liegen fünf normale, wenn auch etwas dilatirte Reflexe p, y, x, x', y'; von den letzteren liegen p, x, x' scharf tautozonal, y wenig, y' erheblich mehr aus der Zone gerückt. Die Vergleichung mit den Reflexen anderer Stellen ergiebt, dass die Reflexmassen zu, vw und $w'v'$ von den Zapfen des Jeremejewit herrühren, so dass also die Reflexe p, y, x, x', y' auf Eichwaldit zu beziehen sind.

Die Goniometer-Positionen, Mittel aus zehn Ablesungen, sind folgende:



Vergleicht man zunächst die Abstände, um welche die Grenzen der cumulirten Reflexmassen von der offenbar zwischen v und v_1 liegenden Position der Basis entfernt sind, mit den Normalenbögen der oben aus den Elementen für Jeremejewit berechneten Dihexaëder,

$$\begin{aligned} c|v &= 11° 40′ \quad \text{mit} \quad c|\tfrac{1}{4}d = 11° 10′ \\ c|w &= 15° 42′ \qquad\quad c|\tfrac{1}{3}d = 14° 44′ \\ c|u &= 40° 2′ \qquad\quad c|d = 38° 17′ \\ c|z &= 44° 57′ \qquad\quad c|\tfrac{7}{5}d = 47° 51′ \end{aligned}$$

so wird man eine halbwegs genügende Übereinstimmung unter Berücksichtigung der obwaltenden Umstände finden, um diese Reflexerscheinungen auf diese Dihexaëder zurückführen zu können.

Die auf Eichwaldit bezogenen Reflexe ergeben

$$\begin{aligned} p|y &= 26° 22′ 27″ \\ y|x &= 3° 47′ 0″ \\ x|x′ &= 27° 38′ 53″ \\ x′|y′ &= 3° 45′ 26″ \end{aligned}$$

und nach einer zweiten Abmessung in andrer Centrirung

$$p\,|\,y = 26^\circ\,21'\,12''$$
$$y\,|\,x = \;\;3^\circ\,44'\,59''$$
$$x\,|\,x' = 27^\circ\,37'\,44''$$
$$x'\,|\,y' = \;\;3^\circ\,51'\,44'',$$

so dass man im Mittel die Neigung zu Basis

$$c\,|\,x = 13^\circ\,49'\;\;9''$$
$$c\,|\,y = 17^\circ\,36'\,26''$$
$$c\,|\,p = 43^\circ\,58'\,16''$$ annehmen kann.

Mit Rücksicht auf die aus der Zone $p|x|x'$ heraustretende Lage der Reflexe y, y', ferner unter Beachtung des Umstandes, dass durch eine Veränderung der Centrirung die Reflexe y, y' zum Verschwinden gebracht werden können, schliesslich mit Rücksicht auf die Kantenconfiguration, kann man diese Normalbögen nicht auf Flächen, die in der Reihenfolge x, y, p in einer Zone folgen, beziehen.

Fig. 8.

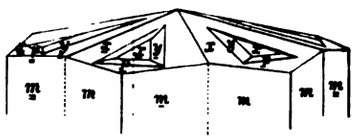
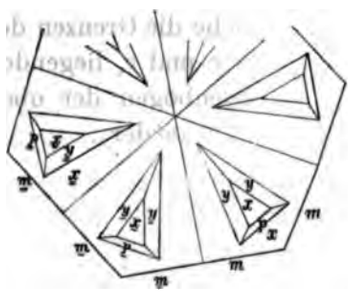


Fig. 9.



Es herrscht nämlich, wie dies in Fig. 8 und 9 dargestellt ist, fast ausschliesslich die den Reflex x gebende Fläche in sechsfacher Wiederholung, auf jeder derselben erheben sich in mehrfacher Facettirung flache dreieckige Pyramiden, welche durch die wieder einsetzende Fläche x abgestumpft werden; der Reflex p entspringt aus den schmalen, die aufgesetzten Pyramiden nach Aussen begrenzenden Seiten; in der Zonenrichtung p, x ist keine, nach den Normalenbögen zwischen p und x zu suchenden Fläche vorhanden, die den Reflex y geben könnte.

Nimmt man aber einen Drillingskrystall des rhombischen Systemes an, dessen Individuen einen Prismenwinkel von nahe 120° haben, Zwillingsaxe senkrecht auf einer Prismenfläche, und an einander gereiht nach einem Prisma $= (3a : b : \infty c) = (1 \cdot 3 \cdot 0)$; so werden die Flächen $3a : b : xc$ im zweiten Individuum und $3a : b' : xc$ im dritten Individuum. den positiven Schenkel der Längsaxe nach Aussen gedacht, mit den Dodecaïdflächen x und p im ersten Individuum fast tautozonal werden.

Geht man von dieser — von den optischen Erscheinungen inducirten Hypothese aus, giebt der Fläche x das Symbol $= (a : \infty b : c)$ und nimmt an, dass das Einheits-Verhältniss der Axen $a : b = 1 : \sqrt{3}$

wär, so würde der unbestimmte Coefficient x in dem Symbole $3a:b:xc$ auszudrücken sein durch $x = \frac{3}{2} \cot 13° 49' 9'' \operatorname{tg} 17° 36' 26'' = 1.935$.

Eine kleine Veränderung der Axeneinheit b gestattet aber das Symbol für $'y = 3a:b:2c = 2 \cdot 6 \cdot 3$ zu schreiben, indem man

$$b = \frac{3 \cdot \cot 13° 49' 9''}{\sqrt{\left(\frac{3 \cdot \cot 13° 49' 9''}{2} \cdot \operatorname{tg} 17° 36' 26''\right)^2 - 1}} = 7.360880$$

setzt; aus $a = \cot 13° 49' 9''$ folgt $a = 4.065398$.

Die Elemente $a:b:c = 4.065398 : 7.36088 : 1$ geben ein Prisma $m = (a:b:\infty c) = (1 \cdot 1 \cdot 0)$, welches vorn einen Winkel von $122° 10' 34''$ macht.

Der Abstand des Reflexes der Fläche y im zweiten Individuum von der Zone p, x im ersten Individuum berechnet sich dann auf $0° 19' 36''$ und der Abstand des Reflexes von y im dritten Individuum von dieser Zone auf $1° 39' 5''$, was schätzungsweise wohl mit der Reflexerscheinung stimmt.

Für den Reflex p kommt ein Symbol $= \frac{a}{4} : \infty b : c)$ auf. Es ist, um die ungewöhnlich grossen Zahlen aus den Elementen zu beseitigen, daher wohl zweckmässig, die Einheit der Vertical-Axe zu vervierfachen,

$$a:b:c = 1.01635 : 1.8402 : 1 = 0.5523 : 1 : 0.5434$$

und $p = (a:\infty b:c) = (1 \cdot 0 \cdot 1)$

$x = (4a:\infty b:c) = (1 \cdot 0 \cdot 4)$

$y = (6a:2b:c) = (1 \cdot 3 \cdot 6)$

zu schreiben.

29. Zur Physiologie der Gehörschnecke.

Von Dr. B. Baginsky.

(Vorgelegt von Hrn. Munk am 14. Juni; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXVIII]; — ausgegeben am 21. Juni.)

Nach von Helmholtz sind im inneren Ohre Theile anzunehmen, welche auf Zuleitung von Schallschwingungen in Mitschwingung gerathen; und die mitschwingenden Theile sind in der von der Basis zur Spitze der Schnecke hin an Breite zunehmenden *Membrana basilaris* zu vermuthen, so dass die Nachbarschaft des runden Fensters auf die hohen, die der Schneckenspitze auf die tiefen Töne reagiren würde. V. Hensen und J. Ranke haben auch bei den Dekapoden, bez. Pterotracheen die Hörhärchen an der Körperoberfläche und in den Ohrbläschen auf Zuleitung von Schallschwingungen in Mitschwingung gerathen sehen; die verschiedenen Härchen schwangen auf verschiedene Töne verschieden stark. Aber für die Schnecke der Wirbelthiere war bisher nichts weiter experimentell festgestellt, als dass sie dem Hören dient. Hier bot die Aussicht auf einen Fortschritt H. Munk's gelegentliche Beobachtung, dass Hunde, welchen am runden Fenster die untere Wand der Schnecke weggebrochen war, nachdem sie circa vierzehn Tage taub gewesen waren, wieder sehr unvollkommen hörten und nicht hohe, wohl aber tiefe Töne und Geräusche wahrnahmen. Ich unternahm es deshalb im physiologischen Laboratorium der hiesigen Thierarzneischule, beim Hunde zu untersuchen, ob und inwieweit die verschiedenen Theile der Schnecke, bez. der *Membrana basilaris* functionell ungleichwerthig sind.

Den Hunden wurde in der Regel nach Eröffnung der *Bulla ossea* die eine Schnecke weit aufgebrochen, um vollständige Taubheit zu erzielen und so dies Ohr auszuschalten, von der anderen Schnecke aber bloss diese oder jene kleinere Partie durch Eröffnen oder Anbohren verletzt. Darauf wurden die Hunde lange Zeit hindurch auf ihr Hörvermögen geprüft, unter allen Vorsichtsmaassregeln mittels Anschlagen der Klaviatur einer eigens zu dem Zwecke gebauten Orgel, deren Pfeifen von C' bis c'''' reichten und für die tiefsten und höchsten Töne offene waren. Schliesslich wurde, wenn durch drei bis zehn Wochen keine Veränderung mehr im Hörvermögen der Hunde aufgetreten war, die Section gemacht und das Labyrinth in einer ununter-

brochenen Serie von Schnitten, welche einander parallel in der Richtung von der Spitze zur Basis der Schnecke gelegt waren, mikroskopisch untersucht.

Schon die Ausschaltung des einen Ohres bot besondere Schwierigkeiten, da der Eingriff bald so stark war, dass er durch Meningitis zum Tode führte oder wenigstens zu beträchtlicher Kopfverdrehung, welche die Thiere für die Hörprüfungen unbrauchbar machte, bald wiederum nicht stark genug war, so dass es nicht zu vollkommener Taubheit auf dem Ohre kam. Aber auch die kleinere Verletzung am anderen Ohre hatte öfters durch die nachfolgende Entzündung, wenn nicht gar den Tod oder die Kopfverdrehung, so doch bleibende Taubheit zur Folge. Dazu kam noch, dass manche Hunde, an welchen die operativen Eingriffe gut gelungen waren, wegen ihrer Unaufmerksamkeit, Unruhe u. s. w. zuverlässige Ergebnisse bei den Hörprüfungen nicht gewinnen liessen. Aus einer grossen Zahl von Versuchen blieben daher immer nur wenige brauchbare übrig, zumal da es schliesslich auch noch erforderlich war, dass die mikroskopische Untersuchung pathologische Veränderungen bei der einen Schnecke für ihre Totalität, bei der anderen Schnecke bloss für einen Theil derselben herausstellte. In letzterer Hinsicht war es sehr werthvoll, dass mit den feineren Veränderungen der Fasern des Hörnerven immer auch gröbere Veränderungen der Zellen des *Ganglion spirale* und der *Intumescentia ganglioformis Scarpae* einhergingen.

Hunde, welche vollkommen taub auf dem einen Ohre gemacht und auf dem anderen Ohre an der Spitze der Schnecke durch Einbohren eines Pfriemens verletzt worden waren, wurden nach einigen Tagen bloss durch den Schuss aus der Ruhe gebracht. Aber gegen das Ende der ersten Woche reagirten sie auch deutlich auf c'''''' und manchmal noch auf c''''. Im Verlaufe der zweiten Woche traten immer Reactionen auf c'''' und c''', selten daneben noch auf c'' hinzu. Die einmal aufgetretenen Reactionen wurden in der nächsten Zeit lebhafter. Doch dabei blieb es dann. So lange die Thiere auch lebten, wurden tiefere Töne, als c''' bez. c'', nicht gehört.

Die anatomische Untersuchung ergab an der Schnecke, deren Spitze verletzt worden war, die oberste Windung und den grössten Theil der mittleren Windung von fibrösem Narbengewebe erfüllt mit Untergang des normalen Inhalts; der untere Rest der Windungen und das übrige Labyrinth waren durchaus normal. Auf der anderen Seite war die Schnecke entweder ganz oder fast ganz von Narbengewebe erfüllt; und wo im letzteren Falle noch die früheren Weichtheile sich erkennen liessen, waren alle oder so gut wie alle Nervenfasern und Ganglienzellen degenerirt.

Hunde, welche vollkommen taub auf dem einen Ohre gemacht und auf dem anderen Ohre an der Basis der Schnecke durch Wegbrechen eines Stückchens des Promontoriums verletzt worden waren, erwiesen sich auffällig oft auch auf dem letzteren Ohre für die Dauer taub. In diesen Fällen war manchmal nicht die ganze Schnecke, sondern nur die unterste Windung entweder in beiden Scalen oder in der ganzen *Scala vestibuli* und einem Theile der *Scala tympani* von fibrösem Narbengewebe erfüllt, und die *Membrana basilaris* war ebendort vernichtet; hin und wieder fanden sich narbige Einschnürungen am Stamme des Acusticus.

In den glücklicheren Fällen traten an den Hunden nach einigen Tagen auf den Schuss Bewegungen auf; und später kamen auch Reactionen auf Töne hinzu, zuerst nur schwache, dann allmählich stärkere Reactionen. Bei einer Anzahl von Hunden wurde dabei hinsichtlich des Beginnes und der Stärke der Reactionen zwischen hohen und tiefen Tönen kein Unterschied bemerkt Eine zweite, etwa ebenso grosse Zahl von Hunden begann zwar auch gleichzeitig auf hohe und tiefe Töne zu reagiren, aber die Reactionen auf die tiefen Töne waren in der ersten Zeit deutlich stärker, als die auf die hohen Töne. Endlich bei einer dritten, kleineren Anzahl von Hunden waren zuerst und für längere Zeit bloss Reactionen auf die tiefen Töne — auf die tiefsten drei bis vier Octaven — zu constatiren, und erst nach acht bis vierzehn Tagen traten auch Reactionen auf die hohen Töne ein. Schliesslich wurden von allen diesen Hunden die hohen und die tiefen Töne in anscheinend normaler Weise gehört.

An dem taub gemachten Ohre fand sich die Schnecke ebenso verändert, wie ich es für den gleichen Fall schon oben beschrieb. Auf der zweiten Seite war der kleine Knochendefect an der Basis der Schnecke membranös verschlossen, und in der kleinen Partie der untersten Schneckenwindung, welche dem runden Fenster zunächst gelegen ist, war die ganze *Scala tympani* oder ein Theil derselben und dazu hin und wieder noch ein Theil der *Scala vestibuli* von Narbengewebe erfüllt; ebendort war die *Lamina spiralis membranacea* manchmal in das Narbengewebe einbezogen und zu Grunde gegangen; sonst war alles normal, höchstens dass noch ganz zerstreut in der Schnecke wenige Nervenfasern und Ganglienzellen degenerirt erschienen.

In allen Versuchen sind die anfängliche Taubheit auf dem minder verletzten Ohre, die Wiederkehr der Hörfähigkeit und die Art ihrer Zunahme, wie dies H. MUNK bereits ausgeführt hat, dadurch verständlich, dass zunächst der flüssige Inhalt der Schnecke fortgefallen ist und die Entzündung von dem Orte des Eingriffes aus über die häutigen Schneckentheile sich verbreitet hat, dann aber infolge der

geringen Verletzung bald der Verschluss der Wunde erfolgt ist und nunmehr die Entzündung in umgekehrter Richtung bis zu einer gewissen Grenze sich zurückgebildet hat. Dass nach der Heilung noch abnorme Spannungen der *Membrana basilaris* für die Dauer fortbestehen, war nicht anzunehmen, und für streckenweise Verschmälerungen derselben Membran gab die Section keinerlei Unterlage. Die obigen Versuchsreihen zeigen mithin, dass die Spitze der Schnecke die dem Hören tiefer Töne dienenden Theile enthält, die Basis der Schnecke die dem Hören hoher Töne dienenden. Dass es bei der zweiten Versuchsreihe nicht gelungen ist, Hunde zu erhalten, welche für die Dauer ausschliesslich tiefe Töne hörten, findet in der Natur der Dinge seine einfache Erklärung: war der Eingriff an der Basis schwach, so kam es auch zu einer fast vollständigen Rückbildung der Entzündung; war der Eingriff stärker, so führte die Entzündung sogleich zu einem vollen Verschlusse der Scalen an der Stelle des Eingriffs oder gar zu einer Zerstörung des dicht dabei liegenden Nervenstammes und damit zu bleibender völliger Taubheit.

Ich habe auch Versuche angestellt, bei welchen ich den Hunden beide Schnecken an der Spitze, bez. an der Basis verletzte, und andere Versuche, bei welchen ich mittlere Theile der Schnecke angriff. Die ersteren Versuche haben die zu erwartenden Resultate ergeben; bei den letzteren Versuchen habe ich den Ausfall mittlerer Tonreihen nicht constatiren können.

30. Über geröllführende Gneisse von Obermittweida im sächsischen Erzgebirge.

Von J. Roth.

(Vorgelegt am 18. Januar; — gedruckt im Bericht vom 14. Juni [St. XXVIII]; — ausgegeben am 21. Juni.)

In der Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften (Bd. 52. 706. 1879) und in den Erläuterungen zur geognostischen Specialkarte des Königreichs Sachsen (Section Elterlein 1879, S. 29) kündigte Dr. Sauer an, dass er bei Crottendorf und Obermittweida in der Glimmerschieferformation des sächsischen Erzgebirges geröllführende Gneisse gefunden habe[1] und fügte im Maassstab von 1 : 250 ein Profil der Schichtenfolge bei Obermittweida hinzu. Die Bedeutung dieses Fundes für die Theorie der Entstehung der krystallinischen Schiefer erhellt von selbst: Gerölle sind nur in Sedimenten oder als Einschlüsse in Eruptivgesteinen möglich, und ein Eruptivgestein liegt sicher nicht vor.

Ich habe die Fundstätte von Obermittweida unter der freundlichen Führung von Dr. Sauer besucht, die weniger ausgezeichnete, in demselben Gestein, aber etwas tiefer liegende Fundstätte von Crottendorf nicht gesehen. Nach Dr. Sauer steht dort geröllfreier Gneiss in unmittelbarster Nachbarschaft von geröllführendem Gneiss an.

Nach den früher von Oberbergrath H. Credner der hiesigen Sammlung mitgetheilten Gesteinsproben der geröllführenden Gneisse liess sich als möglich annehmen, dass nicht Gneisse mit Geröllen, sondern Granite mit Einschlüssen vorlägen, und ich ging nach Obermittweida in der Hoffnung, dass dem so sei. Allein davon ist keine Rede. Bis auf die geringen, durch die Steinbruchsarbeiten bewirkten Änderungen ist das von Dr. Sauer 1879 gegebene Profil noch heute genau und der von ihm gegebenen kartographischen Darstellung nichts hinzuzufügen. Die Gesteine, welche die sogenannten Gerölle führen, gehören der concordant auf Gneiss lagernden Glimmerschieferformation an, wie Streichen und Fallen, Lagerung und Gesteinsverband zeigen. Das ganze Gebiet, so weit es hier in Betracht kommt, zeigt die grösste Regel-

[1] Vergl. auch H. Credner. Zeitschrift der geologisch. Gesellschaft. 32. 204. 1880.

mässigkeit der Lagerung, ein Streichen von NW, nach SO und ein Einfallen nach SW mit etwa 15 — 25°, nirgend steile Stellung, nirgend Verwerfungen oder Unregelmässigkeiten, geschweige Überkippungen.

Die Hauptmasse des Glimmerschiefers, welcher neben hellfarbigem Kaliglimmer wechselnde Mengen von dunklem Magnesiaglimmer und Quarz enthält, führt fast überall Feldspath und Granat, letzteren oft nur mikroskopisch. Er ist flaserig durch Quarzlinsen, bei Zunahme des Quarzes und bei gleichmässigerer Vertheilung von Glimmer und Quarz körnigflaserig bis fast ebenschieferig. Der in Körnchen oder Leisten auftretende Feldspath schliesst Quarzkörnchen, Glimmerblättchen, Granaten und mikroskopischen Rutil ein; der hellfarbige Glimmer Turmalin, Granat, selten Rutil, Titanit und Eisenglanz. Hie und da sieht man einzelne Glimmerblättchen quer zur Schieferung gestellt.

Von conform eingelagerten Gesteinen sieht man ausser sparsamen Quarzschiefern, Hornblendegesteinen, Kalksteinen, und hier wesentlich in Betracht kommend, Gesteine von gneissähnlichem Habitus, die hier Gneisse heissen mögen, obwohl die Bezeichnung feldspathführender Glimmerschiefer richtiger wäre. Die sächsische Aufnahme nennt sie Gneissglimmerschiefer oder Gneisse der Glimmerschieferformation.

Diese sehr mannigfach ausgebildeten Gneisse, welche in den sparsamen feinkörnigen Abänderungen viel Plagioklas enthalten, sind NO und SW von Obermittweida vorzugsweise kleinflaserig. Die Glimmerflasern umschliessen kleine, etwa erbsengrosse Linsen eines feinkörnigen Gemenges von Feldspath und Quarz, selten bestehen die Linsen nur aus feinkörnigem Quarz oder nur aus feinkörnigem Orthoklas. Kali- und Magnesiaglimmer sind in dem Gestein in etwa gleicher Menge vorhanden; auf den Schieferungsflächen liegen häufig Nadeln von schwarzem Turmalin und winzige Granaten, mikroskopisch sieht man Apatit, Rutil und opake Eisenerze, Magneteisen, Eisenglanz und Eisenkies. Hie und da sind einzelne Glimmerblättchen quer zur Schieferung gestellt. Man sieht die nahe Verwandtschaft zwischen dem normalen Glimmerschiefer und dem Gneiss: die Zunahme des Feldspathes bildet den Hauptunterschied.

In diesen Gneissen sind am Abhang des linken Ufers der Mittweida oberhalb des früheren Hammerwerkes von Obermittweida in etwa 25^{m} Mächtigkeit die geröllführenden Schiefer durch Steinbruchsarbeiten aufgeschlossen. Sie finden sich auch auf dem rechten Ufer der Mittweida und werden im Hangenden und Liegenden von dem normalen kleinflaserigen Gneiss begrenzt.

Das Profil zeigt die Gerölle nicht überall in gleicher Menge, ferner Gerölle von sehr verschiedener Zusammensetzung unmittelbar neben einander, die einzelnen Gerölle mit sehr verschiedener Form

und Grösse. Die Formen sind rundlich, elliptisch, langgezogen, trapezoedrisch, schmal lancettförmig, bisweilen mit einzelnen unregelmässig vorspringenden Partieen versehen, und zwar treten bei derselben mineralogischen Zusammensetzung alle diese Formen auf. Die Grösse wechselt von einem Durchmesser über 30^{em} bis zu dem von kaum einigen Millimetern. Ungleich grosse und ungleich geformte Gerölle liegen oft so hart aneinander, dass man nur mit Mühe die Scheidung durch zwischenliegende Gesteinsmasse erkennt. Wie auch Beschaffenheit und Grösse sein mag, an den langgestreckten, schmalen, flach linsenförmig im Querschnitt erscheinenden Geröllen sieht man eine vorzugsweise regelmässige Einlagerung in die Schieferungsebenen, welche von den rundlichen grösseren Geröllen unter beliebigem Winkel durchschnitten werden. Die Vertheilung der Gerölle muss nach Menge, Grösse, Lage und mineralogischer Zusammensetzung als eine höchst unregelmässige bezeichnet werden.

Ebensowenig ist die Beschaffenheit des Gneisses in dem Profil überall dieselbe. Im obersten Theil desselben zeigt der normale kleinflaserige Gneiss kleine Gerölle, in etwas tieferen Theilen sieht man sie vereinzelt. Noch etwas tiefer wechselt die Beschaffenheit des Gneisses sehr stark; er wird feinkörniger und dunkelfarbiger durch Zurücktreten des Kaliglimmers und des Feldspathes unter Zunahme des Magnesiaglimmers und des Quarzes. Diese beiden Gemengtheile sondern sich in dem deutlich schieferigen Gestein, so dass breitere und längere Lagen von Glimmer und kürzere, der Schieferung parallele Lagen von weissem körnigen Quarz auftreten; die Zahl der Gerölle nimmt zu, bisweilen so sehr, dass sie gegen die Gesteinsmasse überwiegen, welche man petrographisch als etwas Feldspath führenden Glimmerschiefer bezeichnen muss. In anderen Partieen sieht man in dem körnigen, kaum noch schieferigen, nur überwiegenden Quarz und etwas Magnesiaglimmer bestehenden Gestein neben zahlreichen scharf begrenzten Geröllen unbestimmt begrenzte Flecke, die namentlich bei Benetzung durch die verschiedene Färbung hervortreten; an manchen Stellen sind die Gerölle sehr sparsam und das Gestein wird reicher an Feldspathen. Etwas tiefer am Abhang folgen wieder die deutlich geschichteten, geröllführenden Gesteine. Weiter nach Südwesten findet sich das normale kleinflaserige Gneiss und endlich tritt mit dem gewöhnlichen Übergangsgestein der helle Muscovitschiefer auf, in welchem der Gneiss und seine geröllführende Modification eine conforme Einlagerung bildet. Sicher ist diese nicht eine arkoseähnliche Bildung, sondern durch Übergang mit dem Gneiss verbunden. Die Mineralien, welche die sogenannten Gerölle zusammensetzen, sind die des Gneisses: vorzugsweise Quarz, Magnesiaglimmer, Orthoklas, sparsam Plagioklas

und Kaliglimmer. Sauer fand noch mikroskopisch Turmalin, Apatit, Eisenerze. Es ist hervorzuheben, dass Kaliglimmer in den Geröllen ebenso sparsam ist als in dem umschliessenden Gneiss, im Gegensatz zu dem normalen kleinflaserigen Gneiss, in welchem, wie angeführt, der Kaliglimmer dem Magnesiaglimmer an Menge fasst gleichkommt.

Das Gestein, welches die sogenannten Gerölle enthält, ist eine an Kaliglimmer höchst arme Modification des Gneisses.

Trotz dieser Einfachheit wechselt petrographisch der Habitus der Gerölle sehr stark. Eine Reihe derselben wird nur von feinkörnigem, weissem bis graulichweissem Quarz gebildet, dem auch wohl einige Schüppchen von Magnesia- oder Kaliglimmer regellos beigemengt sind. Einzeln treten in dem feinkörnigen Quarz grössere, unregelmässig begrenzte, wasserhelle Quarzkörner auf oder einige Linien breite Trümer von durchsichtigem, weil etwas grobkörnigerem Quarz durchziehen unregelmässig das Ganze. Eine zweite Reihe beginnt mit ganz feinkörnigen, weissen Feldspathlinsen, in denen hie und da grössere unbestimmt begrenzte wasserhelle Quarzkörner auftreten. Häufiger liegen in dem fein- bis mittelkörnigen Gemenge, das aus ungleichen Mengen weissen Feldspathes und Quarz besteht, ungleich lange Biotitflasern, einzelne grössere, unregelmässig begrenzte Quarzkörner, einzelne grössere Orthoklase, sparsam Plagioklase, sparsamst kleine Blättchen von Kaliglimmer. Die meisten Vorkommen dieser Reihe würde man petrographisch als Gneiss, einige als Granulit bezeichnen. Bei einer dritten Reihe liegen in den fein- bis mittelkörnigen Massen, deren Hauptgemengtheile Orthoklas, Quarz und Biotit sind, sparsam grössere Orthoklase, noch sparsamer Plagioklase und kleine unregelmässig vertheilte Anhäufungen von Biotit. Sauer fand mikroskopisch noch Turmalin und Apatit. Man kann diese Gesteine petrographisch mit Granit vergleichen. Eine vierte Reihe zeigt in dichter, graulichweisser, aus Feldspath und Quarz bestehender Grundmasse bis erbsengrosse, durch Flüssigkeitseinschlüsse bläulich getrübte Quarze mit dihexaëdrischen Umrissen, grössere Orthoklase, kleinere Plagioklase, nach Sauer auch Mikroklin. Der Glimmer fehlt entweder fast ganz oder ist zu unregelmässig vertheilten Aggregaten angehäuft. Mikroskopisch fand Sauer noch Turmalin und Apatit. Man kann diese Massen petrographisch der Porphyrfacies der Granite vergleichen. Ausserdem finden sich in der Gesteinsmasse des Gneisses neben und zwischen den sogenannten Geröllen Anhäufungen von Magnesiaglimmer mit eckiger Begrenzung und einzelne unbestimmt begrenzte, wasserhelle Quarzkörner.

Es treten also die beiden Hauptgemengtheile des Gneisses, Quarz und Glimmer, sowohl für sich als mit dem dritten Gemengtheil Orthoklas verbunden auf und zwar in Combinationen, welche es einem im

Banne der metamorphischen Theorie stehenden Beobachter als sicher erscheinen lassen, dass er Gerölle von Quarzit, Gneiss, Granit und porphyrischem Granit vor sich habe. Die Anhäufungen von Biotit und die einzelnen Quarzkörner bleiben bei dieser Anschauung ausser Betracht.

Die Begrenzung der Ausscheidungen, denn als solche müssen die sogenannten Gerölle bezeichnet werden, gegen die Umgebung ist zwar gewöhnlich scharf und im Querschnitt durch eine feine Glimmerlinie bezeichnet, aber häufig ist der Übergang ein ganz allmählicher und bisweilen allmählich nur an einem Theil des Randes. Bei den sogenannten Gneiss- und Granitgeröllen greifen in den im Querschnitt ausgezackt erscheinenden Rand schmale Glimmerlagen der Gesteinsumgebung weit hinein, bei den sogenannten Quarzitgeröllen die Gesteinsmasse, so dass die Ausscheidung zur Hälfte getheilt erscheint; bei den porphyrartigem Granit ähnlichen Ausscheidungen sieht man ein breitzahniges wiederholtes Eingreifen der Gesteinsmasse; bei sonst feinkörnigen Quarz-Ausscheidungen bilden grössere Quarzkörner einen Theil des Randes. Bei genauer Untersuchung erkennt man in dem Gestein neben den durch Begrenzung und Farbe hervortretenden Ausscheidungen zahlreiche, ganz verschieden grosse und ganz unbestimmt begrenzte Partieen, deren Korn nur um ein Geringes gröber oder feiner ist als das der Umgebung. Namentlich bei Benetzung sind sie scharf erkennbar und von ihnen führt eine stetige Reihe zu den scharf begrenzten und mineralogisch verschiedenen sogenannten Geröllen. Ein glücklich geführter Schlag löst, ähnlich wie die Verwitterung, manche der geröllähnlichen Ausscheidungen aus dem Gestein, in dessen Schutt man sie lose findet. Ihre Oberfläche trägt eine dünne Hülle von Magnesiaglimmer, dessen zweite Hälfte im Gestein zurückbleibt. Meist ist jedoch der Zusammenhalt zwischen Gestein und Ausscheidung so fest, dass beim Zerschlagen beide verbunden bleiben. Wo man die Glimmerhüllen künstlich entfernt, zeigt die Oberfläche der Ausscheidungen eine fein runzlige, keineswegs glatte Beschaffenheit, niemals eine solche, wie sie Geröllen zukommt. Bedeutsamer ist noch, dass in den rundlichen Ausscheidungen nicht selten concentrische Glimmerlagen vorhanden sind, welche der Glimmerhülle entsprechen.

Alle diese Erscheinungen: die wechselnde äussere Form, die an derselben Ausscheidung wechselnde Art der Begrenzung, das Eindringen von Glimmerlagen und Gesteinsmasse in die Ausscheidungen, die Beschaffenheit der Oberfläche, die im Innern wiederholte Glimmerhülle in sogenannten Granitgeröllen lassen die Auffassung der Ausscheidungen als Gerölle nicht zu, und die dafür angeführten Gründe sind nicht stichhaltig.

Wo die Form der Ausscheidungen flachrundlich erscheint, hat man die gewöhnliche Gestalt der linsenförmigen Ausscheidung in flaserigen Gesteinen vor sich; bisweilen sieht man hervorspringende Kanten. Sie sind meist der Schieferungsebene parallel eingelagert, grössere Ausscheidungen durchschneiden diese unter irgend welchem Winkel. Dieselben Formen zeigen die Ausscheidungen bei der gleichmässig körnigen, kaum schieferigen Gesteinsausbildung.

Wenn das plötzliche Abschneiden der Quarzkörner an der Grenze von Ausscheidung und Gestein als Beweis für die Gerölltheorie angeführt wird, so ist darauf zu entgegnen, dass ebensolche Quarzkörner das Gestein da durchziehen, wo keine Ausscheidungen vorliegen, und ebenso plötzlich abschneiden. Man sieht sie unmittelbar am Rande einer grobkörnigen Ausscheidung hinlaufen und jenseit beider Ränder aufhören. Sieht man in den fraglichen Bildungen die ersten Ausscheidungen bei der Erstarrung, so ist ungleiche mineralogische Beschaffenheit der Ausscheidungen und ungleiches Korn vollständig begreiflich, da man einzelne grössere Quarzkörner im Gestein findet. Bei den ganz ähnlichen Ausscheidungen der Augengranulite, in denen rundliche bis hühnereigrosse Feldspathkörner, häufig mit Quarz, bisweilen auch mit Biotitblättchen durchwachsen[1], oder Aggregate von Quarz, Feldspath und Magnesiaglimmer vorkommen, bezweifelt Niemand die gleichzeitige Bildung von Ausscheidung und Gestein. Vollständiges Verlorengehen der Schichtung in einzelnen Lagen, so dass man ein Massengestein vor sich zu haben glaubt, wiederholt sich bei den Glimmergranuliten[2] und ist bei dem dichten Muscovitgneiss (dem früher als Glimmertrapp von Metzdorf bezeichneten Gestein) von Sauer[3] beobachtet. In diesem Gestein, »einer Anomalie des Gneisses«[4] nach Naumann's Ausdruck, die linsenförmig in normalem Gneiss auftritt, liegen nach Sauer bis taubeneigrosse Ansammlungen von körnigem fettglänzendem Quarz, die durchaus fremden Einschlüssen gleichen. Ferner liegen kugelige bis elliptische, bis wallnussgrosse Bildungen bisweilen so häufig in dem Gestein, dass eine conglomeratähnliche Structur erzeugt wird. Die Erscheinungen der Obermittweidaer Gesteine wiederholen sich also im Erzgebirge an mehreren Punkten, sie finden sich nach Mittheilung von Dr. Sauer in der südlichen Section Kupferberg wieder.

Ist, wie ich annehme, die Schieferung der krystallinischen Schiefer Wirkung des Druckes, welchen die nicht vollständig erstarrten, sicher

---

[1] Lehmann Section Mittweida 1879. Lehmann und Siegert Sect. Hohenstein 1879. 10. Lehmann und Mietsch Sect. Glauchau 1878. 9.

[2] Sect. Hohenstein 1879. 10.

[3] Sect. Schellenberg-Flöha 1881. 19.

[4] Erläuterungen II. 96.

noch plastischen Gesteine erfuhren, so konnte der Druck ausreichen, um kleinere Ausscheidungen parallel zu ordnen, so dass flaserige Gesteine entstanden, während grössere Ausscheidungen die Schieferungsebenen durchschneiden, wie man an Augengranuliten sieht. Dazu kommt, dass die Erstarrung sehr ungleich weit fortgeschritten sein konnte, als die Schieferung eintrat. Die Thatsache, dass Eklogite, sogenannte Flasergabbro, Hornblendegneisse, die oben angeführten Glimmertrappe und andere Gesteine der krystallinischen Schiefer nicht schiefern und dabei fast stets linsenförmig in schieferigen Gesteinen auftreten, zeigt, dass in gewissem Sinne die Schieferung von der Gesteinsbeschaffenheit abhängt.

Waren in dem Gestein von Obermittweida einzelne krystalline Ausscheidungen erfolgt und der Rest des Gesteins noch plastisch genug, um dem Druck, der die Schieferung hervorbrachte, nachzugeben, so erklären sich die Erscheinungen. Ein Grund, weshalb einzelne Partieen einer »Gneissmasse« sich so abweichend von den übrigen verhalten, lässt sich nicht angeben, aber die Wiederholung derselben Bildungen zeigt etwas Gesetzmässiges. In Schweden kommen dieselben sogenannten Conglomerate im »Gneiss« südlich von Rödja, Kirchspiel Sandsjö, Småland, nach den mir von der schwedischen Landesuntersuchung mitgetheilten Handstücken vor, und auch hier sieht man bei Benetzung dieselben unbestimmt begrenzten Partieen wie im Gestein von Obermittweida. Von den sonst noch angeführten Geröllen aus Gneissen kenne ich keine aus eigener Anschauung. Die Schwierigkeit, Ausscheidung und Einschluss zu unterscheiden, welche hier vorliegt, wiederholt sich bei den plutonischen Gesteinen überhaupt, wie die bekannten Olivinausscheidungen der Basalte beweisen.

Endlich mag noch bemerkt werden, dass einzelne Ausscheidungen des Obermittweidaer Gneisses Brüche und Verschiebungen der einzelnen Theile zeigen, so dass am Rande ein- und ausspringende Winkel entstehen. Ob diese Brüche erst später in dem vollständig erstarrten Gestein eintraten oder gleichzeitig mit der Bildung der Schieferung, lässt sich nicht ersehen. Becke fand die Feldspathaugen des Augengneisses im niederösterreichischen Waldviertel zersprungen (Wiener Akad. Ber. 84, 559, 1881) und durch Quarz und Muscovit wieder verkittet. Dass diese Mineralien durch neptunischen Absatz in die Brüche gelangt sind, ist nicht zu bezweifeln.

31. Über die Vorkommen der Küste Labrador.

Von J. Roth.

(Vorgelegt am 18. Januar: — gedruckt im Bericht vom 14. Juni [St. XXVIII]: — ausgegeben am 21. Juni.)

Die Angabe über die geologischen Verhältnisse der Küste Labrador beschränken sich, von Sedimenten abgesehen, soweit ich habe ermitteln können, auf Folgendes. In Petermann's geographischen Mittheilungen 1861. 216 (mit geologischer Karte), berichtet O. Lieber, dass Gneiss und Granit fast allein die Küste Labrador zusammensetzen. Zwischen den oft Granat und Hornblende führenden, grauen Gneiss der Nordküste und den röthlichen Orthoklas, weniger oft Hornblende führenden Gneiss der Südküste schiebt sich der sehr grobkörnige, Hornblende führende Granit von Nain ein, in welchem röthlicher Orthoklas der hauptsächlichste Feldspath zu sein scheint. Dieser Granit führt den »Labradorit«, dessen Hauptfundort, ein Binnensee westlich von Nain, von Lieber nicht besucht wurde. Levin Th. Reichel nennt (A. a. O. 1863. 122, mit topographischer Karte) die Bai Nunaengoak, welche das Festland von Labrador bei Nain nach Norden begrenzt, an sogenanntem »Labradorstein« reich. Östlich des Festlandes liegt die kleine Paulsinsel (Tunnulersoak), über deren Beschaffenheit nichts Weiteres erwähnt wird.

Während Labrador und Hypersthen isolirt, oft als Rollstücke und für die Grobkörnigkeit des Gesteins sprechend, als von der Paulsinsel stammend in den Sammlungen sich finden, sind Gesteinsproben, welche diese beiden Hauptgemengtheile neben einander enthalten, viel sparsamer. Von den in der hiesigen Sammlung befindlichen Stücken zeigt eines neben dem Labrador wenig scharf abgegrenzt ein pegmatitähnliches Gestein, in welchem neben röthlichem Orthoklas Quarzkörner und Titaneisen sichtbar sind; ein zweites Stück zeigt neben Labrador vollständig scharf abgegrenzt ein dichtes grünlichschwarzes Gestein, in welchem man mit der Loupe wenige kleine Plagioklase und etwas Titaneisen erkennt. Die Grundmasse besteht u. d. M. aus vorwiegenden Plagioklasleisten, zwischen welchen Augit, Magnet- und Titaneisen liegt. Der schlecht begrenzte, hellgrünlich gelbe, zum Theil faserige Augit ist vielleicht rhombisch. In der Grundmasse liegen ziemlich reichlich grössere wasserhelle Plagioklas-Zwillinge eingesprengt. Das

Gestein ist ein Diabas, vielleicht ein Norit. Es lässt sich nicht ersehen, ob der Diabas das durchbrechende oder das durchbrochene Gestein ist. Ich neige zu der ersteren Annahme und halte den Hypersthenit als zu den krystallinischen Schiefern gehörig, da ähnliche Gesteine in diesen oft genug beobachtet sind. Dahin gehören auch die Anorthosite in Canada aus dem Laurentian-System, in welchen granat- und glimmerführende Lagen die Schieferung andeuten. Diese Gesteine enthalten neben Labrador Hypersthen und Titaneisen. Nach Logan (Geological survey of Canada 1863. 66) treten sie auch an der Westküste von Newfoundland und an den Seven Islands nahe der Mündung des St. Lawrence auf. Diese grosse Verbreitung ist eine Stütze für die oben ausgesprochene Ansicht. Das pegmatitische Gestein ist wohl eine Ausscheidung im Gneiss und das von Lieber als Granit bezeichnete Gestein wahrscheinlich nur ein wenigschieferiger, grobkörniger Gneiss, der demnach von Diabas (Norit?) durchbrochen wird.

32. Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen.

Von L. KRONECKER.

(Vorgelegt am 7. Juni; — gedruckt im Bericht vom 21. Juni [St. XXX]; — ausgegeben am 28. Juni.)

I.

In seinem ersten, die Theorie der elliptischen Functionen behandelnden Aufsatz[1] leitet ABEL die Multiplicationsformeln aus dem Additionstheorem in einer Weise her, welche sich bei Anwendung der JACOBIschen Bezeichnungen folgendermaassen darstellen lässt.

Die aus dem Additionstheorem:

$$\text{(A)}\quad \sin\mathrm{am}(a+b) = \frac{\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,b\,\Delta\mathrm{am}\,b + \sin\mathrm{am}\,b\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,b}$$

hervorgehenden Formeln:

$$\sin\mathrm{am}(a+b) - \sin\mathrm{am}(a-b) = \frac{2\sin\mathrm{am}\,b\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,b}$$

$$\text{(A')}\quad \cos\mathrm{am}(a+b) + \cos\mathrm{am}(a-b) = \frac{2\cos\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,b}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,b}$$

$$\Delta\mathrm{am}(a+b) + \Delta\mathrm{am}(a-b) = \frac{2\Delta\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,b}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,b}$$

zeigen unmittelbar, indem man darin der Reihe nach $b = a, 2a, 3a, \ldots$ setzt, dass sich für jede grade Zahl n:

$$\text{(B)}\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,na}{\sin\mathrm{am}\,a}\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\,\mathrm{am}\,a,\ \cos\mathrm{am}\,na,\ \Delta\,\mathrm{am}\,na$$

und für jede ungrade Zahl n:

$$\text{(B')}\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,na}{\sin\mathrm{am}\,a},\ \frac{\cos\mathrm{am}\,na}{\cos\mathrm{am}\,a},\ \frac{\Delta\mathrm{am}\,na}{\Delta\mathrm{am}\,a}$$

als rationale gebrochene Functionen von $\sin^2\mathrm{am}\,a$ darstellen lassen.[2]

[1] Recherches sur les fonctions elliptiques. Journal für Mathematik Bd. II. S. 101 und Oeuvres complètes de NIELS HENRIK ABEL, nouvelle édition, 1881, tome I, p. 263.

[2] *Anmerkung.* Der Zähler der rationalen Function, welche den ersten der drei Ausdrücke (B) darstellt, enthält den Ausdruck $(1 - \sin^2\mathrm{am}\,a)(1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,a)$ als Factor.

Diese erscheinen aber dabei nicht in reducirter Form, sondern Zähler und Nenner der Multiplicationsformeln erhalten bei dieser inductiven Herleitung aus dem Additionstheorem gemeinschaftliche Factoren und werden demgemäss von zu hohem Grade. Dass aber der Grad von Zähler und Nenner der reducirten gebrochenen Functionen von $\sin^2 \operatorname{am} a$ in den drei mit (B) bezeichneten Ausdrücken genau gleich $\frac{1}{2}n^2$ und in den drei mit (B′) bezeichneten Ausdrücken genau gleich $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$ ist, kann im Anschluss an die Deduction Abel's in einer Weise dargethan werden, welche der Kürze halber hier nur für die beiden auf $\sin \operatorname{am} na$ bezüglichen Ausdrücke entwickelt werden soll.

Gemäss der inductiven Herleitung der Multiplicationsformeln aus dem Additionstheorem, kann für grade Zahlen n:

$$\sin \operatorname{am} na \cdot G(\sin^2 \operatorname{am} a) = \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a \cdot F(\sin^2 \operatorname{am} a)$$

und für ungrade Zahlen n:

$$\sin \operatorname{am} na \cdot G_1(\sin^2 \operatorname{am} a) = \sin \operatorname{am} a \cdot F_1(\sin^2 \operatorname{am} a)$$

gesetzt werden, wo $F(x)$, $F_1(x)$, $G(x)$, $G_1(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, deren Coefficienten rationale Functionen von k sind. Dabei kann angenommen werden, dass weder $F(x)$ und $G(x)$ noch $x(1-x)(1-k^2x)$ und $G(x)$ noch auch $xF_1(x)$ und $G_1(x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Alsdann sind offenbar, wenn x und y unbestimmte oder variable Grössen bedeuten, die beiden ganzen Functionen von x, y:

$$x(1-x)(1-k^2x)F^2(x) - yG^2(x), \quad xF_1^2(x) - yG_1^2(x)$$

irreductibel, in dem Sinne, dass sie keine Factoren haben können, welche ganze rationale Functionen von x und y wären, auch wenn in deren Coefficienten Irrationalitäten zugelassen würden. Denn beide Functionen sind in Beziehung auf y nur linear, und einen von y unabhängigen Theiler können sie nicht haben, da der Voraussetzung nach weder $x(1-x)(1-k^2x)F^2(x)$ und $G^2(x)$, noch $xF_1^2(x)$ und $G_1^2(x)$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben können. Die beiden Gleichungen

$$x(1-x)(1-k^2x)F^2(x) = yG^2(x), \quad xF_1^2(x) = yG_1^2(x)$$

können nun, da sie irreductibel sind, nicht gleiche Wurzeln x haben, und ihr Grad ist daher gleich der Anzahl der verschiedenen Werthe von x, welche einem und demselben Werthe von y entsprechen, d. h. gleich der Anzahl derjenigen Werthe $a', a'', \ldots$, wofür

$$\sin^2 \operatorname{am} na, \ \sin^2 \operatorname{am} na', \ \sin^2 \operatorname{am} na'',$$

einander gleich und

$$\sin^2 \operatorname{am} a, \ \sin^2 \operatorname{am} a', \ \sin^2 \operatorname{am} a'', \ldots.$$

unter einander verschieden sind. Hieraus ergiebt sich, dass der Grad beider Gleichungen in x gleich n^2 ist, und dass also die Grade von

$$F(x) \ , \ G(x) \ , \quad F_1(x) \quad , \quad G_1(x)$$

beziehungsweise: $\frac{1}{2}n^2 - 2$, n^2 , $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$, $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$
sein müssen.

Die hier entwickelte Bestimmung des Grades von Zähler und Nenner der Multiplicationsformeln beruht recht eigentlich, wie auch bei ABEL deutlich hervortritt, auf der Ermittelung der sämmtlichen Wurzeln der transcendenten Gleichung $\sin\mathrm{am}\, u = 0$, d. h. also auf dem Nachweise, dass erstens für alle ganzen Zahlen m, m':

$$\sin\mathrm{am}\,(2mK + 2m'K'i) = 0$$

wird, und dass zweitens $\sin\mathrm{am}\, u$ nur für die Werthe:

$$u = 2mK + 2m'K'i$$

verschwindet. Das Letztere folgt, wie ABEL zeigt, mit Hülfe des Additionstheorems unmittelbar aus dem Ersteren, wenn der Modul k reell und kleiner als Eins vorausgesetzt wird. Diese Voraussetzung thut aber der Allgemeinheit jener Gradbestimmung von Zähler und Nenner der Multiplicationsformeln keinen Eintrag, da der Grad, auf welchen Zähler und Nenner der reducirten Multiplicationsformeln für jene beschränkten Werthe von k steigt, offenbar für jeden Werth von k derselbe bleiben muss. Es zeigt sich daher, dass die ABEL'sche Deduction überhaupt nur die unmittelbar aus der Definition:

$$a = \int_0^{\sin\mathrm{am}\, a} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

hervorgehenden Eigenschaften von $\sin\mathrm{am}\, a$ zu Hülfe nimmt, um die reducirte Form der rein algebraisch durch wiederholte Anwendung des Additionstheorems entstehenden Multiplicationsformeln zu ermitteln.

Als ich dies neulich in meinen Universitäts-Vorlesungen auseinandersetzte, fügte ich hinzu, dass es wohl wünschenswerth erscheine, die Herleitung der reducirten Multiplicationsformeln aus dem Additionstheorem von jeder Zuhülfenahme der analytischen Eigenschaften der elliptischen Functionen frei zu machen. Einer meiner Zuhörer, Hr. Dr. C. RUNGE fand sich dadurch angeregt, sich mit dem Gegenstande zu beschäftigen und theilte mir schon nach einigen Tagen als Resultat seiner Bemühungen eine rein algebraische Herleitung der reducirten Multiplicationsformel für $\cos\mathrm{am}$ mit, welche nächstens in dem von Hrn. WEIERSTRASS und mir redigirten Journal für Mathematik abgedruckt werden wird. Um mir nun die Ursache des Erfolges der von Hrn. RUNGE

angewendeten Methode völlig klar zu machen, suchte ich den eigentlichen Grund der Schwierigkeit zu erforschen, welcher bei ABEL der rein algebraischen Durchführung seiner Herleitung der Multiplication aus dem Additionstheorem, d. h. der rein algebraischen Herleitung der reducirten Multiplicationsformeln entgegensteht. Ich fand diesen Grund, indem ich auf die in meiner »*arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*«[1] entwickelten Principien zurückging, sehr bald darin, dass im Additionstheorem selbst Zähler und Nenner des Ausdrucks für $\sin \operatorname{am}(a+b)$, wenn man dieselben als *ganze* Grössen des aus den Elementen:

$$\sin \operatorname{am} a\,,\quad \cos \operatorname{am} a \cdot \Delta \operatorname{am} a\,,\quad \sin \operatorname{am} b\,,\quad \cos \operatorname{am} b \cdot \Delta \operatorname{am} b$$

gebildeten Rationalitäts-Bereichs auffasst, einen gemeinschaftlichen Theiler, in dem a. a. O. dargelegten Sinne, haben. Dieser Theiler lässt sich durch die jenem Gattungs-Bereich *associirten Formen*[2] wirklich darstellen, und es bewährt sich also hier die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen und namentlich die darin entwickelte Association algebraischer Formen, indem dadurch das Additionstheorem der elliptischen Functionen rein algebraisch in reducirter Form dargestellt und damit eine neue Einsicht in die Natur des so vielfach behandelten Theorems erlangt wird. Nimmt man diese reducirte Form des Ausdrucks für $\sin \operatorname{am}(a+b)$ zum Ausgangspunkt, so gelangt man, indem man der Reihe nach $b = a\,,\ 2a\,,\ 3a\,,\ \ldots$ annimmt, unmittelbar und in rein algebraischer Weise zu der reducirten Form des Ausdrucks für $\sin \operatorname{am} na$ d. h. zu der reducirten Multiplicationsformel.

II.

Es soll nun zuvörderst der gemeinsame Theiler ermittelt werden, mit welchem Zähler und Nenner der Multiplicationsformel bei der ABEL'schen Herleitung behaftet sind.

Bezeichnet man die Ableitung von $\sin \operatorname{am} a$ mit $\sin' \operatorname{am} a$, so dass

$$\sin' \operatorname{am} a = \cos \operatorname{am} a \cdot \Delta \operatorname{am} a$$

ist, so erhält das Additionstheorem die Form:

$$(\mathrm{A}^\circ)\quad \sin \operatorname{am}(a+b) = \frac{\sin \operatorname{am} a \sin' \operatorname{am} b + \sin \operatorname{am} b \sin' \operatorname{am} a}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} b}$$

[1] Journal für Mathematik, Bd. 92, S. 1. (Festschrift zu Hrn. KUMMER's Doctor-Jubiläum).

[2] A. a. O. §. 22. S. 84 und 93.

und geht mit Benutzung der Relation:

$$k \sin \mathrm{am}\, b \sin \mathrm{am}\,(b + K'i) = 1$$

über in:

$$(\mathrm{A}'') \quad k \sin \mathrm{am}\,(a+b) = \frac{\sin \mathrm{am}\, a \sin' \mathrm{am}\,(b+K'i) - \sin' \mathrm{am}\, a \sin \mathrm{am}\,(b+K'i)}{\sin^2 \mathrm{am}\, a - \sin^2 \mathrm{am}\,(b+K'i)}.$$

In dieser Form wird es evident, dass Zähler und Nenner des Ausdrucks für $\sin \mathrm{am}\,(a+b)$ verschwinden, wenn $\sin \mathrm{am}\, a = \sin \mathrm{am}\,(b + K'i)$ ist, dass also, wenn man $a = rv$, $b = sv$ und für r, s ganze Zahlen nimmt, der aus (A°) hervorgehende Ausdruck für $\sin \mathrm{am}\,(r + s)\, v$ im Zähler und Nenner alle verschiedenen Factoren

$$\sin \mathrm{am}\, v - \sin \mathrm{am}\, v_h \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots)$$

enthalten muss, welche durch die Gleichung:

$$\sin \mathrm{am}\, rv_h = \sin \mathrm{am}\,(sv_h + K'i)$$

definirt werden.

Um nun zu zeigen, dass die rationalen Functionen von $\sin^2 \mathrm{am}\, v$, durch welche sich, je nachdem n grade oder ungrade ist, die oben unter (B) und (B′) aufgestellten Ausdrücke:

$$(\mathrm{B}'') \qquad \frac{\sin \mathrm{am}\, nv \cdot \sin' \mathrm{am}\, v}{\sin \mathrm{am}\, v}, \quad \frac{\sin \mathrm{am}\, nv}{\sin \mathrm{am}\, v}$$

darstellen lassen, in ihrer reducirten Form im Zähler und Nenner von den Graden

$$\tfrac{1}{2}n^2 \quad , \quad \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)$$

sind, braucht man dies nur für alle Zahlen vorauszusetzen, die kleiner als eine gegebene Zahl n sind. Nimmt man alsdann für r und s irgend zwei positive Zahlen, deren Summe gleich n ist, und denkt man sich die Ausdrücke (B″) erst mittels des Additionstheorems (A°) durch $\sin \mathrm{am}\, rv$, $\sin' \mathrm{am}\, rv$, $\sin \mathrm{am}\, sv$, $\sin' \mathrm{am}\, sv$, diese aber alsdann durch die der Voraussetzung nach schon reducirten Ausdrücke in $\sin \mathrm{am}\, v$, $\sin' \mathrm{am}\, v$ dargestellt, so erhält man rationale gebrochene Functionen von $\sin^2 \mathrm{am}\, v$, deren Zähler und Nenner, je nachdem $r + s$ grade oder ungrade ist, von den Graden:

$$r^2 + s^2 \text{ oder } r^2 + s^2 - 1$$

sind. Die Anzahl der verschiedenen Werthe von $\sin^2 \mathrm{am}\, v_h$, wofür:

$$\sin \mathrm{am}\, rv_h = \sin \mathrm{am}\,(sv_h + K'i)$$

wird, ist aber je nachdem $r + s$ grade oder ungrade ist, gleich:

$$\tfrac{1}{2}(r - s)^2 \text{ oder } \tfrac{1}{2}\left((r - s)^2 - 1\right);$$

der Grad im Zähler und Nenner der rationalen Functionen für die Ausdrücke (B″) muss sich also mindestens auf:

$$r^2 + s^2 - \tfrac{1}{2}(r-s)^2 \text{ oder } r^2 + s^2 - 1 - \tfrac{1}{2}\big((r-s)^2 - 1\big)$$

d. h. also, je nachdem $r + s$ grade oder ungrade ist, auf

$$\tfrac{1}{2}(r+s)^2 \text{ oder } \tfrac{1}{2}\big((r+s)^2 - 1\big)$$

reduciren. Dass aber keine weitere Reduction des Grades stattfinden kann, wird nunmehr in ähnlicher Weise wie bei ABEL daraus erschlossen, dass z. B. für ungrade Zahlen n die Anzahl der verschiedenen Werthe von $\sin^2 \operatorname{am} v$, wofür:

$$\frac{\sin \operatorname{am} nv}{\sin \operatorname{am} v}$$

gleich Null wird, genau gleich $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$ ist.

Die vorstehende Deduction zeigt, dass der überflüssige gemeinschaftliche Factor, welcher bei der auf das Additionstheorem (A°) gegründeten Bildung von $\sin \operatorname{am}(r+s)v$ aus $\sin \operatorname{am} rv$ und $\sin \operatorname{am} sv$ im Zähler und Nenner erscheint, nichts Anderes ist, als der Nenner in dem Ausdrucke für $\sin \operatorname{am}(r-s)v$, d. h. der Nenner der rationalen Function von $\sin^2 \operatorname{am} v$, in ihrer reducirten Form, durch welche, je nachdem $r - s$ grade oder ungrade ist,

$$\frac{\sin \operatorname{am}(r-s)v}{\sin \operatorname{am} v} \sin' \operatorname{am} v \text{ oder } \frac{\sin \operatorname{am}(r-s)v}{\sin \operatorname{am} v}$$

dargestellt wird. Dieser Nenner ist gleich Eins, wenn $r = s$ oder $r = s + 1$ ist, und die Bildung von $\sin \operatorname{am} nv$ aus $\sin \operatorname{am} rv$ und $\sin \operatorname{am} sv$ führt also, wenn $n = r + s$ und, je nachdem n grade oder ungrade ist, $r = s$ oder $r = s + 1$ angenommen wird, unmittelbar zur reducirten Multiplicationsformel. Eine solche Bildungsweise findet sich in Hrn. KÖNIGSBERGER's »*Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen*« (Theil II, S. 194); doch bedarf es zur Vervollständigung der dortigen Deduction, ebenso wie oben, des Nachweises, dass die aus derselben hervorgehende Multiplicationsformel wirklich in der reducirten Form ist, d. h. dass Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Theiler haben. Dieser Nachweis ist oben auf die Kenntniss der Wurzeln der Gleichung $\sin \operatorname{am} v = 0$ gegründet worden; derselbe kann für grade Zahlen n, also für $r = s$ rein algebraisch geführt werden, indem man die reducirte Form des Ausdrucks für $\sin \operatorname{am} \frac{1}{2} nv$ voraussetzt; ob aber für ungrade Zahlen n der Nachweis in ähnlicher Weise geführt werden kann, muss ich dahin gestellt sein lassen.

III.

Ebenso wie es JACOBI in einem seiner Aufsätze[1] bei Aufstellung der Transformations- und Multiplications-Formeln gethan hat, will ich auch bei Aufstellung der reducirten Form des Additionstheorems die Grösse $k + \frac{1}{k}$ an Stelle des Moduls k einführen. Wird demgemäss:

$$k + \frac{1}{k} = 4\mathfrak{M} - 2\,,$$

gesetzt, so ist der reciproke Werth von $\sqrt{\mathfrak{M}}$, nämlich $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, nichts Anderes als derjenige Werth des Moduls k, welcher bei einer Transformation zweiter Ordnung, und zwar bei der Verwandlung der JACOBI'schen Grösse q in $\sqrt{q}$ resultirt.[2] Die hier mit $\mathfrak{M}$ bezeichnete Grösse ist demnach selbst das Quadrat eines durch eine Transformation zweiter Ordnung aus k hervorgehenden Moduls, und deren Einführung erweist sich dadurch als naturgemäss.

Setzt man in der bei JACOBI üblichen Weise:

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$$

und bezeichnet das unendliche Product:

$$(1+qz)(1+q^3z^{-1})(1+q^5z)(1+q^7z^{-1})(1+q^9z)(1+q^{11}z^{-1})\ldots..$$

mit $P(z,q)$, so ist:[3]

$$\mathfrak{M} = \frac{P^{16}(1,\sqrt{q})\,P^8(-1,\sqrt{q})}{16\sqrt{q}}\,,$$

also, wenn man die Function $Q(z,q)$ durch die Gleichung:

$$2^{\frac{1}{6}}\,q^{\frac{1}{24}}\,z^{\frac{1}{4}}\,Q(z,q) = P(z,q)$$

definirt:

$$\mathfrak{M} = Q^{16}(1,\sqrt{q})\,Q^8(-1,\sqrt{q}).$$

Dabei ist:

$$\mathfrak{M} - 1 = Q^8(1,\sqrt{q})\,Q^{16}(-1,\sqrt{q})$$

und für $z = e^{\pi\vartheta i}$:

$$\sqrt{k}\,\sin\mathrm{am}\,(\vartheta K + K + \tfrac{1}{2}iK') = \frac{Q(z,\sqrt{q})}{Q(z^{-1},\sqrt{q})}\,.$$

---

[1] »Suite des notices sur les fonctions elliptiques.« Journal für Mathematik, Bd. IV, S. 185 und JACOBI's gesammelte Werke, Bd. I, S. 266.

[2] JACOBI's Fundamenta S. 92 und JACOBI's gesammelte Werke, Bd. I, S. 149.

[3] JACOBI's Fundamenta S. 89 und JACOBI's gesammelte Werke, Bd. I, S. 146.

Da es aber für die Aufstellung der reducirten Form des Additionstheorems wesentliche Vortheile bietet, die elliptische Function sin am, mit dem Factor $\frac{k\sqrt{k}}{4k'^2}$ versehen, einzuführen, so setze ich:

$$f(a) = \tfrac{1}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} + \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}-1}}\right)\sin\mathrm{am}\, a\,,$$

und diese Function $f(a)$ ist, wenn man in den obigen Formeln überall q an Stelle von $\sqrt{q}$ setzt, vollständig durch die Function $P(z,q)$ zu definiren. Wenn nämlich mit $P'(z,q)$ die nach z genommene Ableitung von $P(z,q)$ bezeichnet wird, so ist die Gleichung:

$$16\,Q^{12}(1,q)\,Q^{12}(-1,q)f(a) = \frac{Q(z,q)}{Q(z^{-1},q)}$$

durch den Werth:

$$a = \frac{1}{2iq}P'(-q^{-1},q)\,P^4(i,q)\,P^4(-i,q)\log(-qz)$$

erfüllt. Dann ist zugleich:

$$16f(a) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} + \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}-1}}\right)\sin\mathrm{am}(a,k)\,,$$

wenn die hier vorkommenden Grössen $\mathfrak{M}$ und k durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{M} = Q^{16}(1,q)\,Q^8(-1,q)\,,\quad \mathfrak{M}-1 = Q^8(1,q)\,Q^{16}(-1,q)$$

$$k - \frac{1}{k} = -4Q^{12}(1,q)\,Q^{12}(-1,q)$$

bestimmt werden. Diese Bestimmung von k resultirt unmittelbar aus der Formel No. 1 des §. 36 von Jacobi's *Fundamenta*, wenn darin q^2 für q gesetzt wird. Ich bemerke noch, dass

$$P'(-q^{-i},q) = q\prod_n(1-q^{4n})^2 \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

ist, und dass daher die Zurückführung des Products $P(z,q)$ auf Θ-Reihen durch die Formel:

$$\frac{P(z,q)}{P'(-q^{-1},q)} = \frac{\sum_n q^{2n^2-n}\,z^n}{\sum_n(-1)^{n-1}nq^{2n^2-2n+1}} \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

gegeben wird.

Es sei nun:

$$f(a) = \mathfrak{A}\,,\ f(b) = \mathfrak{B}\,,$$

$$1 - 2^9\,\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)(2\mathfrak{M}-1)\,\mathfrak{A}^2 + 2^{16}\mathfrak{M}^2(\mathfrak{M}-1)^2\mathfrak{A}^4 = \mathfrak{A}'^2\,,$$

$$1 - 2^9\,\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)(2\mathfrak{M}-1)\,\mathfrak{B}^2 + 2^{16}\mathfrak{M}^2(\mathfrak{M}-1)^2\mathfrak{B}^4 = \mathfrak{B}'^2\,,$$

$$1 - 2^{16}\mathfrak{M}^2(\mathfrak{M}-1)^2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 = F(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\,,\ \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 = G(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\,,$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}' + \mathfrak{A}'\mathfrak{B} = \Phi(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\,,\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{B} = \Psi(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\,.$$

Dann wird das Additionstheorem durch die Gleichung:

$$(C) \qquad f(a+b) = \frac{\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}$$

dargestellt, in welcher Φ und F »*ganze*« algebraische Grössen des aus den Elementen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}$ gebildeten Gattungs-Bereichs $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}]$ sind. Der gemeinsame Theiler dieser beiden Grössen Φ und F wird nach dem im §. 14 meiner Festschrift[1] dargelegten Princip durch den Bruch:

$$\frac{F + u\Phi}{\mathrm{Fm}(F + u\Phi)}$$

dargestellt, wo u eine Unbestimmte bedeutet und der Kürze halber F, Φ für $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), \Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gesetzt ist. Da nun die Fundamental-Relation:

$$(D) \qquad F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\, G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\, \Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

besteht und $\mathrm{Nm}(F + u\Phi)$ das Product:

$$(F + u\Phi)(F + u\Psi)(F - u\Phi)(F - u\Psi)$$

bedeutet, so kommt:

$$\mathrm{Nm}(F + u\Phi) = F^2 \cdot (F + u\Phi + u\Psi + u^2 G)(F - u\Phi - u\Psi + u^2 G).$$

Die Norm von $F + u\Phi$ hat daher den von u unabhängigen Theiler F^2, und es ist also nach der Definition von $\mathrm{Fm}(F + u\Phi)$:

$$\mathrm{Nm}(F + u\Phi) = F^2 \cdot \mathrm{Fm}(F + u\Phi),$$

wenn F^2 der grösste von u unabhängige Theiler der Norm und demgemäss $\mathrm{Fm}(F + u\Phi)$ eine primitive Form der Unbestimmten u ist. Dass dies aber wirklich der Fall ist, leuchtet schon daraus ein, dass die beiden Functionen $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ keinen gemeinsamen Theiler (erster Stufe) haben, und dass demnach, wenn

$$\mathrm{Fm}(F + u\Phi) = (F + u\Phi + u\Psi + u^2 G)(F - u\Phi - u\Psi - u^2 G)$$

genommen wird, $\mathrm{Fm}(F + u\Phi)$ in der That eine (eigentlich oder uneigentlich) primitive Form wird. Dividirt man nun sowohl Φ als auch F durch ihren gemeinsamen Theiler:

$$\frac{F + u\Phi}{\mathrm{Fm}(F + u\Phi)},$$

so werden die beiden Quotienten der Division beziehungsweise:

$$(\Phi + uG)(F - u\Phi - u\Psi + u^2 G), (F + u\Psi)(F - u\Phi - u\Psi + u^2 G),$$

[1] Vergl. das Citat am Schlusse von Art. I.

und man erhält sonach für den Bruch $\frac{\Phi}{F}$ den Ausdruck:

$$(C^\circ) \qquad \frac{\Phi(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) + uG(\mathfrak{A},\mathfrak{B})}{F(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) + u\Psi(\mathfrak{A},\mathfrak{B})},$$

welcher gemäss der Gleichung (C) den Werth von $f(a+b)$, und zwar in reducirter Form, darstellt.

Dass der Ausdruck (C°), zu welchem die allgemeine Theorie der algebraischen Divisoren geführt hat, seinem Werthe nach mit dem Bruche $\frac{\Phi}{F}$ übereinstimmt, lässt sich unmittelbar mittels der Gleichung (D) verificiren. Dass ferner der Ausdruck (C°) in der That ein reducirter Bruch ist, geht aus der Gleichung:

$$F_1 F + G_1 G + \Phi_1 \Phi + \Psi_1 \Psi = 1$$

hervor, in welcher F_1, G_1, Φ_1, Ψ_1 die Werthe:

$$\begin{aligned}
F_1 &= 1 + 2^4(2\mathfrak{M}-1)(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2) - 2^{11}\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2)^2\\
G_1 &= 2^{12}\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)(\mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2)\\
\Phi_1 &= 2^3\left(1-2\mathfrak{M}-2^7\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2)\right)\Phi\\
\Psi_1 &= 2^3\left(1-2\mathfrak{M}-2^7\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2)\right)\Psi
\end{aligned}$$

haben und also »*ganze*« Grössen des Bereichs $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}]$ sind. Denn die angegebene Gleichung zeigt, dass das Modulsystem (F, G, Φ, Ψ) äquivalent Eins ist, und dies ist nach §. 22 meiner oben citirten Festschrift die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Form mit den Unbestimmten U, U', U'', U''':

$$FU + GU' + \Phi U'' + \Psi U'''$$

»*eigentlich*« primitiv sei. Die Grössen F, G, Φ, Ψ haben daher überhaupt keinen Divisor irgend welcher Stufe mit einander gemein.

Durch die Relation $FG = \Phi\Psi$ lassen sich die Gleichungen:

$$(D') \qquad \begin{aligned}(\Phi + u'F)(\Phi + uG) &= E\Phi,\\ (\Phi + u'F)(F + u\Psi) &= EF,\end{aligned}$$

in denen E die eigentlich primitive Form:

$$u'F + uG + \Phi + uu'\Psi$$

bedeutet, unmittelbar verificiren. Diese Gleichungen (D') ergeben eine Zerlegung von Zähler und Nenner des Bruches $\frac{\Phi}{F}$, welcher $f(a+b)$ darstellt, in je zwei Factoren, und zwar im strengsten Sinne der absoluten Äquivalenz, d. h. hier, da der Gattungs-Bereich $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}]$

genau drei unabhängige Elemente $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}$ enthält, im Sinne einer Äquivalenz *vierter* Stufe (vergl. meine Festschrift S. 91). Die Factoren:

$$\Phi + u'F, \Phi + uG, F + u\Psi$$

sind ganze algebraische, dem Gattungs-Bereich $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}]$ »*associirte*« Formen, und die erste dieser drei Formen stellt den grössten gemeinsamen Theiler von Φ und F dar. Diese drei Formen sind nicht irreductibel; jede derselben lässt sich vielmehr noch weiter in je zwei Factoren zerlegen.

IV.

Bezeichnet man zur Abkürzung die durch den Bruch $\frac{\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}$ dargestellte algebraische Function der Grössen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ durch $\mathrm{H}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und fixirt die darin vorkommenden Quadratwurzeln $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ so, dass dieselben für $\mathfrak{A} = 0, \mathfrak{B} = 0$ der positiven Einheit gleich werden, so genügt die Function $\mathrm{H}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ den Relationen:

$$\mathrm{H}(x, 0) = x, \mathrm{H}(x, y) = \mathrm{H}(y, x) = -\mathrm{H}(-x, -y)$$
$$\mathrm{H}\big(\mathrm{H}(x, y), z\big) = \mathrm{H}\big(\mathrm{H}(x, z), y\big) = \mathrm{H}\big(\mathrm{H}(y, z), x\big),$$

welche durch Rechnung verificirt werden können. Aus diesen Relationen folgt nicht nur, dass $\mathrm{H}\big(\mathrm{H}(x, y), z\big)$ eine symmetrische Function von x, y, z ist, sondern auch, dass ebenso:

$$\mathrm{H}\big(\mathrm{H}(\mathrm{H}(x, y), z), t\big)$$

eine symmetrische Function von x, y, z, t und mit:

$$\mathrm{H}\big(\mathrm{H}(x, y), \mathrm{H}(z, t)\big)$$

übereinstimmend wird. Es ist demnach allgemein, wenn die auf diese Weise aus r Grössen $z_1, z_2, \ldots z_r$ gebildete Function mit H_r bezeichnet wird:

$$\mathrm{H}_{r+s}(z_1, z_2, \ldots z_{r+s}) = \mathrm{H}\big(\mathrm{H}_r(z_1, z_2, \ldots z_r), \mathrm{H}_s(z_1, z_2, \ldots z_s)\big).$$

Setzt man endlich der Einfachheit halber für den Fall gleicher Elemente z:

$$\mathrm{H}_n(z, z, \ldots z) = \mathrm{H}_n(z)$$

und

$$\mathrm{H}_0(z) = 0, \quad \mathrm{H}_1(z) = z, \quad \mathrm{H}_{-1}(z) = -z,$$

so ist allgemein für positive und negative Zahlen r, s:

$$\mathrm{H}_{r+s}(z) = \mathrm{H}\big(\mathrm{H}_r(z), \mathrm{H}_s(z)\big).$$

Dies vorausgeschickt, lässt sich die Aufgabe der algebraischen Herleitung der Multiplicationsformeln aus dem Additionstheorem in

folgender Weise präcisiren: es soll gezeigt werden, dass, wenn $\mathbf{H}_n'$ ebenso aus $\mathbf{H}_n$ gebildet wird wie $\mathfrak{A}'$ aus $\mathfrak{A}$, die algebraischen Functionen $\mathbf{H}_n(z)$, $\mathbf{H}_n'(z)$ sich in der Form:

$$\mathbf{H}_n(z) = z \cdot z^{(n)} \frac{P_n(z^2)}{Q_n(z^2)}, \quad \mathbf{H}_n'(z) = z^{(n-1)} \frac{R_n(z^2)}{Q_n^2(z^2)}$$

darstellen lassen, wo, je nachdem n gerade oder ungrade ist,

$$z^{(n)} = z' \text{ oder } z^{(n)} = 1$$

genommen werden muss, und wo P_n, Q_n, R_n ganze rationale Functionen von z^2 bedeuten, die so beschaffen sind, dass Zähler und Nenner in den Ausdrücken von $\mathbf{H}_n(z)$ und $\mathbf{H}_n'(z)$ für keinen Werth von z gleichzeitig verschwinden, und dass alsdann die Grade von:

	P_n	Q_n	R_n
für grade n:	$\frac{1}{2}n^2 - 2$	$\frac{1}{2}n^2$	n^2,
für ungrade n:	$\frac{1}{2}(n^2-1)$	$\frac{1}{2}(n^2-1)$	n^2-1

in Beziehung auf z^2 werden.

Die hier bezeichnete Aufgabe wird unmittelbar gelöst, wenn man bei der Bildung von $\mathbf{H}_{r+s}$ aus $\mathbf{H}_r$ und $\mathbf{H}_s$ die Function $\mathbf{H}$ in der reducirten Form (C°) zu Grunde legt. Setzt man nämlich $\mathbf{H}_r$, $\mathbf{H}_s$ in der nachzuweisenden Form voraus, so resultirt eine Gleichung:

$$\mathbf{H}_{r+s}(z) = \frac{\Phi_0 + uG_0}{F_0 + u\Psi_0},$$

wenn darin

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= z\,(z^{(r)} z^{(s-1)} P_r Q_r R_s + z^{(r-1)} z^{(s)} P_s Q_s R_r)\\
\Psi_0 &= z\,(z^{(r)} z^{(s-1)} P_r Q_r R_s - z^{(r-1)} z^{(s)} P_s Q_s R_r)\\
F_0 &= Q_r^2 Q_s^2 - z^4 z^{(r)} z^{(r)} z^{(s)} z^{(s)} P_r^2 P_s^2\\
G_0 &= z^2\,(z^{(r)} z^{(r)} P_r^2 Q_s^2 - z^{(s)} z^{(s)} P_s^2 Q_r^2)
\end{aligned}$$

genommen wird. Die Functionen Φ_0, Ψ_0, F_0, G_0 entstehen beziehungsweise aus $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $\Psi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn in diesen

$$\mathfrak{A} = \mathbf{H}_r(z), \quad \mathfrak{B} = \mathbf{H}_s(z)$$

gesetzt und alsdann mit $Q_r^2 Q_s^2$ multiplicirt wird. Da nun oben gezeigt worden ist, dass das Modulsystem (Φ, Ψ, F, G) äquivalent Eins ist, so folgt, dass:

$$Q_r^2 Q_s^2 \equiv 0 \text{ (modd. } \Phi_0, \Psi_0, F_0, G_0)$$

sein muss. Gäbe es nun irgend einen Werth von z, für welchen gleichzeitig:

$$\Phi_0 = \Psi_0 = F_0 = G_0 = 0$$

wäre, so müsste auch Q_r oder Q_s gleich Null sein. Auf Grund der Gleichungen $F_0 = 0$, $G_0 = 0$ würde aber für $Q_r = 0$ auch:

$$z z^{(r)} z^{(s)} P_r P_s = 0, \; z z^{(r)} P_r Q_s = 0$$

sein müssen, während der Voraussetzung nach weder $zz^{(r)}P_r$ und Q_r noch $zz^{(s)}P_s$ und Q_s gleichzeitig verschwinden. Der Ausdruck für $zz^{(r+s)}\mathrm{H}_{r+s}(z)$, nämlich:

$$zz^{(r+s)}\frac{\Phi_0 + uG_0}{F_0 + u\Psi_0} \text{ oder } zz^{(r+s)}\frac{\Phi_0 + u^0 zz^{(r+s)}G_0}{F_0 + u^0 zz^{(r+s)}\Psi_0},$$

ist hiernach ein reducirter Bruch, in dem Sinne, dass Zähler und Nenner nur eine primitive Linearform von u als gemeinschaftlichen Theiler haben. Denn:

$$\frac{1}{zz^{(r+s)}}\Phi_0, G_0, F_0, zz^{(r+s)}\Psi_0$$

sind ganze Grössen des natürlichen Rationalitäts-Bereichs $[z^2, \mathfrak{M}]$; sowohl der in den zwei ersten als auch der in den zwei letzten dieser vier Grössen enthaltene gemeinsame Theiler erster Stufe lässt sich daher ebenfalls als eine Grösse des Bereichs $[z^2, \mathfrak{M}]$, also ohne Zuhülfenahme von Formen, vollständig darstellen.

Die Gradbestimmung der von u unabhängigen Factoren in $\Phi_0 + uG_0$ und $F_0 + u\Psi_0$ kann auf die Gleichungen (D') gegründet werden, aus denen analoge Gleichungen:

$$(\mathrm{D}^0) \qquad \begin{aligned}(\Phi_0 + u'F_0)(\Phi_0 + uG_0) &= E_0\Phi_0,\\ (\Phi_0 + u'F_0)(F_0 + u\Psi_0) &= E_0F_0,\end{aligned}$$

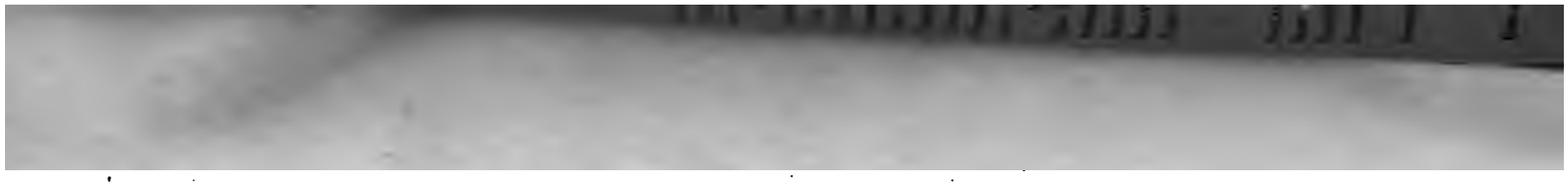
hervorgehen. Dabei ist E_0 eine primitive Form von u, u', und $\Phi_0 + u'F_0$ ist der Nenner des Ausdrucks für $\mathrm{H}_{r-s}(z)$. Wird also der Grad des von u' unabhängigen Factors in $\Phi_0 + u'F$ als bekannt angenommen, so bestimmen sich daraus die Grade der von u unabhängigen Factoren von $\Phi_0 + uG_0$ und $F_0 + u\Psi_0$, und zwar genau in derselben Weise wie es im Art. II ausgeführt ist.

Nachdem auf die angegebene Weise der Grad von Zähler und Nenner des Ausdrucks für $\mathrm{H}_{r+s}(z)$, d. h. also der Grad von $P_{r+s}(z^2)$ und $Q_{r+s}(z^2)$, bestimmt worden, ergiebt sich der Grad des Zählers von $\mathrm{H}'_{r+s}(z)$, d. h. also der Grad von $R_{r+s}(z^2)$, einfach aus der Definition von H'. Denn diese ist durch eine Gleichung:

$$1 - c\mathrm{H}^2 + c'\mathrm{H}^4 = \mathrm{H}'^2$$

gegeben, in welcher die Coefficienten c, c' nur von $\mathfrak{M}$ abhängig sind, und eben diese Definition zeigt auch, dass Zähler und Nenner des daraus resultirenden Ausdrucks von H' für keinen Werth von z gleichzeitig verschwinden.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.



INHALTSVERZEICHNISS.

	Seite
[illegible]: Über Jeromajewit und Kiebwaldit vom Berge Soktuj in Daurien	393
[illegible]: Zur Physiologie der Gehörschnecke	407
[illegible]: Über goldführende Gneisse von Obermittweida im sächsischen Erzgebirge	411
[illegible]: Über die Vorkommen der Küste Labrador	419
[illegible]: Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen	421

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE aus den Jahren 1880, 1881 und 1882.

(In Commission in Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.)

[illegible]: Zur Geschichte des Axumitischen Reichs im vierten bis sechsten Jahrhundert	ℳ 2.50
[illegible]: Über Veränderung der Wasserstände in den preussischen Strömen	- 1.50
[illegible]: Über ein chinesisches Mengwerk, nebst einem Anhang linguistischer Verbesserungen zu [illegible] Bänden der Erdkunde Ritter's	2.00
[illegible]: Über die Anfänge der Heroiden des Ovid	1.50
[illegible]: Über eine alte Genealogie der Welfen	- 0.80
[illegible]: Über die Messung psychischer Vorgänge	0.80
[illegible]: Über die Weddas von Ceylon und ihre Beziehungen zu den Nachbarstämmen	- 8.00
[illegible]: Über die Sprache des Volkes Rông oder Lepcha in Sikkim	0.75
[illegible]: Über die Sargonstele des Berliner Museums	4.00
[illegible]: Über die Altäre von Olympia	2.20
[illegible]: Alttrojanische Gräber und Schädel	- 12.20
[illegible]: Fragmente einer Monographie der Characeen. Nach den hinterlassenen Manuscripten herausgegeben von Dr. Otto Nordstedt	11.50
[illegible]: Zur Textgeschichte der Aristotelischen Physik	- 2.00
[illegible]: Die Schutzscheiden und ihre Verstärkungen	- 6.00
[illegible]: Über Begriff und Begründung der sittlichen Gesetze	1.80
[illegible]: Über die unter Philon's Werken stehende Schrift über die Unzerstörbarkeit des Weltalls	4.00
[illegible]: Über die Geschwindigkeit des strömenden Wassers in verschiedenen Tiefen, untersucht nach den von Baumgarten ausgeführten Messungen	4.00

[illegible]: Über die Lage von Tigranokerta	- 5.50
[illegible]: Der Tempel der Athena Polias zu Pergamon	- 2.00
[illegible]: Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Curven	- 3.00
[illegible]: Übersicht über die Ophiuriden, welche während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelt wurden	- 4.50
[illegible]: Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle an der Westküste von Africa, auf Ascension und am Cap der guten Hoffnung gesammelten Crustaceen	- 2.50

[illegible], Ernst: Leibnizens und Huygens' Briefwechsel mit Papin, nebst Biographie Papin's und einigen zugehörigen Briefen und Actenstücken. Auf Kosten der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben. Berlin 1881 . . . ℳ 10.50

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1892 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den nur näher angehenden Theil des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus diesen Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reinen Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder ihr fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch demselben Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, Reden und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Der zu einem Monat gehörige Stück wird in der Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften und Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen »Sitzungsberichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich anschicken zu lassen zuziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu geben.

Die Akademie wünscht ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« zu diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich:

die Stücke vom Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,

— — — Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,

— — — Oktober bis Dezember zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fertigstellung des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1892 nicht vorgekommen sein sollten, werden ersucht, hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, die eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen nur in Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1893 angebracht werden.

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen wäre wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gebrmann) in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 ℳ.

Gesammt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 ℳ.

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsberichte« oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften von Seiten der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen genommen zugesandt werden, dieselben in einzelnen Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten, anzusenden. Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der genannten Buchhandlung in Verbindung setzen.

STK
Q3
M38

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES
MAY 7 1991

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT V.

MAI 1883.

BERLIN 1883.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI [illegible]

23. Über die elektrischen Strömungen in einem Kreiscylinder.

Von G. Kirchhoff.

(Vorgelegt am 26. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XVI]; — ausgegeben am 4. Mai.)

Am 2. Juli 1880 habe ich der Akademie eine Methode zur Bestimmung der elektrischen Leitungsfähigkeit eines Körpers vorgelegt, der die Gestalt eines Stabes von quadratischem Querschnitt hat. Bei dieser Methode sind die Ecken, welche eine lange Kante begrenzen, mit den Polen einer Kette und die Ecken, die einer zweiten langen Kante angehören, mit den Enden des einen Gewindes eines Differentialgalvanometers zu verbinden. Jene Punkte wurden 1 und 4, diese 2 und 3 genannt. Es wurde einerseits gezeigt, wie experimentell der Widerstand ρ bestimmt werden kann, der $= P_2 - P_3$ ist, wenn P_2 und P_3 die Werthe bezeichnen, die das Potential in den Punkten 2 und 3 hat, wenn ein Strom von der Intensität 1 dem Stabe in den Punkten 1 und 4 zu- und abgeleitet wird. Andererseits ergab die Theorie, dass

$$\rho = \frac{l - a \cdot 0.7272}{a^2 k}$$

ist, wenn l die Länge des Stabes, a die Seite seines Querschnitts und k seine Leitungsfähigkeit bedeutet; eine Gleichung, aus der k berechnet werden kann, wenn ρ, l und a gemessen sind.

Eine ähnliche Methode ist offenbar anwendbar, wenn der zu untersuchende Körper ein Cylinder von kreisförmigem Querschnitt ist Für den Versuch und für die Rechnung wird es dann am bequemsten sein, die Elektroden 1 und 4 in die Mittelpunkte der Grundflächen und die Punkte 2 und 3 in die Ränder derselben zu legen. Gemessen kann der Widerstand ρ, d. h. die Differenz $P_2 - P_3$, hier gerade so werden, wie in dem Fall des quadratischen Querschnitts; neu zu berechnen ist aber der Ausdruck, der ρ als Function der Dimensionen des Cylinders darstellt.

Mit der Theorie der Stromverbreitung in einem durch zwei senkrechte Querschnitte begrenzten, kreisförmigen Cylinder haben sich

Riemann und Hr. H. Weber beschäftigt. Jener[1] stellt für den Fall, dass die Elektroden die Mittelpunkte der Endflächen sind, das Potential, ϕ, durch eine Reihe dar, die nach den Sinus der Vielfachen der der Cylinderaxe parallelen Ordinate, z, des betrachteten Punktes fortschreitet. Eine Reihe derselben Art leitet Hr. Weber[2] für den Fall ab, dass die Elektroden zwei Punkte der Mantelfläche sind. Diese Reihen sind zur numerischen Rechnung sehr geeignet, wenn die Länge des Cylinders klein gegen seinen Radius ist, nicht aber in dem entgegengesetzten Falle, der hier gerade in Betracht kommt. Eine Reihe, die dann im Allgemeinen brauchbar ist, findet Hr. Weber in einer zweiten Abhandlung[3] durch Umformung seiner ursprünglichen Reihe; es treten dabei Exponentialfunctionen an die Stelle der trigonometrischen Functionen von z. Die Annahme, dass die Elektroden die Mittelpunkte der Endflächen sind, hat Hr. Weber nicht verfolgt; die Werthe, die dann das Potential in Punkten der Mantelfläche hat, kann man aber nach einem gewissen Reciprocitätssatze finden, indem man den Weber'schen Ausdruck auf die Mittelpunkte der Endflächen anwendet. Die Lösung der Aufgabe, um die es sich hier handelt, giebt indessen die Reihe, auf die man so kommt, unmittelbar nicht, da sie zu langsam convergirt, wenn der Punkt, für den sie gilt, im Rande einer Grundfläche liegt. Sie muss also noch einer Umformung unterworfen werden.

Es seien z, r und w die Cylindercoordinaten des Punktes, auf den das Potential ϕ sich bezieht; es sei dieses von w unabhängig; dann ist

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0.$$

Wird der Radius des leitenden Cylinders $= 1$ gesetzt, so ist

$$\text{für } r = 1 \quad \frac{\partial\phi}{\partial r} = 0.$$

Weiter werde angenommen, dass ϕ entgegengesetzte Werthe besitzt für entgegengesetzte Werthe von z.

---

[1] Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe; Pogg. Ann. Bd. 95. 1855.

[2] Über die Bessel'schen Functionen und ihre Anwendung auf die Theorie der elektrischen Ströme; Borchardt's Journal Bd. 75. 1872.

[3] Über die stationären Strömungen der Elektricität in Cylindern; Borchardt's Journal Bd. 75.

Nennt man $J_0(\lambda)$ und $J_1(\lambda)$ die BESSEL'schen Functionen oter und erster Ordnung von λ, d. h. setzt man

$$J_0(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2^2} + \frac{\lambda^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{\lambda^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + \ldots$$

und

$$J_1(\lambda) = -\frac{dJ_0(\lambda)}{d\lambda},$$

so genügt man allen diesen Bedingungen durch

$$\phi = A_0 z + \sum_1^\infty A_n (e^{\lambda_n z} - e^{-\lambda_n z}) J_0(\lambda_n r),$$

wo $A_0, A_1, A_2, \ldots$ willkürliche Constanten und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die positiven Wurzeln der Gleichung

$$J_1(\lambda) = 0$$

bezeichnen. Die Constanten A finden ihre Bestimmung, wenn die Werthe von $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ für eine Grundfläche des Cylinders gegeben sind, durch die Sätze, dass

$$\int_0^1 J_0(\lambda_n r)\, J_0(\lambda_m r)\, r dr = 0,$$

wenn m und n verschieden sind, dass

$$\int_0^1 J_0(\lambda_n r)\, r dr = 0$$

und

$$\int_0^1 \left(J_0(\lambda_n r)\right)^2 r dr = \tfrac{1}{2}\left(J_0(\lambda_n)\right)^2$$

ist. Es folgt hieraus

$$A_0 = 2\int_0^1 \frac{\partial\phi}{\partial z}\, r dr$$

$$A_n = \frac{2\int_0^1 \frac{\partial\phi}{\partial z} J_0(\lambda_n r)\, r dr}{\lambda_n (e^{\lambda_n z} + e^{-\lambda_n z})\left(J_0(\lambda_n)\right)^2},$$

wo für z der der Grundfläche entsprechende Werth zu setzen ist.

Nun sei für die beiden Grundflächen

$$z = \pm \frac{l}{2}.$$

und $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$, ausser da, wo r unendlich klein ist: hier sei es unendlich gross und zwar so, dass

$$\text{für } z = \frac{l}{2} \qquad k 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z} r dr = 1$$

ist; das entspricht der Anordnung, die hier zu untersuchen ist, und es wird dann

$$\rho = 2\phi ,$$

wenn $z = \frac{l}{2}$, $r = 1$ in ϕ gesetzt wird. Hiernach hat man

$$k\pi A_0 = 1$$

$$k\pi A_n = \frac{1}{\lambda_n \left(e^{\frac{\lambda_n l}{2}} + e^{-\frac{\lambda_n l}{2}} \right) (J_0(\lambda_n))^2} ,$$

und daher

$$k\pi\rho = l + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n l}}{1 + e^{-\lambda_n l}} \cdot \frac{1}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} .$$

Da schon λ_1 etwa 3.8 ist, so wird, wenn die Länge des Cylinders auch nur ein mässiges Vielfaches seines Radius ausmacht, der erste Factor unter dem Summenzeichen $= 1$, also

$$k\pi\rho = l + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n J_0(\lambda_n)}$$

gesetzt werden dürfen.

Um die hier vorkommende Summe berechnen zu können, muss man den Ausdruck unter dem Summenzeichen umformen. Hr. Stockes[1] hat für λ_n den Ausdruck angegeben

$$\frac{\lambda_n}{\pi} = n + 0.25 - \frac{0.151982}{4n+1} + \frac{0.015399}{(4n+1)^3} - \frac{0.245835}{(4n+1)^5} \cdots$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der Gleichung

$$J_0(\lambda_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_n}} \cos\left(\lambda_n - \frac{\pi}{4}\right) \left\{ 1 - \frac{1 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot (8\lambda_n)^2} + \cdots \right\}$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_n}} \sin\left(\lambda_n - \frac{\pi}{4}\right) \left\{ \frac{1}{1 \cdot 8\lambda_n} - \frac{1 \cdot 9 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (8\lambda_n)^3} + \cdots \right\}$$

[1] Lord Rayleigh, Theory of Sound, vol. I p. 273.

findet man durch Entwickelung nach absteigenden Potenzen von $4n+1$

$$\frac{1}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{4n+1}} \left\{ 1 + \frac{0.607928}{(4n+1)^2} + \frac{0.06160}{(4n+1)^4} + \frac{3.20586}{(4n+1)^6} \cdot . \right\}.$$

Die Genauigkeit dieser Gleichung kann man aus der folgenden Zusammenstellung beurtheilen, in der in der Columne 1 die aus ihr berechneten Werthe von $\frac{1}{\lambda_n J_0(\lambda_n)}$ für $n = 1, 2$ und 3 angegeben sind, während die Columne 2 die entsprechenden Werthe, wie sie aus den HANSEN'schen Tafeln für die BESSEL'schen Functionen sich ergeben, enthält.

n	1	2
1	− 0.648027	− 0.647980
2	0.474950	0.474950
3	− 0.393644	− 0.393644

Nun ist nach der MACLAURIN'schen Summenformel

$$\sum_0^k (z+n)^h = \frac{(z+k)^{h+1} - z^{h+1}}{h+1} + \frac{1}{2} z^h - B_1 \frac{h}{1} \cdot \frac{z^{h-1}}{2} + B_2 \frac{h \cdot h-1 \cdot h-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{z^{h-3}}{4} - B_3 \frac{h \cdot h-1 \cdot h-2 \cdot h-3 \cdot h-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{z^{h-5}}{6} + \cdot ,$$

wenn h eine negative Grösse, k eine unendlich grosse, ganze Zahl ist und $B_1, B_2, \ldots$ die BERNOULLI'schen Zahlen bedeuten, also

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \ldots$$

ist. Hieraus folgt

$$\sum_0^k \frac{1}{\sqrt{z+n}} = 2\sqrt{k} - 2\sqrt{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{24}\frac{1}{\sqrt{z^3}} - \frac{1}{384}\frac{1}{\sqrt{z^7}} + \frac{1}{64512}\frac{1}{\sqrt{z^{11}}} - \cdot .$$

$$\sum_0^k \frac{1}{\sqrt{(z+n)^3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{z^3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z^5}} + \frac{5}{24}\frac{1}{\sqrt{z^7}} - \frac{7}{128}\frac{1}{\sqrt{z^{11}}} + \cdot .$$

$$\sum_0^k \frac{1}{\sqrt{(z+n)^5}} = \frac{2}{7}\frac{1}{\sqrt{z^7}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z^9}} + \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{z^{11}}} - \frac{143}{640}\frac{1}{\sqrt{z^{15}}} + \cdot .$$

$$\sum_0^k \frac{1}{\sqrt{(z+n)^{13}}} = \frac{2}{11}\frac{1}{\sqrt{z^{11}}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z^{13}}} + \frac{13}{24}\frac{1}{\sqrt{z^{15}}} - \frac{221}{384}\frac{1}{\sqrt{z^{19}}} + \cdot .$$

Diese Gleichungen erlauben ohne Mühe den Werth von

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n J_0(\lambda_n)}$$

mit einer für das Experiment mehr als ausreichenden Genauigkeit zu berechnen. Sie ergeben denselben

$$= - 0.38479.$$

Die Gleichung für den Widerstand ρ ist daher

$$k\pi\rho = l - 0.76958.$$

Hierbei ist der Radius des Cylinders als Einheit der Länge angenommen; lässt man diese Einheit unbestimmt und bezeichnet den Radius durch r, so wird daher

$$\rho = \frac{l - r \cdot 0.76958}{k\pi r^2}.$$

24. Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von L. KRONECKER.

(Vorgelegt am 26. April: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXI]: — ausgegeben am 4. Mai.)

(Fortsetzung.)

IV.

Die von ABEL im Lehrsatz III (Art. II) seiner Abhandlung über die binomische Reihe und nachher von Anderen vielfach angewendete Reihen-Umformung,[1] welche der Umformung von Integralen durch partielle Integration entspricht, lässt sich, wie es auch an der citirten Stelle geschehen ist, durch die identische Gleichung:

$$\phi(k)\psi(k)+\sum_{n}\big(\phi(n)-\phi(n-1)\big)\psi(n)=\phi(k')\psi(k')+\sum_{n}\phi(n-1)\big(\psi(n-1)-\psi(n)\big)$$
$$(n=k+1,k+2,\ldots..k')$$

darstellen. Wenn nun für reelle Werthe von ξ, welche in dem durch die Bedingung:

$$n\leqq\xi<n+1$$

bestimmten Intervalle liegen,

$$\phi(\xi)=\phi(n)$$

genommen und $\psi(\xi)$ als eine für alle reellen Werthe von ξ definirte, differentiirbare Function vorausgesetzt wird, so kann jene Gleichung auf folgende Form gebracht werden:

$$\phi(k)\psi(k)+\sum_{n}\big(\phi(n)-\phi(n-1)\big)\psi(n)=\phi(k')\psi(k')-\int_{k}^{k'}\phi(\xi)\,d\psi(\xi).$$
$$(n=k+1,k+2,\ldots..k')$$

Bei dieser Form tritt es in Evidenz, dass die unendliche Reihe:

$$\sum_{n}\big(\phi(n)-\phi(n-1)\big)\psi(n) \qquad (n=1,2,3\ldots)$$

convergirt, wenn der absolute Werth von $\phi(k)$ auch für beliebig grosse Zahlen k stets kleiner als eine bestimmte positive Zahl $\mathfrak{p}$ bleibt, und wenn $\psi(\xi)$ eine stets positive, mit wachsendem Argument unendlich abnehmende Function ist. Denn es ist, wenn nach WEIERSTRASS'scher

[1] CRELLE's Journal, Bd. 1, S. 314 und ABEL, Oeuvres complètes, Nouvelle édition 1881, Tome I, p. 222.

Weise der absolute Werth einer Grösse A mit $|A|$ bezeichnet wird.

$$\left|\int_k^{k'} \phi(\xi)\, d\psi(\xi)\right| < \mathfrak{p}\,\psi(k) \qquad (k < k').$$

und das Integral:

$$\int_0^{\infty} \phi(\xi)\, d\psi(\xi).$$

welches bei der (offenbar gestatteten) Annahme $\phi(0) = 0$ mit dem negativen Werth der unendlichen Reihe:

$$\sum_n \big(\phi(n) - \phi(n-1)\big)\psi(n) \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

übereinstimmt, ist also convergent.

Wenn die Function $\psi(\xi)$, ausser von dem Argument ξ, noch von einer reellen Grösse ρ abhängt und, bei Festhaltung eines Werthes von ξ, in dem ganzen Intervalle $\rho_0 \leqq \rho \leqq \rho_1$ stetig abnimmt, so ist für alle in jenem Intervalle liegenden Werthe von ρ der Voraussetzung nach $\psi(k, \rho) \leqq \psi(k, \rho_0)$ und also:

$$\left|\int_k^{k'} \phi(\xi)\, d\psi(\xi)\right| < \mathfrak{p}\,\psi(k, \rho_0).$$
$$(\rho_0 < \rho \leqq \rho_1)$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass unter den angegebenen Bedingungen das Integral $\int_0^{\infty} \phi(\xi)\, d\psi(\xi)$ und also auch die damit übereinstimmende Reihe $\Sigma\big(\phi(n) - \phi(n-1)\big)\psi(n)$ eine im Intervalle $\rho_0 \leqq \rho \leqq \rho_1$ durchweg stetige Function von ρ ist.

Man kann nun unter Beibehaltung der oben eingeführten Bezeichnungen

$$\left(m^2 + (b_n m + 2c_n n)^2\right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \qquad (\varepsilon > -1)$$

für $\psi(n)$ und sowohl $\cos 2n\tau\pi$ als $\sin 2n\tau\pi$ für $\phi(n) - \phi(n-1)$ nehmen, falls man nur den Werth $\tau = 0$, ferner complexe (imaginäre) Werthe von b_0, c_0 und endlich solche Werthe von n ausschliesst, für welche $b_0 m + 2c_0 n$ negativ ist. Unter diesen Vorbehalten erfüllen nämlich die Functionen $\phi(n)$ und $\psi(n)$ die oben für dieselben aufgestellten Bedingungen.

Es sei jetzt λ eine reelle, positive, beliebig kleine Grösse, und k_m bedeute die kleinste positive, den beiden Bedingungen:

$$2ck_m + bm > \frac{1}{\lambda}, \qquad 2ck_m - bm > \frac{1}{\lambda}$$

zugleich genügende ganze Zahl. Alsdann ist gemäss der vorstehenden Entwickelungen:

$$\left|\sum_n e^{2n\tau\pi i}\left((2c_0n \pm b_0m)^2 + m^2\right)^{-1-\rho}\right| < \mathfrak{p}'\left(m^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{-1-\rho_0},$$
$$(n = k_m + 1, k_m + 2, \ldots k';\ \rho_0 \leqq \rho \leqq \rho_1)$$

wo $\mathfrak{p}'$ eine bestimmte positive Zahl, wie oben $\mathfrak{p}$, bedeutet. Da nun

$$\lambda \cdot \sum_{m=1}^{m=\infty}(\lambda^2 m^2 + 1)^{-1-\rho_0} < \lambda \cdot \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\lambda^2\xi^2 + 1)^{1+\rho_0}} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{1+\rho_0}}$$

ist, und das letztere Integral unter der Voraussetzung $\rho_0 > -\frac{1}{2}$ einen endlichen Werth hat, so wird unter derselben Voraussetzung:

$$\lim_{\lambda=0} \sum_{m=1}^{m=\infty}\left(m^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{-1-\rho_0} = \lim_{\lambda=0} \lambda^{1+2\rho_0} \cdot \lambda \sum_{m=1}^{m=\infty}(\lambda^2 m^2 + 1)^{-1-\rho_0} = 0.$$

Die Grösse λ kann hiernach stets so klein gewählt werden, dass der Werth der Summe:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\left|\sum_n e^{2n\tau\pi i}\left((2c_0n + b_0m)^2 + m^2\right)^{-1-\rho}\right| \quad (\pm n = k_m + 1, k_m + 2, \ldots)$$

und also auch der Werth von:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\left|e^{2m\sigma\pi i}\sum_n e^{2n\tau\pi i} f(m,n)^{-1-\rho}\right|$$

oder:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\left|\sum_n e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} f(m,n)^{-1-\rho}\right|$$

für alle Werthe von ρ, die nicht kleiner als ρ_0 sind, unter einer beliebig klein anzunehmenden Grenze bleibt, vorausgesetzt, dass σ reell und $\rho_0 > -\frac{1}{2}$ ist. Unter den angegebenen Voraussetzungen zeigt sich also einerseits der Grenzwerth:

$$\lim_{h=\infty, k=\infty} \sum_{m,n} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} f(m,n)^{-1-\rho} \qquad (-h \leqq m \leqq h,\ -k \leqq n < k \text{ ausser } m=n=0)$$

als mit dem Grenzwerth:

$$\lim_{\lambda=0, h=\infty, k=\infty} \lim \sum e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} f(m,n)^{-1-\rho} \quad (-h \leqq m \leqq h,\ -k_m \leqq n \leqq k_m \text{ ausser } m=n=0),$$

in welchem die Summationsgrenzen k_m von λ abhängen, übereinstimmend, und andererseits zeigt sich dieser letztere Grenzwerth selbst als eine für $\rho > -\frac{1}{2}$ durchweg stetige Function von ρ. Da überdies für positive Werthe von ρ die über alle positiven und negativen Zahlen m, n ausgedehnte Summe $\Sigma(m^2+n^2)^{-1-\rho}$ ebenso wie das über alle reellen x und y, mit der Bedingung $x^2+y^2 > 1$, ausgedehnte Doppelintegral $\int (x^2+y^2)^{-1-\rho}\,dx\,dy$ convergent ist, so ist die Reihe

$$\sum_{m,n} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} f(m,n)^{-1-\rho} \quad (m,n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ ausser } m=n=0)$$

für $\rho > 0$ auch dann convergent, wenn man für die einzelnen Glieder ihre absoluten Werthe nimmt, und sie behält demnach bei jeder beliebigen Weise der Summationsordnung denselben Werth. Die obige Hauptgleichung ($\mathfrak{A}$) geht daher in folgende über:

$$(\mathfrak{D}_0) \quad \log \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{-1}{2\pi} \lim_{\varepsilon = 0} \sum_{m,n}{}' \frac{\rho^{2(m\tau + n)\pi i}}{(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)^{1+\varepsilon}},$$

in welcher $\rho, \sigma, \tau, a_0, b_0, c_0$ beliebige, nur den Bedingungen:

$$\rho > 0\,,\ a_0 > 0\,,\ c_0 > 0\,,\quad 4a_0c_0 - b_0^2 = 1$$

unterworfene, reelle Grössen und $w_1, -w_2$ die Wurzeln der Gleichung

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0$$

bedeuten, und in welcher die Summation rechts auf alle ganzzahligen Werthe von m und n, mit Ausschluss des Werthsystems $m = n = 0$, in beliebig zu bestimmender Folge zu erstrecken ist. Die frühere Beschränkung von τ auf das Intervall zwischen Null und Eins konnte in diesem Resultat offenbar fallen gelassen werden: aber das Werthsystem $\sigma = 0, \tau = 0$ ist in der Gleichung ($\mathfrak{D}$) aus eben demselben Grunde wie in der Gleichung ($\mathfrak{A}$) auszuschliessen, da hier wie dort beide Seiten der Gleichung negativ unendlich werden.

Bedeutet Δ eine reelle positive Grösse und setzt man:

$$a = a_0\sqrt{\Delta}\,,\ b = b_0\sqrt{\Delta}\,,\ c = c_0\sqrt{\Delta}\,,$$

so sind die drei reellen Grössen a, b, c einzig und allein der Beschränkung unterworfen, dass der mit Δ übereinstimmende Werth von $4ac - b^2$ positiv sei. Gemäss der Gleichung ($\mathfrak{D}_0$) ist daher für solche Grössen a, b, c, wenn zur Abkürzung

$$w_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2c}\,, \qquad w_2 = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2c}$$

gesetzt wird:

$$(\mathfrak{D}) \quad \log \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2\pi} \lim_{\varepsilon = 0} \sum_{m,n}{}' \frac{\rho^{2(m\tau + n)\pi i}}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\varepsilon}}.$$

Das durch diese Gleichung ausgedrückte Resultat habe ich bereits in meinem oben citirten Aufsatze[1] vom Januar 1863. jedoch ohne Beweis, mitgetheilt. Die dort angewendeten Bezeichnungen sind von den hier eingeführten etwas verschieden: um die Übereinstimmung herzustellen, müsste für die dortigen Grössen

	σ,	τ,	a,	b,	c,	D,	x, y
der Reihe nach	τ,	σ,	$2c$,	b,	$2a$,	Δ,	n, m

genommen werden.

[1] Vgl. den Monatsbericht vom Januar 1863. S. 46. sowie auch den vom Februar 1880. S. 161.

V.

Setzt man in der mit $f(m,n)$ bezeichneten quadratischen Form:

$$a_0m^2 + b_0mn + c_0n^2$$

$m = \alpha m' + \beta n'$, $n = \alpha' m' + \beta' n'$, wo α, α', β, β' ganze Zahlen bedeuten, für welche $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ ist, so geht dieselbe nach der oben im Art. II. angewandten Bezeichnung in die transformirte Form

$$a_0'm'^2 + b_0'm'n' + c_0'n'^2$$

über. Diese transformirte Form $f'(m',n')$ stellt für die verschiedenen ganzzahligen Werthe von m', n' genau dieselben Grössen dar, wie die ursprüngliche Form, und die beiden unendlichen Doppelreihen:

$$\sum_{m,n} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} f(m,n)^{-1-\varrho}, \qquad \sum_{m',n'} e^{2(m'\sigma'+n'\tau')\pi i} f'(m',n')^{-1-\varrho}$$

stimmen in den einzelnen Gliedern und folglich für $\rho > 0$ auch in ihrem Werthe mit einander überein. Durch die Gleichung $(\mathfrak{D}_0)$ wird daher die Invarianten-Eigenschaft von $\log \Lambda$ in Evidenz gesetzt, während der Ausdruck von $-2\pi \log \Lambda$ in der Gleichung $(\mathfrak{A})$, nämlich:

$$\lim_{h=\infty, k=\infty} \lim \sum_{m,n} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} f(m,n)^{-1} \quad \begin{pmatrix} m=0,\pm 1,\pm 2,\dots \pm h \\ n=0,\pm 1,\pm 2,\dots \pm k \end{pmatrix} \text{ ausser } m=n=0$$

bei Einführung der transformirten Form f' an Stelle von f formal verändert wird. Es bedurfte eben, um die Invarianten-Eigenschaft von $\log \Lambda$ unmittelbar hervortreten zu lassen, noch des Nachweises, dass jener Ausdruck von $-2\pi \log \Lambda$ in der Gleichung $(\mathfrak{A})$ zugleich

$$\lim \sum_{m,n} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} f(m,n)^{-1-\varrho} \quad (m,n=0,\pm 1,\pm 2,\dots \text{ ausser } m=n=0)$$

für $\rho = 0$ darstellt. Dieser Nachweis ist im Art. IV in einfachster Weise geführt; eben derselbe Nachweis kann aber auch nach jener Methode gegeben werden, welche DIRICHLET im §. 1 seiner Abhandlung: »*Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*« (CRELLE's Journal Bd. XIX, S. 331) angewendet hat.

Die citirte DIRICHLET'sche Methode beruht auf der Darstellung von $h^{-1-\varrho}$ durch den Integral-Ausdruck:

$$-\frac{1}{\Gamma(\rho+2)} \int_0^1 x^h d\left(\log\frac{1}{x}\right)^{1+\varrho}.$$

Mit Hülfe derselben wird:

$$\sum_{m,n} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} f(m,n)^{-1-\varrho} = -\frac{1}{\Gamma(\rho+2)} \int_0^1 F(x)\, d\left(\log\frac{1}{x}\right)^{1+\varrho},$$

wo zur Abkürzung:

$$F(x) = \sum_{m,n} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} x^{f(m,n)}$$

gesetzt ist, und es ist nun nur noch zu zeigen, dass $F(x)$ in dem Intervalle der Integration stets endlich bleibt. Dies erhellt unmittelbar, so lange nicht x gleich oder in der Nähe von Eins ist. Für die nahe bei Eins liegenden Werthe von x lässt sich aber die Endlichkeit von $F(x)$ durch »Transformation« der ϑ-Reihe:

$$\sum_{m,n} e^{(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\xi + 2(m\sigma + n\tau)\pi i},$$

welche für $\xi = \log x$ mit $F(x)$ identisch ist, nachweisen, da die transformirte ϑ-Reihe sich — unter der Voraussetzung, dass nicht σ und τ zugleich Null sind — mit abnehmendem ξ der Null nähert.

Verbindet man die beiden mit ($\mathfrak{E}$) und ($\mathfrak{D}_0$) bezeichneten Gleichungen mit einander und berücksichtigt dabei, dass

$$f(m, n) = f(-m, -n)$$

und also

$$\sum_{m,n} e^{2(m\sigma + n\tau)\pi i} f(m, n)^{-1-\rho} = \sum_{m,n} f(m, n)^{-1-\rho} \cos 2(m\sigma + n\tau)\pi$$

ist, so gelangt man zu der merkwürdigen Formel:

$$(\mathfrak{E}) \quad \frac{\Sigma(-1)^{(m-1)(n-1)} e^{-\pi f(m,n) + 2(m\sigma + n\tau)\pi i}}{\left(\Sigma(-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n)\, e^{-\pi f(m,n)}\right)^{\frac{1}{3}}} = - e^{-\lim \Sigma (2\pi f(m,n))^{-1-\rho} \cos 2(m\sigma + n\tau)\pi},$$

in welcher sich der *limes* links auf den Werth $\rho = 0$ und jede der drei Summationen auf alle ganzzahligen Werthe von m und n, jedoch links mit Ausschluss des Systems $m = n = 0$, bezieht; dabei ist

$$f(m, n) = a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2$$

und ρ, σ, τ, a_0, b_0, c_0 bedeuten reelle, nur den Bedingungen:

$$\rho > 0, \quad a_0 > 0, \quad c_0 > 0, \quad 4a_0 c_0 - b_0^2 = 1$$

unterworfene Grössen.

25. Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements.

Von R. Lipschitz
in Bonn.

(Fortsetzung der Mittheilungen vom 14. December 1882 und 8. Februar 1883.)

(Vorgelegt am 19. April: — gedruckt im Bericht vom 10. Mai [St. XXII]: — ausgegeben am 17. Mai.)

In der Abhandlung: Théorie de la déformation des surfaces, hat Bour die allgemeine Aufgabe der Deformation der Oberflächen dahin formulirt, die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte einer zu suchenden Oberfläche als Functionen von zwei unabhängigen Variabeln p und q so zu bestimmen, dass das Quadrat des Linearelements der Oberfläche gleich einem gegebenen Ausdruck

$$E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$$

wird. Um dies Problem zu behandeln, entwickelt Bour mehrere Methoden, wobei er annimmt, dass der gegebene Ausdruck des Quadrats des Linearelements auf gewisse Arten vereinfacht sei. Bei der zweiten Methode, auf welche der Verfasser das grösste Gewicht legt, setzt er voraus, dass jener Ausdruck die besondere Gestalt erhalten habe, in der $E = 1$, $F = 0$ ist, und die Gauss in art. 19 der disquisitiones generales circa superficies curvas angewendet hat. Alsdann kann der reciproke Krümmungsradius des Normalschnitts in dem Punkte (p, q) der gesuchten Oberfläche, welcher dem Fortschreiten von diesem Punkte nach dem Punkte $(p + dp, q + dq)$ entspricht, in die Gestalt gebracht werden

$$\frac{1}{\rho} = \frac{H_1 dp^2 - 2T dp\sqrt{G}\, dq + HG dq^2}{dp^2 + G dq^2}.$$

Für die Functionen H_1, T, H findet Bour zwei partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung, zu denen als dritte Gleichung die von Gauss herrührende Darstellung des Krümmungsmaasses $H_1 H - T^2$ hinzukommt. Diese drei Gleichungen nennt Bour die fundamentalen Gleichungen des Problems, und hebt hervor, dass, wenn

dieselben integrirt sind, noch die Aufgabe übrig bleibe, die endlichen Gleichungen der gesuchten Oberflächen aufzustellen, dass aber mit der Bestimmung eines Systems von Functionen H_1, T, H das eigentliche Problem als gelöst gelten dürfe, weil man die analytische und geometrische Definition einer Oberfläche oder einer Reihe von Oberflächen habe, die auf die gegebene Oberfläche ausgebreitet werden können. Vornehmlich betont er aber, dass das Wesen seiner Methode darin bestehe, die vorhandenen Schwierigkeiten in Gruppen zu ordnen, die nach einander in Angriff genommen werden.

Nach Bour haben sich verschiedene Forscher damit beschäftigt, die erwähnten fundamentalen Gleichungen für eine beliebige Gestalt des Ausdrucks des Linearelements darzustellen. Nun existirt für die von Bour gestellte Aufgabe ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Falle, in welchem das zu dem Ausdruck des Linearelements gehörende Krümmungsmaass nicht verschwindet, und demjenigen, in welchem es durchgehends verschwindet. In dem ersten Falle kann man die Untersuchung für eine beliebige Gestalt des Ausdrucks des Linearelements durchführen, indem man mit den in den vorhergehenden Mittheilungen enthaltenen allgemeinen Resultaten eine angemessene Transformation vornimmt, und gewinnt dadurch eine deutliche Einsicht in die Reihe nach einander folgender Schritte, welche erforderlich sind, um auf dem eingeschlagenen Wege bis zu einer vollständigen Darstellung der rechtwinkligen Coordinaten der Punkte der gesuchten Oberfläche zu gelangen. In dem zweiten Falle, in dem das Krümmungsmaass gleich Null ist, hängt alles von dem Nachweise ab, dass das gegebene Linearelement auf eine Ebene bezogen werden kann. Diese Beziehung lässt sich aber mit alleiniger Hülfe der Integration von exacten Differentialen darstellen.

I.

Es mögen die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z des Punktes einer nicht abwickelbaren Fläche als Functionen der unabhängigen Variabeln p und q betrachtet werden, das Quadrat des bezüglichen Linearelements habe den Ausdruck $Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$, bei dem nach der getroffenen Voraussetzung das Krümmungsmaass nicht gleich Null sein darf. Hier sind die Polarcoordinaten ϑ und ϕ des dem Punkte (p, q) zugeordneten Punktes der Gaussischen Kugel bestimmte Functionen von p und q. Nun finden sich in III der zweiten Mittheilung die Differentiale dx, dy, dz durch die Differentiale $d\vartheta$ und $d\phi$ so ausgedrückt, dass die Coefficienten aus drei mit den Haupt-

krümmungsradien ρ_1 und ρ_2 und dem Stellungswinkel σ gebildeten Verbindungen linear und homogen zusammengesetzt werden; gleichzeitig umfasst die dortige Gleichung (26) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die betreffenden Ausdrücke vollständige Differentiale sind. Wenn man daher sowohl in den für dx, dy, dz angegebenen Ausdrücken wie auch in der genannten Gleichung (26), III statt ϑ und ϕ die Variabeln p und q einführt, so enthält die aus der Transformation entstehende Gleichung ebenfalls die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Integrabilität für die transformirten Ausdrücke von dx, dy, dz. Die Abhängigkeit der Polarcoordinaten ϑ und ϕ von den Variabeln p und q muss aber so beschaffen sein, dass der in (16), III aufgestellte Ausdruck des Quadrats des Linearelements in den mit den Differentialen dp und dq gebildeten Ausdruck übergeht, oder dass die Gleichung

$$(1)\quad \rho_1^2(\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi)^2 + \rho_2^2(\sin\sigma d\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta d\phi)^2 = E dp^2 + 2F dp\,dq + G dq^2$$

erfüllt ist. Denkt man sich umgekehrt diesen Ausdruck, dessen Krümmungsmaass nicht verschwinden soll, gegeben, und fragt nach der Bestimmung der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z als Functionen von p und q, so hat man die Aufgabe BOUR's auf ein Transformationsproblem zurückgeführt, das jetzt zu erörtern ist.

Wenn die linke und rechte Seite von (1) in je zwei complexe conjugirte, nach den vorkommenden Differentialen lineare Factoren zerlegt werden, so ist vermöge eines bekannten und in der zweiten Mittheilung benutzten Princips der erste Factor der linken Seite gleich dem mit einer Exponentialfunction von rein imaginärem Argument multiplicirten ersten oder zweiten Factor der rechten Seite. Auch hier reicht es wieder aus, von den beiden möglichen Fällen nur den einen vorauszusetzen, da der andere durch eine Vertauschung der Radien ρ_1 und ρ_2 auf den ersten zurückgeführt werden kann. Die beiden complexen Factoren der linken Seite von (1) sind in (28), III angegeben; um die complexen Factoren der rechten Seite zu bilden, werde die Determinante $EG - F^2 = \Delta$ gesetzt. Dann erhält man aus (1) unter Anwendung einer reellen Grösse ψ die Gleichung

$$(2)\quad \frac{\rho_1+\rho_2}{2}(d\vartheta + i\sin\vartheta d\phi) + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}(d\vartheta - i\sin\vartheta d\phi) = e^{-i\sigma-i\psi}\frac{E dp + F dq + i\sqrt{\Delta}\,dq}{\sqrt{E}}.$$

Mit Hülfe derselben ergiebt sich sogleich die Umformung für den in (1), III aufgestellten Ausdruck des reciproken Krümmungsradius eines Normalschnitts der Fläche

$$(3)\quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\xi\,dx + d\eta\,dy + d\zeta\,dz}{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

dessen Zähler in (16), III so bestimmt ist,

$$(4)\quad d\xi dx + d\eta dy + d\zeta dz = \rho_1(\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi)^2 + \rho_2(\sin\sigma d\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta d\phi)^2.$$

Multiplicirt man (2) auf beiden Seiten mit $e^{i\tau}$ und trennt hierauf den reellen und imaginären Theil, so kommt

$$(5)\quad \begin{cases} \rho_1\cos\sigma d\vartheta - \rho_1\sin\sigma\sin\vartheta d\phi = \cos\psi\dfrac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}} + \sin\psi\dfrac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}dq \\ \rho_2\sin\sigma d\vartheta + \rho_2\cos\sigma\sin\vartheta d\phi = -\sin\psi\dfrac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}} + \cos\psi\dfrac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}dq. \end{cases}$$

Auch leuchtet ein, dass ψ den Winkel bedeutet, welchen die Richtung des zu ρ_1 gehörenden Hauptnormalschnittes mit dem Element $\sqrt{E}dp$ der von dem Punkte (p, q) ausgehenden Linie bildet, auf welcher q constant ist. Durch die Substitution von (5) verwandelt sich die rechte Seite von (4) in den Ausdruck

$$(6)\quad \left(\frac{\cos^2\psi}{\rho_1}+\frac{\sin^2\psi}{\rho_2}\right)\left(\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\cos\psi\sin\psi\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}}\frac{\sqrt{\Delta}dq}{\sqrt{E}} + \left(\frac{\sin^2\psi}{\rho_1}+\frac{\cos^2\psi}{\rho_2}\right)\frac{\Delta dq^2}{E}.$$

Demnach führe ich die Bezeichnungen ein

$$(7)\quad H_1 = \frac{\cos^2\psi}{\rho_1}+\frac{\sin^2\psi}{\rho_2},\quad -T = \left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\cos\psi\sin\psi,\quad H = \frac{\sin^2\psi}{\rho_1}+\frac{\cos^2\psi}{\rho_2}$$

und erhalte so aus (3) die Darstellung

$$(8)\quad \frac{1}{\rho} = \frac{H_1(Edp+Fdq)^2 - 2T(Edp+Fdq)\sqrt{\Delta}dq + H\Delta dq^2}{E(Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2)},$$

welche bei der Voraussetzung $E=1$, $F=0$ mit der im Eingange erwähnten Darstellung zusammenfällt.

Um aus (2) die Bestimmung von $d\vartheta$ und $d\phi$ durch dp und dq abzuleiten, werde die Gleichung auf beiden Seiten durch $\sin\vartheta$ dividirt, und die Bezeichnung

$$(9)\quad L + iM = \sin\vartheta e^{i\tau+i\psi}$$

gebraucht. Verbindet man die betreffende Gleichung mit der zu ihr conjugirten und löst dieselben nach den Verbindungen $\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + id\phi$ und $\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} - id\phi$ auf, so findet sich

$$(10)\quad \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + i\vartheta\phi = \frac{1}{L+iM}\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_1\rho_2}\frac{Edp+Fdq+i\sqrt{\Delta}dq}{\sqrt{E}} - \frac{\rho_1-\rho_2}{2\rho_1\rho_2}e^{2i\psi}\frac{Edp+Fdq-i\sqrt{\Delta}dq}{\sqrt{E}}\right).$$

In Folge von (7) ist jedoch

$$(11)\quad H_1 + H = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2},\ H_1 - H - 2iT = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)e^{2i\psi},\ H_1 H - T^2 = \frac{1}{\rho_1\rho_2},$$

und deshalb hat man die Gleichung

$$(12)\quad \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + id\phi = \frac{1}{L+iM}\left((H_1 - iT)\frac{Edp + Fdq}{\sqrt{E}} + i(H + iT)\frac{\sqrt{\Delta}dq}{\sqrt{E}}\right).$$

Es kommt nun darauf an, die Gleichung (26), III oder die mit derselben gleichbedeutende (1), VI so zu transformiren, dass die partiellen Differentiationen nach den Variabeln p und q genommen werden. Zu dem Ende kann man vermittelst zweier verschiedener Differentiations-Charakteristiken d und δ die Gleichung (1), VI durch eine andere ersetzen, in welcher der Linearfactor (2) und der zu ihm conjugirte auftreten. Dieser Process beruht auf der Bemerkung, dass für einen beliebigen Factor R die Relation

$$(13)\quad \delta(Rd\vartheta + iR\sin\vartheta d\phi) - d(R\delta\vartheta + iR\sin\vartheta\delta\phi) = \left(\frac{\partial R}{\partial\phi} - \frac{i\partial(R\sin\vartheta)}{\vartheta\phi}\right)(d\vartheta\delta\phi - d\phi\delta\vartheta)$$

gilt. Wenn daher die aus (1), VI durch Verwandlung von i in $-i$ entstehende Gleichung

$$(14)\quad \frac{\partial\left((\rho_1+\rho_2+(\rho_1-\rho_2)e^{2i\sigma})\sin\vartheta\right)}{\partial\phi} + i\frac{\partial\left((\rho_1+\rho_2-(\rho_1-\rho_2)e^{2i\sigma})\sin^2\vartheta\right)}{\partial\vartheta} - 2i\sin\vartheta\cos\vartheta(\rho_1+\rho_2) = 0$$

mit dem Factor $\frac{1}{2}(d\vartheta\delta\phi - d\phi\delta\vartheta)$ multiplicirt wird, so lässt sie sich folgendermaassen darstellen

$$(15)\quad \begin{aligned}&\delta\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\sin\vartheta(d\vartheta - i\sin\vartheta d\phi) + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{2i\sigma}\sin\vartheta(d\vartheta + i\sin\vartheta d\phi)\right)\\ &- d\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\sin\vartheta(\delta\vartheta - i\sin\vartheta\delta\phi) + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{2i\sigma}\sin\vartheta(\delta\vartheta + i\sin\vartheta\delta\phi)\right)\\ &- i(\rho_1+\rho_2)\sin\vartheta\cos\vartheta(d\vartheta\delta\phi - d\phi\delta\vartheta) = 0.\end{aligned}$$

Für den gegenwärtigen Zweck ist es passend, die Gleichung (1), VI noch auf eine andere ähnliche Weise zu behandeln. Durch $\sin^2\vartheta$ dividirt, kann man ihr zunächst die Gestalt geben

$$(16)\quad \frac{\partial\left(\frac{\rho_1+\rho_2+(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}}{\sin\vartheta}\right)}{\partial\phi} - i\frac{\partial\left(\rho_1+\rho_2-(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}\right)}{\partial\vartheta} + 2i\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma} = 0.$$

Hieraus entsteht durch Multiplication mit dem Factor $\frac{1}{2}(d\vartheta\delta\phi - d\phi\delta\vartheta)$ vermöge (13) die zweite Darstellung

$$(17)\quad \delta\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\cdot\frac{d\vartheta + i\sin\vartheta d\phi}{\sin\vartheta} + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}\frac{d\vartheta - i\sin\vartheta d\phi}{\sin\vartheta}\right)$$
$$- d\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\cdot\frac{\delta\vartheta + i\sin\vartheta\delta\phi}{\sin\vartheta} + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}\frac{\delta\vartheta - i\sin\vartheta\delta\phi}{\sin\vartheta}\right)$$
$$+ i(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}(d\vartheta\delta\phi - d\phi\delta\vartheta) = 0.$$

Für die Ausdrücke, die beziehungsweise in (15) und (17) unter der Charakteristik δ vorkommen, hat man nach (2) mit Berücksichtigung von (9) die Gleichungen

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{\rho_1+\rho_2}{2}\cdot\sin\vartheta(d\vartheta - i\sin\vartheta d\phi) + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{2i\sigma}\sin\vartheta(d\vartheta + i\sin\vartheta d\phi) \\ \qquad = (L+iM)\frac{Edp + Fdq - i\sqrt{\Delta}dq}{\sqrt{E}}, \\ \frac{\rho_1+\rho_2}{2}\cdot\frac{d\vartheta + i\sin\vartheta d\phi}{\sin\vartheta} + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}\frac{d\vartheta - i\sin\vartheta d\phi}{\sin\vartheta} \\ \qquad = \frac{1}{L+iM}\frac{Edp + Fdq + i\sqrt{\Delta}dq}{\sqrt{E}}. \end{cases}$$

Sobald man ferner mit der Gleichung (2) diejenige multiplicirt, welche aus ihr durch Verwandlung des Zeichens d in δ und von i in $-i$ hervorgeht, so liefert die Gleichsetzung der imaginären Theile die Gleichung

$$(19)\quad \rho_1\rho_2\sin\vartheta(d\vartheta\delta\phi - d\phi\delta\vartheta) = \sqrt{\Delta}(dp\delta q - dq\delta p).$$

Da ausserdem

$$\sin^2\vartheta = L^2 + M^2, \quad \cos\vartheta = \sqrt{1 - L^2 - M^2}, \quad \frac{e^{-2i\sigma}}{\sin\vartheta} = \frac{e^{2i\psi}}{(L+iM)^2}$$

ist, so gehen die Gleichungen (15) und (17) respective in die folgenden über

$$(20)\quad \delta\left((L+iM)\frac{Edp + Fdq - i\sqrt{\Delta}dq}{\sqrt{E}}\right) - d\left((L+iM)\frac{E\delta p + F\delta q - i\sqrt{\Delta}\delta q}{\sqrt{E}}\right)$$
$$- i\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}\sqrt{1 - L^2 - M^2}\sqrt{\Delta}(dp\delta q - dq\delta p) = 0,$$

$$(21)\quad \delta\left(\frac{1}{L+iM}\frac{Edp + Fdq + i\sqrt{\Delta}dq}{\sqrt{E}}\right) - d\left(\frac{1}{L+iM}\frac{E\delta p + F\delta q + i\sqrt{\Delta}\delta q}{\sqrt{E}}\right)$$
$$+ i\frac{(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1\rho_2}\frac{e^{2i\psi}}{(L+iM)^2}\sqrt{1 - L^2 - M^2}\sqrt{\Delta}(dp\delta q - dq\delta p) = 0,$$

in welchen p und q als die unabhängigen Variabeln eingeführt sind. Die Factoren $\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}$ und $-\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1\rho_2}e^{2i\psi}$ werden nach (11) unmittelbar durch H_1+H und $H_1-H-2iT$ ausgedrückt. Wenn man jetzt die Charakteristiken δ und d beziehungsweise auf die Producte und Quotienten der entsprechenden Verbindungen anwendet, hierauf (21) mit dem Factor $(L+iM)^2$ multiplicirt, und dann Addition und Subtraction vornimmt, so entstehen die beiden Gleichungen

$$(22)\quad (L+iM)\left(\delta\left(\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}}\right)-d\left(\frac{E\delta p+F\delta q}{\sqrt{E}}\right)\right)-i\delta(L+iM)\frac{\sqrt{\Delta}dq}{\sqrt{E}}$$
$$+id(L+iM)\frac{\sqrt{\Delta}\delta q}{\sqrt{E}}-i(H_1-iT)\sqrt{1-L^2-M^2}\sqrt{\Delta}(dp\delta q-dq\delta p)=0,$$

$$(23)\quad i(L+iM)\left(\delta\left(\frac{\sqrt{\Delta}dq}{\sqrt{E}}\right)-d\left(\frac{\sqrt{\Delta}\delta q}{\sqrt{E}}\right)\right)-\delta(L+iM)\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}}$$
$$+d(L+iM)\frac{E\delta p+F\delta q}{\sqrt{E}}+i(H+iT)\sqrt{1-L^2-M^2}\sqrt{\Delta}(dp\delta q-dq\delta p)=0.$$

Dieselben schliessen in Verbindung mit (12) die sämmtlichen Bedingungen in sich, welche von den sechs Functionen H_1, T, H, L, M, ϕ der Variabeln p und q erfüllt werden müssen, damit eine Oberfläche existire, für welche das Quadrat des Linearelements gleich dem vorgeschriebenen Ausdruck $Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2$ ist.

In Betreff der Gleichung (12) ist zu bemerken, dass man den reellen Theil der linken Seite gleich

$$\frac{1}{\sqrt{1-L^2-M^2}}\,\frac{LdL+MdM}{L^2+M^2}$$

setzen, und die Übereinstimmung mit dem reellen Theil der rechten Seite aus (22) und (23) ableiten kann, indem man, wie später geschehen wird, das Differential $d(L+iM)$ bildet.

Weil die linke Seite von (12) ein vollständiges Differential ist, so muss für die rechte Seite die Bedingung der Integrabilität erfüllt sein, die sich nach (1), II der ersten Mittheilung so ausdrücken lässt,

$$(24)\quad \delta\left(\frac{H_1-iT}{L+iM}\,\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}}+\frac{i(H_1+iT)}{L+iM}\,\frac{\sqrt{\Delta}dq}{\sqrt{E}}\right)$$
$$-d\left(\frac{H_1-iT}{L+iM}\,\frac{E\delta p+F\delta q}{\sqrt{E}}+\frac{i(H+iT)}{L+iM}\,\frac{\sqrt{\Delta}\delta q}{\sqrt{E}}\right)=0.$$

Sobald die Charakteristiken d und δ auf die hier vorkommenden Producte angewendet werden, zeigt es sich, dass die Verbindungen, in welchen $d(L+iM)$ und $\delta(L+iM)$ erscheinen, mit den in (22)

und (23) auftretenden respective gleich sind. Man kann dieselben daher eliminiren, und erhält nach Weglassung des gemeinsamen Factors $\frac{1}{L+iM}$ die folgende Gleichung, welche nur noch H_1, H, T enthält,

$$
\begin{aligned}
(25)\qquad & \delta\left((H_1 - iT)\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}} + i(H+iT)\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}dq\right) \\
& - d\left((H_1 - iT)\frac{E\delta p + F\delta q}{\sqrt{E}} + i(H+iT)\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}\delta q\right) \\
& - i(H_1 - iT)\left(\delta\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}dq\right) - d\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}\delta q\right)\right) \\
& (H+iT)\left(\delta\left(\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}}\right) - d\left(\frac{E\delta p + F\delta q}{\sqrt{E}}\right)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (22) und (23) können als Gleichungen ersten Grades in Bezug auf $d(L+iM)$ und $\delta(L+iM)$ aufgefasst werden, und liefern, nach diesen Verbindungen aufgelöst, die Darstellung

$$
\begin{aligned}
(26)\quad d(L+iM) = {} & i(L+iM)\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}}\,\frac{\delta\left(\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}}\right) - d\left(\frac{E\delta p + F\delta q}{\sqrt{E}}\right)}{\sqrt{\Delta}\,(dp\,\delta q - dq\,\delta p)} \\
& + i(L+iM)\frac{\sqrt{\Delta}\,dq}{\sqrt{E}}\,\frac{\delta\left(\frac{\sqrt{\Delta}\,dq}{\sqrt{E}}\right) - d\left(\frac{\sqrt{\Delta}\,\delta q}{\sqrt{E}}\right)}{\sqrt{\Delta}\,(dp\,\delta q - dq\,\delta p)} \\
& + (H_1 - iT)\sqrt{1 - L^2 - M^2}\,\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}} \\
& + i(H+iT)\sqrt{1 - L^2 - M^2}\,\frac{\sqrt{\Delta}\,dq}{\sqrt{E}}.
\end{aligned}
$$

Bei der Ausführung der bis dahin angedeuteten Differentiationen möge der Winkel Ω eingeführt werden, welchen auf der Fläche das Element $\sqrt{E}dp$ mit dem Element $\sqrt{G}\,dq$ bildet; demnach ist

$$
(27)\qquad F = \sqrt{E}\sqrt{G}\cos\Omega\,,\ \Delta = \sqrt{E}\sqrt{G}\sin\Omega.
$$

So erhält man aus (25) nach Weglassung des Factors $\sqrt{\Delta}(dp\delta q - dq\delta p)$ die gesuchte Gleichung

$$
\begin{aligned}
(28)\qquad & \frac{\partial\left((H_1 - iT)\sqrt{E}\right)}{\partial q} - \frac{\partial\left((H_1 - iT)\sqrt{G}\cos\Omega\right)}{\partial p} + i(H_1 - iT)\frac{\partial\sqrt{G}\sin\Omega}{\partial p} \\
& - i\frac{\partial\left((H+iT)\sqrt{G}\sin\Omega\right)}{\partial p} - (H+iT)\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{G}\cos\Omega}{\partial p}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

und für das Differential $d(L+iM)$ den Ausdruck

$$(29)\qquad d(L+iM)$$
$$= i(L+iM)\left(\frac{1}{\sqrt{G}\sin\Omega}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}-\frac{\partial\sqrt{G}\cos\Omega}{dp}\right)dp+\frac{1}{\sqrt{E}\sin\Omega}\left(\cos\Omega\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial p}\right)dq\right)$$
$$+\sqrt{1-L^2-M^2}\left((H_1-iT)(\sqrt{E}dp+\sqrt{G}\cos\Omega dq)+i(H+iT)\sqrt{G}\sin\Omega\,dq\right).$$

Zugleich geht die Gleichung (12) durch Einführung von Ω in die Gestalt über

$$(12^*)\qquad \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}+id\phi=\frac{1}{L+iM}\left((H_1-iT)(\sqrt{E}dp+\sqrt{G}\cos\Omega dq)+i(H+iT)\sqrt{G}\sin\Omega dq\right).$$

Es bleibt jetzt noch übrig, die Bedingung der Integrabilität für die rechte Seite von (29) aufzustellen. Sobald dies geschieht und die Ausdrücke der partiellen Differentialquotienten von L und M aus (29) gebildet und substituirt werden, so ergiebt sich die Gleichung

$$(30)\qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{G}\sin\Omega}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}-\frac{\partial\sqrt{G}\cos\Omega}{\partial p}\right)\right)}{dq}-\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{E}\sin\Omega}\left(\cos\Omega\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial p}\right)\right)}{dp}$$
$$+\sqrt{E}\sqrt{G}\sin\Omega\,(H_1H-T^2)=0.$$

Dieselbe enthält die Darstellung des Krümmungsmaasses $H_1H-T^2=\frac{1}{\rho_1\rho_2}$, welche zuerst von J. LIOUVILLE in dem Aufsatze: Sur la théorie générale des surfaces, Journal de mathématiques t. 16, p. 130 aufgestellt ist. Nach der vorhin getroffenen Voraussetzung muss der hier erscheinende Werth des Krümmungsmaasses von Null verschieden sein.

Die Gleichungen (28) und (30) stimmen mit denjenigen überein, die Hr. CODAZZI in der Arbeit: Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio, memoria terza, Annali di matematica diretti di F. BRIOSCHI e L. CREMONA, serie II°, tomo II°, p. 270 abgeleitet hat. Wenn die linke Seite von (28) nach Trennung des Reellen und Imaginären mit $U+iV$ bezeichnet wird, so haben die Gleichungen (58) und (59) der angeführten Abhandlung respective die Ausdrücke $V=0$, $U\sin\Omega-V\cos\Omega=0$, und die dortige Gleichung (54) fällt mit der obigen (30) zusammen. Das gleiche Ziel verfolgt die Mittheilung des Hrn. CAYLEY: On the GAUSSian theory of surfaces, Proceedings of the London mathematical society, vol. VII, p. 187. Man ersieht die Beziehung zu den vorstehenden Resultaten, indem man bemerkt, dass Hr. CAYLEY für den reciproken Krümmungsradius eines Normalschnitts der Fläche die Gleichung

$$\frac{1}{\rho}=\frac{E'dp^2+2F'dpdq+G'dq^2}{\sqrt{\Delta}(Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2)}$$

voraussetzt, in Folge deren zwischen H_1, T, H und E', F', G' die Gleichungen gelten

$$\left\{\begin{aligned} H_1 E &= \frac{E'}{\sqrt{\Delta}}, \\ H_1 F - T\sqrt{\Delta} &= \frac{F'}{\sqrt{\Delta}}, \\ \frac{H_1 F^2 - 2TF\sqrt{\Delta} + H\Delta}{E} &= \frac{G'}{\sqrt{\Delta}}. \end{aligned}\right.$$

Bei der zu Anfang erwähnten Voraussetzung, durch welche $E = 1$, $F = 0$, mithin $\cos\Omega = 0$, $\sin\Omega = 1$ wird, nehmen die Gleichungen (28). (30), (29), (12*) die folgende einfachere Gestalt an

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(H - iT)}{\partial q} + i(H_1 - iT)\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial p} - i\frac{\partial\left((H + iT)\sqrt{G}\right)}{\partial p} = 0, \\ &\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial p^2} + \sqrt{G}(H_1 H - T^2) = 0, \\ &d(L + iM) = -i(L + iM)\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial p}dq + \sqrt{1 - L^2 - M^2}\left((H_1 - iT)dp + i(H + iT)\sqrt{G}dq\right). \\ &\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + id\phi = \frac{1}{L + iM}\left((H_1 - iT)\,dp + i(H + iT)\sqrt{G}dq\right). \end{aligned}\right.$$

Aus der ersten Gleichung entstehen durch Trennung des Reellen und Imaginären die beiden von Bour herrührenden partiellen Differentialgleichungen, die mit der darauf folgenden Darstellung des Krümmungsmaasses zusammen Bour's fundamentale Gleichungen ausmachen.

Die Ausdrücke der Differentiale dx, dy, dz in (27). III der zweiten Mittheilung können respective als die reellen Theile der folgenden Ausdrücke aufgefasst werden.

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &-\sin\vartheta\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}(d\vartheta + i\sin\vartheta d\phi) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}e^{-2i\tau}(d\vartheta - i\sin\vartheta d\phi)\right). \\ &(\cos\vartheta\cos\phi + i\sin\phi)\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}(d\vartheta + i\sin\vartheta d\phi) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}e^{-2i\tau}(d\vartheta - i\sin\vartheta d\phi)\right). \\ &(\cos\vartheta\sin\phi - i\cos\phi)\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}(d\vartheta + i\sin\vartheta d\phi) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}e^{-2i\tau}(d\vartheta - i\sin\vartheta d\phi)\right). \end{aligned}\right.$$

Der erste derselben, mit der negativen Einheit multiplicirt, ist zu der linken Seite der ersten Gleichung (18) conjugirt, und wird daher durch den zu der rechten Seite conjugirten Ausdruck in den Differentialen dp und dq dargestellt. Indem man wieder den Winkel Ω einführt, erhält man die verlangten Ausdrücke der Differentiale dx, dy, dz.

$$(33)\quad \begin{cases} dx = -\dfrac{(L-iM)}{2}(\sqrt{E}dp + \sqrt{G}e^{i\Omega}dq) - \dfrac{(L+iM)}{2}(\sqrt{E}dp + \sqrt{G}e^{-i\Omega}dq), \\ dy = \dfrac{\cos\vartheta\cos\phi + i\sin\phi}{\sin\vartheta}\cdot\dfrac{L-iM}{2}(\sqrt{E}dp + \sqrt{G}e^{i\Omega}dq) \\ \qquad + \dfrac{\cos\vartheta\cos\phi - i\sin\phi}{\sin\vartheta}\cdot\dfrac{L+iM}{2}(\sqrt{E}dp + \sqrt{G}e^{-i\Omega}dq), \\ dz = \dfrac{\cos\vartheta\sin\phi - i\cos\phi}{\sin\vartheta}\cdot\dfrac{L-iM}{2}(\sqrt{E}dp + \sqrt{G}e^{i\Omega}dq) \\ \qquad + \dfrac{\cos\vartheta\sin\phi + i\cos\phi}{\sin\vartheta}\cdot\dfrac{L+iM}{2}(\sqrt{E}dp + \sqrt{G}e^{-i\Omega}dq), \end{cases}$$

welche der zu erfüllenden Gleichung

$$(34)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

in ganz allgemeiner Weise Genüge leisten.

Aus den Gleichungen (33) folgen auch die neun zwischen den partiellen von x, y, z nach p und q genommenen Differentialquotienten und den Richtungscosinus der Flächennormale $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\phi$, $\sin\vartheta\sin\phi$ bestehenden Relationen, welche Hr. BELTRAMI in dem Aufsatze: Zur Theorie des Krümmungsmaasses, Mathematische Annalen von CLEBSCH und NEUMANN, Bd. 1. S. 575 mitgetheilt hat, und von denen die sechs ersten, wie daselbst bemerkt ist, aus der Abhandlung des Hrn. BRIOSCHI: Delle coordinate curvilinee, Annali di matematica, Serie II^a, tomo I°, p. 1 entnommen sind.

II.

Denkt man sich ein System von Functionen H_1, T, H gefunden, welches den Gleichungen (28). I und (30), I genügt, so sind dadurch die Hauptkrümmungsradien ρ_1 und ρ_2 und der zugehörige Winkel ψ bestimmt. Die nächste Aufgabe bezieht sich darauf, den in (29), I enthaltenen Forderungen entsprechend die Verbindung $L + iM = \sin\vartheta\, e^{i\sigma + i\psi}$ darzustellen, welche den Stellungswinkel σ und den Winkel ϑ kennen lehrt. Nachdem alsdann durch die Integration des auf der rechten Seite von (12*), I befindlichen vollständigen Differentials der Winkel ϕ bestimmt worden, ist der zugeordnete Punkt der GAUSS'schen Kugel oder die Richtung der Flächennormale fixirt. Schliesslich werden die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, die den Ort im Raume bestimmen, durch die Integration der angegebenen vollständigen Differentiale erhalten. Nun ist klar, dass, wenn eine Fläche den vorgeschriebenen Ausdruck des Linearelements hat, jede Fläche, die aus der ersten durch eine Combination von Verschiebung, Drehung und Abbildung mittelst eines

ebenen Spiegels entsteht, denselben Ausdruck des Linearelements behält. Dann hängen die Differentiale dx, dy, dz der rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der ersten Fläche mit den Differentialen dx', dy', dz' der rechtwinkligen Coordinaten des entsprechenden Punktes der zweiten Fläche durch eine orthogonale Substitution zusammen, deren Coefficienten $c_{11}, c_{12}, \ldots$ constant sind.

$$(1)\qquad \begin{cases} c_{11}dx + c_{12}dy + c_{13}dz = dx' \\ c_{21}dx + c_{22}dy + c_{23}dz = dy' \\ c_{31}dx + c_{32}dy + c_{33}dz = dz' \end{cases}$$

und bei welcher die Gleichung

$$(1^*)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

erfüllt ist. Man kann demnach aus den Ausdrücken von dx, dy, dz in (33), I Ausdrücke von dx', dy', dz' ableiten, welche eine genau entsprechende Darstellung gestatten. Hierbei mögen statt der Grössen L, M, ϑ, ϕ die Grössen $L', M', \vartheta', \phi'$ eintreten, während E, F, G, dp, dq ungeändert bleiben. In Folge dessen gelten zwischen dem ersten und zweiten System von Grössen nothwendig die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(-c_{11} + \dfrac{\cos\vartheta\cos\phi - i\sin\phi}{\sin\vartheta}c_{12} + \dfrac{\cos\vartheta\sin\phi + i\cos\phi}{\sin\vartheta}c_{13}\right)(L+iM) \\ \qquad = -(L'+iM'), \\ \left(-c_{21} + \dfrac{\cos\vartheta\cos\phi - i\sin\phi}{\sin\vartheta}c_{22} + \dfrac{\cos\vartheta\sin\phi + i\cos\phi}{\sin\vartheta}c_{23}\right)(L+iM) \\ \qquad = \dfrac{\cos\vartheta'\cos\phi' - i\sin\phi'}{\sin\vartheta'}(L'+iM'), \\ \left(-c_{31} + \dfrac{\cos\vartheta\cos\phi - i\sin\phi}{\sin\vartheta}c_{32} + \dfrac{\cos\vartheta\sin\phi + i\cos\phi}{\sin\vartheta}c_{33}\right)(L+iM) \\ \qquad = \dfrac{\cos\vartheta'\sin\phi' + i\cos\phi'}{\sin\vartheta'}(L'+iM'). \end{cases}$$

Dagegen müssen die Functionen H_1, T, H, oder, was dasselbe bedeutet, ρ_1, ρ_2, ψ für x, y, z und x', y', z' beziehungsweise gleich sein, so dass wegen der Gleichungen $L+iM = \sin\vartheta\, e^{i\sigma+i\psi}, L'+iM' = \sin\vartheta' e^{i\sigma'+i\psi}$ in (2) überall der gemeinsame Factor $e^{i\psi}$ weggelassen werden kann.

In der That kann man sich davon überzeugen, dass, wenn für ein bestimmtes System von Functionen H_1, T, H ein System von Functionen L, M, ϕ den Gleichungen (29), I und (12*), I genügt, die hieraus nach (2) abgeleiteten Functionen L', M', ϕ' die betreffenden Gleichungen ebenfalls befriedigen, oder dass die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} (L+iM)\left(\dfrac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + id\phi\right) = (L'+iM')\left(\dfrac{d\vartheta'}{\sin\vartheta'} + id\phi'\right) \\ \dfrac{d(L+iM)}{L+iM}\sqrt{1-L^2-M^2}\left(\dfrac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + id\phi\right) = \dfrac{d(L'+iM')}{L'+iM'}\sqrt{1-L'^2-M'^2}\left(\dfrac{d\vartheta'}{\sin\vartheta'} + id\phi'\right) \end{cases}$$

gelten. Substituirt man die erwähnten Ausdrücke von $L + iM$ und $L' + iM'$, so hebt sich in der zweiten Gleichung der reelle Theil fort und man erhält die beiden Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} e^{i\sigma}(d\vartheta + i\sin\vartheta\, d\phi) = e^{i\sigma'}(d\vartheta' + i\sin\vartheta' d\phi') \\ d\sigma - \cos\vartheta\, d\phi = d\sigma' - \cos\vartheta' d\phi'. \end{cases}$$

In den von dem Factor $e^{i\lambda}$ befreiten Gleichungen (2) werde ich links die in (18), III der zweiten Mittheilung definirten Verbindungen $A_1 + iA_2$, $B_1 + iB_2$, $C_1 + iC_2$ einführen, ferner die aus $\sigma', \vartheta', \phi'$ entsprechend gebildeten Ausdrücke durch die gleichnamigen Buchstaben mit hinzugefügten Accenten bezeichnen. Dann entstehen die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} c_{11}(A_1 + iA_2) + c_{12}(B_1 + iB_2) + c_{13}(C_1 + iC_2) = A_1' + iA_2' \\ c_{21}(A_1 + iA_2) + c_{22}(B_1 + iB_2) + c_{23}(C_1 + iC_2) = B_1' + iB_2' \\ c_{31}(A_1 + iA_2) + c_{32}(B_1 + iB_2) + c_{33}(C_1 + iC_2) = C_1' + iC_2', \end{cases}$$

aus denen die Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} c_{11}\xi + c_{12}\eta + c_{13}\zeta = \xi' \\ c_{21}\xi + c_{22}\eta + c_{23}\zeta = \eta' \\ c_{31}\xi + c_{32}\eta + c_{33}\zeta = \zeta' \end{cases}$$

folgen. In der Relation (14), III der zweiten Mittheilung

$$(7)\qquad A_1 d\xi + B_1 d\eta + C_1 d\zeta + i(A_2 d\xi + B_2 d\eta + C_2 d\zeta) = e^{i\sigma}(d\vartheta + i\sin\vartheta d\phi)$$

hat aber die linke Seite die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn statt der eingehenden Grössen die unter Benutzung von (5) und (6) erzeugten mit Accenten versehenen Grössen gesetzt werden, und das gleiche gilt von der linken Seite der Relation

$$(8)\qquad A_1 dA_2 + B_1 dB_2 + C_1 dC_2 = d\sigma - \cos\vartheta\, d\phi,$$

welche man leicht aus (24), IV der zweiten Mittheilung ableitet. Wenn daher die Gleichungen (7) und (8) auch auf die mit Accenten versehenen Grössen angewendet werden, so folgt, dass die auf der rechten Seite befindlichen Ausdrücke ebenfalls ungeändert bleiben, sobald σ, ϑ, ϕ respective durch $\sigma', \vartheta', \phi'$ ersetzt werden, und damit sind die Gleichungen (4) aus den Gleichungen (2) deducirt, wie verlangt worden war.

Es lässt sich aber auch der Nachweis führen, dass bei einem bestimmten System von Functionen H_1, T, H und einem zugehörigen System von Functionen L, M, ϕ jedes andere dem ersten zugehörige System von Functionen L'', M'', ϕ'' in dem System der Ausdrücke (2) enthalten ist. Für je zwei Systeme der bezeichneten Functionen L, M, ϕ und L'', M'', ϕ'', sind nothwendig die Gleichungen

$$(9)\qquad \begin{cases} e^{i\sigma}(d\vartheta + i\sin\vartheta\, d\phi) = e^{i\sigma''}(d\vartheta'' + i\sin\vartheta\, d\phi'') \\ d\sigma - \cos\vartheta\, d\phi = d\sigma'' - \cos\vartheta\, d\phi'' \end{cases}$$

erfüllt. Nimmt man von den beiden Seiten der ersten Gleichung die Norm, so entsteht die Gleichung

$$(10) \qquad d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\phi^2 = d\vartheta''^2 + \sin^2\vartheta''\, d\phi''^2.$$

Aus dieser lässt sich, wie ich in dem letzten Artikel zeigen werde, schliessen, dass die Grössen

$$\begin{aligned} \xi &= \cos\vartheta \quad , \quad \eta = \sin\vartheta\, \cos\phi \quad , \quad \zeta = \sin\vartheta\, \sin\phi, \\ \xi'' &= \cos\vartheta'' \quad , \quad \eta'' = \sin\vartheta''\cos\phi'' \quad , \quad \zeta'' = \sin\vartheta''\sin\phi'' \end{aligned}$$

durch eine orthogonale Substitution in der Weise des Systems (6) verbunden sein müssen, wobei die Coefficienten constant sind. Bildet man jetzt das mittelst der betreffenden Substitution aus den Grössen $A_1 + iA_2$, $B_1 + iB_2$, $C_1 + iC_2$ hervorgehende System von Grössen $A_1'' + iA_2''$, $B_1'' + iB_2''$, $C_1'' + iC_2''$, so kann man diese mit Hülfe einer reellen Grösse χ'' respective so darstellen

$$-e^{i\chi''}\sin\vartheta'' \; , \; e^{i\chi''}(\cos\vartheta''\cos\phi'' - i\sin\phi'') \; , \; e^{i\chi''}(\cos\vartheta''\sin\phi'' + i\cos\phi''),$$

und erhält ein System Gleichungen von der Gestalt des Systems (2), aus dem die Gleichungen

$$(11) \qquad \begin{cases} e^{i\sigma}(d\vartheta + i\sin\vartheta\, d\phi) = e^{i\chi''}(d\vartheta'' + i\sin\vartheta''\, d\phi'') \\ d\sigma - \cos\vartheta\, d\phi = d\chi'' - \cos\vartheta''\, d\phi'' \end{cases}$$

folgen. Auf Grund der Vergleichung mit (9) ergiebt sich dann, dass

$$(12) \qquad e^{i\chi''} = e^{i\sigma''}$$

sein muss, wodurch die aufgestellte Behauptung erwiesen ist.

Hiermit ist die Thatsache festgestellt, dass zu einem System von Functionen H_1 , T , H immer nur solche Systeme von Functionen L , M , ϕ gehören, welche aus einem einzigen System durch Benutzung der allgemeinsten orthogonalen Substitution, deren Coefficienten constant sind, entstehen. Die bei der Integration von dx , dy , dz hinzuzufügenden Constanten entsprechen einer beliebigen Verschiebung der Fläche im Raume. Man darf also das Resultat aussprechen, dass alle Flächen, die einem bestimmten System von Functionen H_1 , T , H correspondiren, aus einer einzigen Fläche durch eine Combination von Verschiebung, Drehung, und Abbildung mittelst eines ebenen Spiegels erhalten werden können. Wesentlich untereinander verschiedene Flächen, deren Linearelement denselben vorgeschriebenen Ausdruck hat, müssen daher von verschiedenen Systemen von Functionen H_1 , T , H herrühren.

III.

Bei einem Ausdruck des Quadrats des Linearelements

$$Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2,$$

für welchen das Krümmungsmaass überall verschwindet, hängt die Aufsuchung aller Flächen, die diesem Linearelement entsprechen, von der Aufsuchung der Ebene ab, welche unter diesen Flächen enthalten ist. Die rechtwinkligen Coordinaten x und y eines Punktes der Ebene müssen aber solche Functionen von p und q sein, welche die Gleichung

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

erfüllen. Dass das durchgängige Verschwinden des Krümmungsmaasses für die Möglichkeit dieser Gleichung nothwendig sei, ist durch GAUSS bekannt. In dem Aufsatze: Sur un théorème de Mr. Gauss concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface, Journal de mathématiques, t. XII, p. 291, hat J. LIOUVILLE den Beweis des umgekehrten Satzes unternommen, dass dieselbe Bedingung auch hinreichend sei. Beide Sätze sind in dem Resultate eingeschlossen, das ich in dem Aufsatze: Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, BORCHARDT's Journal f. Math., Bd. 70, S. 71 begründet habe, nach welchem bei jeder quadratischen Form von beliebig vielen Differentialen das identische Verschwinden einer gewissen derselben zugeordneten quadrilinearen Form die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ausmacht, dass die quadratische Form in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden könne. Soviel ich weiss, ist aber bisher nicht bemerkt worden, dass zu der wirklichen Darstellung von zwei Functionen x und y, welche der obigen Gleichung (1) genügen, nur die Integration von vollständigen Differentialen erfordert wird.

Zerlegt man die linke und rechte Seite von (1) in complexe conjugirte nach den Differentialen lineare Factoren, gebraucht rechts die Bezeichnungen aus (27), I. und führt eine reelle Grösse μ ein, so gilt nothwendig eine der beiden Gleichungen, die aus

$$(2) \qquad dx + \varepsilon i dy = e^{i\mu}(\sqrt{E}dp + \sqrt{G}e^{i\Omega}dq)$$

durch die Annahme $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ entstehen. Insofern die linke Seite in beiden Fällen ein vollständiges Differential ist, muss für die rechte Seite die Bedingung der Integrabilität erfüllt sein, welche die Gleichung

$$(3)\qquad \frac{\partial(\sqrt{E}e^{i\mu})}{\partial q} = \frac{\partial(\sqrt{G}e^{i(\mu+\Omega)})}{\partial p}$$

liefert. Diese zerfällt in die beiden Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial q} = \cos\Omega\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial p} - \sin\Omega\sqrt{G}\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial p} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial p}\right) \\ \sqrt{E}\dfrac{\partial\mu}{\partial q} = \sin\Omega\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial p} + \cos\Omega\sqrt{G}\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial p} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial p}\right), \end{cases}$$

aus denen für die partiellen Differentialquotienten des Winkels μ die Ausdrücke folgen

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\mu}{\partial p} = \dfrac{-\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial q} + \dfrac{\partial\sqrt{G}\cos\Omega}{\partial p}}{\sqrt{G}\sin\Omega} \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial p} = \dfrac{\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial p} - \cos\Omega\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}}{\sqrt{E}\sin\Omega}. \end{cases}$$

Damit diese beiden Gleichungen zusammen bestehen können, muss die Bedingung

$$(6)\qquad \frac{\partial\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}\sin\Omega}\left(\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial q} - \dfrac{\partial\sqrt{G}\cos\Omega}{\partial p}\right)\right)}{\partial q} - \frac{\partial\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}\sin\Omega}\left(\cos\Omega\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial q} - \dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial p}\right)\right)}{\partial p} = 0$$

befriedigt sein, die gerade das durchgängige Verschwinden des Krümmungsmaasses ausdrückt. Ist aber diese Bedingung, wie ich jetzt annehme, erfüllt, so wird der Winkel μ durch die Integration eines vollständigen Differentials so dargestellt

$$(7)\qquad \mu = \int\left(\frac{-\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial q} + \dfrac{\partial\sqrt{G}\cos\Omega}{\partial p}}{\sqrt{G}\sin\Omega}\,dp + \frac{\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial p} - \cos\Omega\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}}{\sqrt{E}\sin\Omega}\,dq\right).$$

Hierauf werden x und y in gleicher Weise folgendermaassen erhalten

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \int\left(\cos\mu\,(\sqrt{E}dp + \sqrt{G}\cos\Omega dq) - \sin\mu\sqrt{G}\sin\Omega dq\right) \\ \varepsilon y = \int\left(\sin\mu(\sqrt{E}dp + \sqrt{G}\cos\Omega dq) + \cos\mu\sqrt{G}\sin\Omega dq\right), \end{cases}$$

womit die aufgestellte Behauptung erledigt ist.

Offenbar erlaubt die Ausführung der Integration (7), aus einer gefundenen Bestimmung von μ durch Addition einer willkürlichen Constante eine zweite abzuleiten. Bei Anwendung der letzteren entstehen für dx und dy neue Ausdrücke, die der Drehung des rechtwinkligen Coordinatensystems um den betreffenden Winkel entsprechen. In gleicher Weise

bringt die Addition von willkürlichen Constanten zu den in (8) gegebenen Ausdrücken von x und y eine Verschiebung des Coordinatensystems hervor. Mithin wird durch das entwickelte Verfahren das System der rechtwinkligen Axen x und y in so weit vollständig bestimmt, dass alle erhaltenen Axensysteme aus einem einzigen durch Verschiebung, Drehung und eine dem Übergehen von $\varepsilon = 1$ zu $\varepsilon = -1$ entsprechende Umlegung hervorgehen. Dass zwischen je zwei Systemen von Functionen x, y und x', y', welche die Forderung (1) erfüllen, die eben bezeichnete geometrische Beziehung obwalten muss, lässt sich auch von vorne herein aus dem Umstande schliessen, dass für dieselben immer die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2 \tag{9}$$

gültig ist.

IV.

Die so eben gemachte Bemerkung gehört demselben Gebiete an wie die gleichfalls noch zu begründende Behauptung, welche sich auf die Gleichung (10), II bezog. Mittelst der Bezeichnungen $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ lässt sich deren Inhalt so ausdrücken, dass, wenn die Gleichungen

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\,, \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1 \\ d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2 \end{cases} \tag{1}$$

gelten, zwischen den reellen Grössen $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ ein System von Gleichungen

$$\begin{cases} c_{11}\xi + c_{12}\eta + c_{13}\zeta = \xi' \\ c_{21}\xi + c_{22}\eta + c_{23}\zeta = \eta' \\ c_{31}\xi + c_{32}\eta + c_{33}\zeta = \zeta' \end{cases} \tag{2}$$

bestehen muss, in dem die Coefficienten $c_{11}, c_{12}, \ldots$ constant sind. Die geometrische Bedeutung ist die, dass, wenn eine Kugelfläche vom Radius Eins auf eine zweite Kugelfläche von demselben Radius so abgebildet ist, dass in den kleinsten Theilen Congruenz stattfindet, die vorhandene Beziehung von der Art sein muss, dass die zweite Kugelfläche durch Drehung und eventuell durch Abbildung mittelst eines ebenen Spiegels mit der ersten zur Deckung gebracht werden kann. Um diesen Satz zu beweisen, kann man ihn auf einen anderen zurückführen, bei dem zwei Systeme von Grössen x, y, z und x', y', z' betrachtet werden, zwischen denen nur die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \tag{3}$$

vorausgesetzt wird. Alsdann erfüllen die zwischen den Differentialen bestehenden Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} c_{11}\,dx + c_{12}\,dy + c_{13}\,dz = dx' \\ c_{21}\,dx + c_{22}\,dy + c_{23}\,dz = dy' \\ c_{31}\,dx + c_{32}\,dy + c_{33}\,dz = dz' \end{cases}$$

nach der Voraussetzung die Gleichung (3), und es bleibt zu zeigen, dass die Coefficienten c_{11}, c_{12}, ... constant sein müssen. Ist dieser Satz festgestellt, so erhält man aus (4) durch Integration ein System von Gleichungen, aus welchem sich die ursprüngliche Behauptung sofort ergiebt. Der zuletzt erwähnte Satz lässt sich geometrisch so ausdrücken, dass, wenn zwei Räume so aufeinander bezogen sind, dass für die kleinsten Theile Congruenz oder symmetrische Congruenz stattfindet, der zweite Raum durch Verschiebung und Drehung, und eventuell durch Abbildung mittelst eines ebenen Spiegels mit dem ersten Raume zur vollständigen Congruenz gebracht werden kann. In der am Schlusse des vorigen Artikels ausgesprochenen Bemerkung ist die correspondirende Eigenschaft der Ebene, in der zu beweisenden Behauptung aus Artikel III die entsprechende Eigenschaft der Kugelfläche enthalten. Meines Erachtens werden durch die drei betreffenden Sätze Grundeigenschaften unserer Vorstellungen von der Ebene, von der Kugelfläche und vom Raume bezeichnet; denn es verursacht grosse Schwierigkeit, die bezüglichen Eigenschaften aus der Vorstellung der Ebene, der Kugelfläche und des Raumes wegzulassen. Dass die Sätze eines Beweises bedürfen, darüber gestattet ihre analytische Formulirung keinen Zweifel. Der Beweis, den ich jetzt mittheilen werde, lässt sich für die Quadratsumme von beliebig vielen Differentialen in ganz derselben Weise führen, als wenn die Zahl der Differentiale bis drei geht.

Es möge daher die Zahl der Variabeln, wie in der ersten Mittheilung, gleich n genommen werden, und man betrachte ein System von n Functionen x_1', x_2', ... x_n' der n Variabeln x_1, x_2, ... x_n, welches der einen Gleichung

$$(5)\qquad dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + \ldots + dx_n'^2$$

genügt. Aus derselben folgen für die Coefficienten der zwischen den Differentialen vorhandenen Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} c_{11}dx_1 + c_{12}dx_2 + \ldots + c_{1n}dx_n = dx_1' \\ c_{21}dx_1 + c_{22}dx_2 + \ldots + c_{2n}dx_n = dx_2' \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}dx_1 + c_{n2}dx_2 + \ldots + c_{nn}dx_n = dx_n' \end{cases}$$

die bekannten Gleichungen

$$(7) \qquad \sum_a c_{ab}^2 = 1, \quad \sum_a c_{ab} c_{ae} = 0;$$

hier werden die Zeiger a, b, e, g wie in der ersten Mittheilung gebraucht, in der zweiten Gleichung sind b und e von einander verschieden vorausgesetzt. Es wird nun bewiesen werden, dass die sämmtlichen Coefficienten c_{ab} von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ unabhängig, das heisst, constant sein müssen.

Für die sämmtlichen auf der linken Seite von (6) stehenden Ausdrücke müssen die Bedingungen der Integrabilität erfüllt sein. Dieselben bilden das System von Gleichungen

$$(8) \qquad \frac{\partial c_{ab}}{\partial x_e} - \frac{\partial c_{ae}}{\partial x_b} = 0.$$

Um zu zeigen, dass die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial c_{ab}}{\partial x_g}$ für alle Combinationen der Zeiger a, b, g gleich Null sind, woraus die behauptete Eigenschaft der Coefficienten c_{ab} folgt, genügt es nachzuweisen, dass die Summen $\sum_a c_{ae} \frac{\partial c_{ab}}{\partial x_g}$ für alle Werthe $e = 1, 2, \ldots n$ verschwinden. Denn die aus den Grössen c_{ae} gebildete Determinante ist bekanntlich gleich der positiven oder negativen Einheit. Man kann aber jede solche Summe in die folgende Gestalt bringen

$$(9) \quad 2\sum_a c_{ae} \frac{\partial c_{ab}}{\partial x_g} = \frac{\partial}{\partial x_g} \sum_a c_{ab} c_{ae} + \frac{\partial}{\partial x_b} \sum_a c_{ae} c_{ag} - \frac{\partial}{\partial x_e} \sum_a c_{ag} c_{ab}$$
$$+ \sum_a c_{ag} \left(\frac{\partial c_{ab}}{\partial x_e} - \frac{\partial c_{ae}}{\partial x_b} \right) - \sum_a c_{ab} \left(\frac{\partial c_{ae}}{\partial x_g} - \frac{\partial c_{ag}}{\partial x_e} \right) - \sum_a c_{ae} \left(\frac{\partial c_{ag}}{\partial x_b} - \frac{\partial c_{ab}}{\partial x_g} \right),$$

deren sechs Summanden wegen der Gleichungen (7) und (8) gleich Null sind. Hiermit ist der erforderliche Beweis geführt. Da nun die sämmtlichen Coefficienten c_{ab} constant sind, so liefert die Integration von (7) das System von Gleichungen

$$(10) \qquad \begin{cases} c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \ldots + c_{1n} x_n = x_1' + \text{const.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1} x_1 + c_{n2} x_2 + \ldots + c_{nn} x_n = x_n' + \text{const.} \end{cases}$$

Man kann jetzt auch bei den gegenwärtigen Systemen von n Variabeln sowohl den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ wie den Grössen $x_1', x_2', \ldots x_n'$ die Bedingung auferlegen, dass die betreffenden Quadratsummen gleich der Einheit sein sollen. Dann gelten alle angewendeten Schlüsse bis zur

Begründung des Systems von Gleichungen (10). Aus den neu hinzugefügten Voraussetzungen folgt aber, dass die zu den Variabeln $x_1', x_2', \ldots x_n'$ auf der rechten Seite zu addirenden Constanten sämmtlich gleich Null sein müssen. Auf diese Weise ergiebt sich für $n = 3$ der auf die Kugelfläche bezügliche Satz, von dem ausgegangen wurde, für einen beliebigen Werth von n eine Ausdehnung desselben auf eine Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen, deren Krümmungsmaass gleich der positiven Einheit ist.

26. Über die Zulässigkeit der Annahme eines elektrischen Sonnen-Potentials und dessen Bedeutung zur Erklärung terrestrischer Phänomene.

Von Werner Siemens.

(Vorgelegt am 31. Mai: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXVI]; — ausgegeben am 7. Juni.)

Mein Bruder, Sir William Siemens, hat in seiner Schrift »On the conservation of solar energy« die Hypothese aufgestellt, dass die Sonne ein hohes elektrisches Potential besässe, welches vielleicht die Lichterscheinung des Zodiakallichtes hervorbrächte. Er erklärt die Entstehung und Erhaltung dieses elektrischen Potentials durch Reibung der nach seiner Theorie der Sonne in ihren Polarregionen aus dem Weltraum zuströmenden, durch die von ihr ausgehenden Licht- und Wärmestrahlen dissociirten Materie. Diese würde nach eingetretener Verdichtung wieder verbrennen und dann dem Sonnenäquator zuströmen. Hierbei würde sie durch Reibung mit dem rotirenden Sonnenkörper elektrisirt werden und dann durch die Centrifugalkraft der Sonnenrotation im elektrisirten Zustande von Neuem im Weltraum verbreitet.

Nimmt man diese von anderen Seiten viel bestrittene Theorie meines Bruders als richtig an, so liegt in der That eine ähnliche Erscheinung vor, wie die von mir beschriebene[1] Elektrisirung der Spitze der Cheops-Pyramide durch den emporwirbelnden Wüstenstaub. Man könnte dann annehmen, dass der als leitend und von dem ihn umgebenden Flammenmeer, der Photosphäre, isolirt gedachte Sonnenkörper die eine der durch die Reibung getrennten Elektricitäten festhielte, während die andere im Weltraum durch Convection verbreitet würde. Da man dann auch annehmen muss, dass diese Convection über die Bahnen der Planeten weit hinausgeht, so müsste der Sonnenkörper für diese ein elektrisches Potential haben und vertheilend auf sie wirken.

Ich will auf den Streit über die Zulässigkeit der Theorie meines Bruders nicht näher eingehen, verkenne auch das Gewicht mancher

[1] Pogg. Ann. Bd. 109. S. 355. 1860.

der dagegen zur Geltung gebrachten Gründe nicht, bin aber der Ansicht, dass die durch diese Theorie gegebene Möglichkeit der Annahme eines elektrischen Sonnen-Potentials in hohem Maasse für sie spricht, da einige der bedeutendsten terrestrischen Naturerscheinungen durch dasselbe ihre bisher vergeblich gesuchte Erklärung finden würden und da andererseits bei dem jetzigen Stande der naturwissenschaftlichen Kenntniss kaum eine andere Erklärung für das Vorhandensein eines elektrischen Sonnen-Potentials zu finden sein wird. Denn bisher ist uns kein Vorgang bekannt, bei welchem nur eine Elektricität hervorgerufen wird. Wir kennen nur Scheidungen der beiden Elektricitäten, und wenn auch solche Scheidungen bei den gewaltigen mechanischen und chemischen Actionen an der Oberfläche des Sonnenkörpers aller Voraussicht nach in sehr hohem Grade auftreten, so müssen sie sich durch Leitung doch innerhalb desselben wieder ausgleichen, und selbst wenn eine dauernde Trennung beider Elektricitäten im Sonnenkörper fortbestände, würde doch keine Fernwirkung einer derselben eintreten können. So lange also nicht neue, noch gänzlich unbekannte Thatsachen auftreten, bleibt die Annahme eines elektrischen Sonnen-Potentials an die Convectionstheorie meines Bruders gebunden!

Ich mag aber nicht unterlassen, kurz auf den gewichtigsten Einwand gegen diese Theorie, der ihr von den HH. Faye und Hirn entgegengestellt ist, einzugehen. Derselbe besteht darin, dass die Unveränderlichkeit der Umlaufzeit der Planeten um die Sonne die Annahme eines mit Materie erfüllten Raumes principiell nicht zuliesse. Die astronomischen Beobachtungen geböten unbedingt die Annahme einer absoluten Leere des Weltraums, da bei der gewaltigen Geschwindigkeit der Fortbewegung der Planeten auch eine äusserst verdünnte Atmosphäre doch noch eine messbare Verminderung der planetarischen Geschwindigkeit, mithin eine Verkürzung ihrer Umlaufzeit hervorbringen müsste. Dies wäre auch richtig, wenn die Voraussetzung zuträfe, dass die Atmosphäre des Weltraums in relativer Ruhe wäre. Das kann aber nicht der Fall sein, wenn der von meinem Bruder angenommene Kreislauf wirklich stattfindet. Man muss annehmen, dass die Sonnenatmosphäre nahe dieselbe Umlaufzeit hat, wie der Sonnenkörper. Eine etwa durch die gewaltigen auf- und niedergehenden Strömungen in der Sonnenatmosphäre, die durch die Verbrennung der durch Ausdehnung abgekühlten Sonnenbestandtheile und die Abkühlung der verbrannten äussersten Schichten der Photosphäre durch Ausstrahlung entstehen müssen, herbeigeführte Differenz in der Rotationsgeschwindigkeit wird durch Reibung der verschieden schnell rotirenden Theile der Sonnenatmosphäre gegen einander fortwährend wieder ausgeglichen werden. Über die Höhe dieser mit dem

Sonnenkörper gleichmässig rotirenden Atmosphäre - ist noch nichts bekannt. Nach Ritter's[1] Berechnungen nimmt zwar die Dichtigkeit der Sonnenatmosphäre nach der sprungförmigen Änderung der adiabatischen Curve in der Region der Photosphäre, in welcher der Wärmezuschuss durch die Verbrennungswärme die der fortschreitenden Verdünnung entsprechende Temperaturabnahme bedeutend verlangsamt, sehr schnell ab — wir kennen aber die Grenze der Verdünnung noch nicht, bis zu welcher das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz in Geltung bleibt. Erreicht die Atmosphäre aber die Grenze, in welcher Anziehungskraft und Centrifugalkraft sich das Gleichgewicht halten, so muss jedes diese überschreitende materielle Molecül von nun ab, wie ein Planet um die Sonne rotiren. Fände ein stetes Nachdringen von neuen diese Grenze erreichenden Massentheilchen statt, so müsste sich hier eine fortschreitende Verdichtung der Materie, mithin ein Ring bilden, der nach den Kepler'schen Gesetzen seine Rotation um die Sonne vollzöge. Diese Ringbildung kann aber bei der vorausgesetzten Continuität der Sonnenatmosphäre nicht eintreten, da die gegenseitige Reibung der Gasschichten auch über die Gleichgewichtsfläche hinaus fortdauert, mithin auch die, bereits in planetarischer Bewegung befindlichen Gasschichten einer Beschleunigung unterliegen. Die Folge muss sein, dass sich mit der Zunahme der Geschwindigkeit auch der Abstand aller dieser Mikro-Planeten von der Sonne fortwährend vergrössert, dass mithin der von meinem Bruder angenommene stetige Ausfluss von Sonnenatmosphäre in den Weltraum wirklich stattfinden muss. Derselbe kann nur in der Zone des Sonnenäquators stattfinden, da hier die Centrifugalkraft bei gleichem Abstande vom Sonnencentrum am grössten ist. Es muss auch angenommen werden, dass die Dichtigkeit dieser, überall in Übereinstimmung mit den Kepler'schen Gesetzen rotirenden Atmosphäre in der Ebene des Sonnenäquators bis auf grosse Entfernungen von der Sonne hinaus constant bleibt, da die Schwerkraft der Sonne überall durch die Umlaufgeschwindigkeit äquilibrirt ist. In den senkrecht auf der Sonnenäquator-Ebene stehenden Richtungen muss die Dichtigkeit dagegen abnehmen, da die Sonnenanziehung sich mit der Entfernung von der Sonnenäquator-Ebene vermindert.

Es folgt aus dieser Betrachtung, dass ein mit der Erscheinung des Zodiakallichts zusammenfallender, von der Sonne ausgehender materieller Strom überall die Umlaufzeit von Planeten haben muss, die sich in dem betreffenden Sonnenabstande befinden. Von einem Widerstande, den Planeten durch die mit ihnen nahe gleichmässig

[1] Pogg. Ann.

sich um die Sonne bewegenden materiellen Theile des interplanetarischen Raumes erführen, kann also keine Rede sein. Nur ein — hier zu vernachlässigender — Widerstand in Folge der Neigung ihrer Ekliptik zur Ebene des Sonnenäquators muss stattfinden, auf den vielleicht die beobachtete Verminderung dieses Neigungswinkels zurückzuführen sein wird. Auch die Satelliten müssen bei der Rotation um ihre Planeten einen Widerstand durch die Atmosphäre des Weltraums erfahren, wie auch die äusserste Grenzschicht der mit den Planeten rotirenden Atmosphäre derselben einen Reibungswiderstand erleiden muss. Vielleicht hat Herr Hirn hinsichtlich des Mondes recht mit seiner Behauptung, dass bei der grossen Bewegungsgeschwindigkeit der Himmelskörper auch das verdünnteste widerstehende Medium die Atmosphäre derselben fortfegen müsste!

Viele Beobachtungen machen es sehr wahrscheinlich, dass der Weltraum wenigstens innerhalb der Region unseres Sonnensystems mit brennbarem Stoffe erfüllt ist. Es spricht dies indirect auch sehr entschieden für die Annahme meines Bruders, dass die Verbrennungsproducte im Zustande grösster Verdünnung und sehr niedriger Temperatur durch die Sonnenstrahlen wieder dissociirt sind. Der gemachte Einwand, dass die Dissociationsarbeit die Energie der Lichtstrahlen absorbiren würde und der Weltraum dadurch undurchsichtig werden müsse, liesse sich durch die Annahme beseitigen, dass es nur die unsichtbaren, chemisch wirkenden Strahlen sind, welche die Dissociationsarbeit verrichten. Man kann aber auch annehmen, dass die Dissociationsarbeit im Laufe der Zeiten bereits vollführt ist, und dass jetzt nur noch die von der Sonne fortdauernd ausgehende noch chemisch verbundene Masse von ihren Lichtstrahlen zu dissociiren ist — wozu nur ein Theil der Lichtenergie verbraucht würde. Es wäre ohne die Annahme der Dissociation nicht recht erklärlich, warum der Weltraum nicht, wie die Atmosphäre der Erde wesentlich mit Sauerstoff, Stickstoff und Wasserdampf erfüllt wäre. Es lässt sich doch nicht annehmen, dass die Zusammensetzung des Sonnenkörpers eine wesentlich verschiedene von der der Erde ist, wenn beide aus derselben rotirenden kosmischen Nebelmasse hervorgegangen sind, da eine Scheidung der Materie nach dem specifischen Gewichte bei gasförmigem Zustande nicht anzunehmen ist. Es müssen daher, wenigstens in unserm Sonnensystem, die elektronegativen Stoffe überall vorherrschend sein, und es ist anzunehmen, dass auch die erkaltete ausgebrannte Sonne dereinst von einer Sauerstoff im Überschuss enthaltenden Atmosphäre umgeben sein wird. Ist aber der Weltraum mit dissociirten Verbrennungsproducten in grosser Verdünnung erfüllt, so müssen dieselben der Sonnenattraction überall da anheim fallen,

wo sie nicht, wie in der Nähe der Äquatorialebene der Sonne, ihrer Anziehung durch die planetarische Rotation entzogen sind. Es muss daher namentlich in den Polarregionen, wo die Centrifugalkraft ganz fehlt, ein steter Zustrom dissociirter Materie zur Sonne stattfinden, wie mein Bruder es annimmt. Bleibt die Sonnenmasse, wie wohl vorauszusetzen ist, unverändert dieselbe, so heisst das, dass ein Gleichgewichtszustand eingetreten ist, bei welchem ebenso viel verbrannte Materie von der Sonne in ihrer Äquatorialzone ausströmt, wie ihr durch Massenanziehung im dissociirten Zustande in den Polarregionen wieder zugeführt wird. Demnach würde denn auch die Strömung von den Polen zum Äquator, sowie auch die nachgewiesene geringere Winkelgeschwindigkeit der Rotation der gasförmigen Sonnenmasse in ihren höheren Breiten gegeben sein.

Wenn hierdurch aber auch die Möglichkeit der Entstehung eines elektrischen Sonnen-Potentials durch Friction und continuirliche Entfernung der mit der einen Elektricität geladenen Körpertheile von der Sonne gegeben ist, so bleibt der Mechanismus dieser Elektrisirung doch noch sehr dunkel. Das Licht der Sonne geht von einem Flammenmeere aus, welches nach RITTER's schönen Rechnungen eine Dicke von ca. 25 ^{km} haben muss. Ob eine Flamme verbrennender Gase von dieser Dicke noch viel Wärme und Lichtstrahlen einer heisseren Emissionsquelle durchlassen, wie viel sie von denselben absorbiren oder wie eine Wolkenschicht zurückwerfen wird, können wir nicht wissen. Ich habe kürzlich[1] den Nachweis geführt, dass Gase, welche bis auf 1500—2000 ° C. erhitzt sind, noch vollständig dunkel erscheinen, während sie die langsamer schwingenden Wärmestrahlen schon bei geringer Temperaturerhöhung emittiren. Ob Gase bei noch weit höherer Erhitzung selbstleuchtend werden, ist durch das Experiment bisher nicht festgestellt. Da eine kleine Flamme aber im helleren Lichte schon einen Schatten wirft, so erscheint es unwahrscheinlich, dass viele der von tieferen und heisseren Sonnenschichten ausgehenden Licht- und Wärmestrahlen die mächtige Photosphäre zu durchdringen vermögen. Die beobachtete Sonnentemperatur und das Sonnenlicht sind dann Erscheinungen, die ihren Ursprung wesentlich in der chemischen Thätigkeit haben, die in der Sonnenatmosphäre verläuft. Diese bedingt, dass die im dissociirten Zustande aufsteigende und dabei durch Volumvergrösserung sich abkühlende Sonnenatmosphäre zu verbrennen beginnt, wenn die Dissociationstemperaturgrenze für die betreffende Verbindung überschritten ist, und dass diese Verbrennung so lange fortdauert, bis der Wärmeverlust

[1] Sitzungsber. der Akad. der Wiss. — Wied. Ann. Bd. XVIII S. 311—316. 1883.

durch Ausdehnung gleich der freigewordenen Verbrennungswärme ist. Die scheinbare Sonnentemperatur wird daher annähernd die Dissociationstemperatur sein und zwar die Dissociationstemperatur derjenigen Verbindungen, welche das grösste chemische Wärmeäquivalent haben, mithin des Wassers, dessen Bestandtheile in grösster Höhe verbrennen werden, während die schwereren und zugleich eine höhere Dissociationstemperatur besitzenden Massen schon in niedrigeren Regionen verbrennen. Um diesen Auftrieb der dissociirten Sonnenbestandtheile und ihre damit verbundene Verbrennung im Gange zu erhalten, müssen die endlichen Verbrennungsproducte zum Sonnenkörper zurückkehren. Wie Faye, Ritter und Andere schon dargelegt haben, geschieht dies einmal deswegen, weil die Verbrennungsproducte ein grösseres specifisches Gewicht haben, als die unverbrannten Gase, und zweitens in Folge der Abkühlung der höheren Schichten der Photosphäre durch Wärme- und Lichtstrahlung. Dadurch wird das adiabatische Gleichgewicht der über einander gelagerten Gasschichten gestört und die relativ schwerer gewordenen höheren müssen in niedergehenden Strömen zur Sonnentiefe zurückkehren. Dass diese niedergehenden Ströme nur in mittleren Sonnenbreiten als Sonnenflecken sichtbar werden, hat seinen Grund darin, dass nur hier die Bedingungen für eine rotirende Bewegung des niedergehenden Stromes vorhanden sind, wodurch demselben eine verticale Richtung gegeben wird. Die trichterförmige Verminderung des Durchmessers der Sonnenflecke ist die Folge der grossen Volumverminderung durch den rasch zunehmenden Druck. Der innere Raum der Trichter muss relativ dunkel sein, da hier die leuchtende Flammenbildung fehlt, da die Temperatur um den Betrag der Dissociations-Wärme geringer sein muss, als die umgebende noch unverbrannte Sonnensubstanz, und da vielleicht schon Condensations-Producte auftreten, welche als Schirm die Strahlung der heller leuchtenden tieferen Sonnenschichten zurückhalten. Andererseits ist es nicht unwahrscheinlich, dass die hoch auflodernden Sonnenfackeln aus Blasen von richtig gemischtem Knallgas oder mit Sauerstoff im richtigen Verhältniss gemischtem Kohlengase bestehen, welche in Folge geringeren specifischen Gewichtes und grösserer Wärmeentbindung bei der Verbrennung unter Durchbrechung der Penumbra und der Photosphäre hoch emporgetrieben werden und bei der Abwesenheit leuchtender Flammenbestandtheile die Strahlen der heisseren tieferen Sonnenschichten zum Theil durchlassen. Die mechanisch kaum zulässige kolossale Geschwindigkeit des Aufleuchtens mancher Fackeln könnte dann in dieser Strahlung aus der Sonnentiefe ihre Erklärung finden. Mein Bruder nimmt in einem neuerdings publicirten Nachtrage zu seiner Sonnentheorie an, der Sonnen-

körper selber könne nicht heisser wie etwa 3000 ° C. sein, da bei höherer Temperatur die chemischen Strahlen die überwiegenden würden und bei sehr viel höherer Temperatur die Sonne sogar zu leuchten aufhören müsste. Es könnte das richtig sein, wenn die Photosphäre nicht als Schirm die heisseren Strahlen des Sonnenkörpers zurückhielte, wie es wahrscheinlich ist. In der That können wir aus Analogien der Beobachtungen keinen einigermassen sicheren Schluss ziehen, ob ein auf Hunderttausende oder gar Millionen von Graden erhitzter Körper noch leuchten wird. Es könnten von ihm sogar nur Strahlen so geringer Wellenlänge ausgehen, dass sie auch keine chemische Arbeit mehr leisteten! Dann wäre der scheinbar dunkle Kern der Sonnenflecke auch so zu erklären, dass die flammenlosen, durch eintretende Dissociation relativ abgekühlten, zur Sonne zurückkehrenden Verbrennungsproducte durchsichtig blieben und den für die Lichtstrahlung zu hoch erhitzten tieferen Sonnenschichten die Durchstrahlung gestatteten! Dafür würde sogar die violette Farbe der Kerne der Sonnenflecke sprechen. Für darstellbare Temperaturen gilt allerdings das Gesetz, dass neben den der höheren Temperatur entsprechenden schnellen Ätherschwingungen auch die ganze Scala der langsameren auftritt, ob sich das aber bei so ungemein viel höheren Temperaturen nicht ändert, kann man allerdings nicht wissen.

Es war nöthig, auf die wahrscheinliche Beschaffenheit des Sonnenkörpers und seiner Licht und Wärme ausstrahlenden Umhüllung etwas näher einzugehen, um eine Grundlage für die Beantwortung der Frage zu gewinnen, ob bei dem jetzigen Umfange unseres Wissens die Annahme eines elektrischen Sonnen-Potentials als zulässig erscheint. Wie schon hervorgehoben, ist seine Entstehung nur denkbar, wenn ein Scheidungsvorgang beider Elektricitäten an der Sonnenoberfläche stattfindet und wenn gleichzeitig die eine der geschiedenen Elektricitäten abgeleitet wird. Da die Flamme ein guter Leiter der Elektricität ist, so kann man die ganze Photosphäre und die wahrscheinlich auch schon an dem Verbrennungsvorgange theilnehmende Penumbra als einen leitenden Mantel betrachten, welcher den heisseren Sonnenkörper umhüllt. Da Flammen ferner die Eigenschaft haben, in ähnlicher Weise, wie Spitzen, die Elektricität an ihre Umgebung, hier also an ihre gasförmigen Verbrennungsproducte zu übertragen, so muss die Photosphäre durch eine theilweise Ausströmung der Verbrennungsproducte in den Weltraum continuirlich entladen werden. Wäre also die Photosphäre von dem noch nicht in der Verbrennung begriffenen tieferen Sonnenkörper isolirt und dieser als ein Leiter der Elektricität zu betrachten, so könnte er elektrisch geladen werden durch Reibungs- oder auch chemische Vorgänge, die zwischen dem leitenden Sonnen-

körper und der Photosphäre stattfänden. Die Frage, ob heisse Gase Leiter der Elektricität sind, auch wenn keine Flammenerscheinung in ihnen stattfindet, ist noch nicht durch directe Versuche entschieden. Dass die Gase, wie alle Körper, Leiter der Elektricität werden, wenn die dielektrische Polarisation ihrer Molecüle ihr Maximum erreicht hat, und dass dies Polarisationsmaximum mit der Verdünnung der Gase — mithin auch mit ihrer Erwärmung vom absoluten o-Punkt ab gerechnet — proportional abnimmt, habe ich bereits im Jahre 1857[1] bei Beschreibung meines Ozon-Apparates nachgewiesen. Es unterscheiden sich danach Leiter von Nichtleitern nur dadurch, dass bei ersteren das Polarisationsmaximum verschwindend klein ist. Dass bei sehr hoch erhitzten Gasen das Polarisationsmaximum, wie bei den metallischen Leitern, verschwindend klein werden sollte, ist kaum anzunehmen. Directe Versuche über die dielektrischen Eigenschaften hocherhitzter flammenfreier Gase sind mir nicht bekannt, doch lassen sich die Erscheinungen des elektrischen Funkens, sowie die Leuchterscheinung in dem Ozon-Apparat und den Geissler'schen Röhren, so wie auch die schönen Versuche von Hittorf[2] auch ohne die Annahme, dass sehr hoch erhitzte Gase in anderer Weise leiten, wie kalte von gleicher Dichte, erklären. Die hohe Temperatur der Sonnengase scheint daher bisher kein Hinderniss zu sein, ihnen isolirende Eigenschaften zuzuschreiben. Ihr Polarisationsmaximum wird sogar, der Dichte der Sonnenatmosphäre entsprechend, trotz ihrer hohen Temperatur grösser sein, als das unserer kalten atmosphärischen Luft.

Ganz andere Verhältnisse können aber eintreten bei Eintritt des kritischen Zustandes in grösseren Sonnentiefen. Für die elektrische

[1] Pogg. Ann. Bd. 102 S. 66.

[2] Hr. Hittorf sagt in einer Mittheilung in Bd. XIX von Wied Ann. S. 73, dass meine der Akademie am 9. November 1882 gemachte Mittheilung, dass Gase bei Temperaturen von 1500 bis 2000° C. noch vollständig dunkel erscheinen, wenn sie vollkommen flammenfrei sind, und dass das Leuchten der Gase beim Durchgange eines elektrischen Stromes ein ähnlicher Vorgang sei, wie das Leuchten einer Flamme, welche keine festen Bestandtheile ausscheidet, von ihm selbst und Anderen schon früher bekannt gemacht sei. Ich gebe dies hinsichtlich des Nichtleuchtens heisser Gase gern zu, habe überhaupt keine Prioritätsansprüche an diese Mittheilung geknüpft, glaube jedoch, dass ich zuerst experimentell nachgewiesen habe, dass so hoch erhitzte Gase wirklich vollkommen dunkel erscheinen, wenn auch die heisse Luftschicht über ein Meter dick ist, und das Auge durch volle Dunkelheit den höchsten Grad von Empfindlichkeit angenommen hat. Die Hittorf'schen Versuche wiesen nur eine relative Dunkelheit heisser Gase nach. Die Leitungsfähigkeit der Gase anlangend, die Faraday für hohe Spannungen schon annahm, so habe ich in meinem oben angeführten ca. 25 Jahre älteren Aufsatze bereits das allgemeine Gesetz aufgestellt, nach welchem die Leitungsfähigkeit der Gase beginnt. Hierauf möchte ich auch Hrn. Eilhard Wiedemann hinweisen, welcher die Priorität für die Erklärung des Leuchtens der Gase beim Durchgange eines elektrischen Stromes als Folge einer dielektrischen Polarisation in Anspruch nimmt.

Eigenschaft des kritischen Zustandes haben wir weder Versuche noch Analogien, können daher das Sonnen-Innere auch als eine metallisch, d. i. mit verschwindend kleinem Polarisationsmaximum, leitende Masse annehmen. Die Oberfläche dieser im kritischen Molecularzustande befindlichen Sonnenmasse könnte dann ein elektrisches Potential haben. Es müsste hierbei aber die Frage in Betracht gezogen werden, ob die leitende Photosphäre nicht an ihrer dem Sonnen-Innern zugewandten Fläche durch Vertheilung elektrisch werden könnte, so dass die Sonne mit ihrer sie umhüllenden Photosphäre selbst eine gewaltige Leydener Flasche bildete, wodurch eine Fernwirkung der Elektricität des leitenden Sonnenkerns grösstentheils ausgeschlossen würde. Ohne Weiteres liess sich dies nicht annehmen, da die Leitungsfähigkeit der Flamme offenbar ganz andere, direct mit dem Verbrennungsvorgange selbst zusammenhängende Ursachen hat, wie die der nicht in chemischer Action befindlichen leitenden Körper, so dass eine Analogie zwischen beiden hinsichtlich ihrer elektrischen Vertheilungsfähigkeit kaum zu ziehen ist. Ich habe daher einige Versuche darüber angestellt, ob eine Flamme der Influenzwirkung in gleicher Weise unterliegt, wie andere Leiter, und diese Versuche haben die Voraussetzung bestätigt. Danach können zwei von einander isolirte Flammen in gleicher Weise als Belegungen einer geladenen Leydener Flasche auftreten, wie andere Leiter.[1] Es muss hiernach angenommen werden,

[1] Der Versuch wurde in der Weise angestellt, dass ein ringförmiger Gasbrenner isolirt wurde. Bei geöffnetem Gashahn erhob sich über demselben eine etwa 15 cm hohe cylindrische Flamme von ca. 2 cm Durchmesser. Die Flamme durchstrich einen isolirt angebrachten, sie concentrisch umgebenden Metallcylinder von ca. 8 cm Durchmesser. Zur Herstellung der leitenden Verbindung mit der Flamme wurde ein isolirter kreisförmig gebogener Platindraht in den untern Theil der Flamme gelegt. Die zwischen diesem Platindraht und dem Metallcylinder durch eine galvanische Kette von 50 Daniells stattfindende Ladung wurde nun mit Hülfe meiner bekannten schnell oscillirenden elektro-magnetischen Wippe gemessen, und zwar abwechselnd bei fast ganz geschlossenem und bei geöffnetem Gashahn. Die Differenz der Ablenkungen des Spiegelgalvanometers war dann ein Maass der Capacität der aus Flamme und Metallcylinder gebildeten Leydener Flasche. Die erzielten Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Zahl der Oscillationen der Wippe pro Minute	Differenz der Scalenablenkung zwischen niedriger und hoher Flamme	Grösse einer Entladung
310	3	96
600	6	100
700	8	115
1000	12	120

Die wachsenden Zahlen der letzten Colonne zeigen, dass bei langsamen Schwingungen ein Theil der Flaschenladung durch Leitung verloren ging.

dass der Sitz der Sonnenelektricität wesentlich in der Photosphäre zu suchen ist und nicht in dem Sonnenkörper selbst. Die elektrischen Eigenschaften der Flamme sind — trotz aller bisher mit denselben angestellten Versuche — noch sehr unklar. Namentlich ist noch nicht entscheidend festgestellt, ob eine durch sie selbstthätig erzeugte Potentialdifferenz zwischen den verschiedenen Zonen der Flamme, besonders zwischen derjenigen, wo die Verbrennungserscheinung beginnt, und der, wo sie erlischt, besteht oder nicht. Wäre dies der Fall, wie aus einigen Versuchen von Riess und Anderen wahrscheinlich erscheint, so könnte auch hierin bei den gewaltigen Dimensionen des die Sonne umgebenden Flammenmeeres und bei den ihnen entsprechenden grossen Differenzen in der Temperatur und der Dichtigkeit die Ursache der Sonnenelektricität gesucht werden, da die Elektricität der äusseren Schichten der Photosphäre dann auf die Verbrennungsproducte überginge und mit ihnen nach der Theorie meines Bruders zum Theil in der Richtung der Rotationsebene der Sonne im Weltraum verbreitet würde. Mag aber der Elektrisirungsvorgang in der Sonnenverbrennung selbst, in der Reibung der aus dem Weltraum ihr zuströmenden Materie oder in anderen noch unbekannten Ursachen zu suchen sein — die Möglichkeit der Existenz eines elektrischen Sonnen-Potentials ist durch die äquatoriale Ausbreitung von Verbrennungsproducten der Sonne im Weltraum gegeben.

Diese Möglichkeit erhebt sich aber zum Range grosser Wahrscheinlichkeit, wenn man die Leichtigkeit betrachtet, mit welcher sich schwierige, bisher noch ungelöste Probleme terrestrischer Naturerscheinungen mit Hülfe eines elektrischen Sonnen-Potentials lösen lassen. Hat die Sonne ein hohes elektrisches Potential, so muss sie vertheilend auf alle Himmelskörper, also auch auf die Erde wirken. Eine Ansammlung entgegengesetzter Elektricität auf ihrer ganzen Oberfläche kann aber auch bei ihr nur stattfinden, wenn die frei werdende entgegengesetzte Elektricität abgeleitet wird. Diese Ableitung ist ebenfalls nur denkbar durch Verbreitung im Weltraum. Es ist ohngefähr derselbe Vorgang, wie er stattfindet, wenn einem geladenen kugelförmigen Conductor eine kleinere isolirte Kugel gegenübergestellt wird. Die Kugel nimmt dann allmählich eine entgegengesetzte Ladung an, während die gleiche Elektricität sich durch Zerstreuung im Raume verliert. Bei der Erde wird diese Zerstreuung der durch Sonnenvertheilung entstandenen sogenannten freien Elektricität noch durch die grosse Verdünnung der höheren Luftschichten und die auf- und niedersteigenden mit Feuchtigkeit beladenen Luftströme wesentlich begünstigt, da durch diese den höheren Schichten sehr verdünnter Luft die freie Elektricität zugeführt wird. Dass in diesen verdünnten

höheren Luftschichten elektrische Strömungen vor sich gehen, beweisen die Nord- und Südlichter. Man könnte dieselben als den an der Grenze der Erdatmosphäre stattfindenden elektrischen Ausgleich zwischen der von der Sonne mit negativer Ladung ausströmenden Materie und der freigewordenen positiven Influenzelektricität der Erde betrachten. Dieser Ausgleich wird immer dann auftreten müssen, wenn durch Änderung des Sonnen-Potentials auch das der Erde geändert wird. Zur Herstellung des Gleichgewichtes muss dann positive oder negative Elektricität von der Erde ausströmen, es muss also entweder ein Ausgleich mit der von der Sonne ausströmenden negativen Elektricität an der Grenze der Atmosphäre stattfinden, oder es muss diese der Erde zufliessen. Dass dieser Austausch vorzugsweise in den Polargegenden der Erde stattfindet, kann darin seinen Grund haben, dass die polare Luft stärker elektrisch ist, da sie durch die äquatoriale Luftströmung in den oberen Regionen der Atmosphäre fortwährend durch diese stärker elektrisirte Luft verdrängt wird, mithin in ihrer ganzen Masse die Elektricität der höchsten Luftschichten niederer Breiten annehmen muss. Die mit den Nord- und Südlichtern in innigem Zusammenhang stehenden Erdströme sind dann als eine nothwendige Consequenz des vorzugsweise in den Polargegenden stattfindenden Ausgleiches der Intensitätsschwankungen der Sonnen- und Erdelektricität zu betrachten. Diese Ausgleichsströme müssen ihrerseits durch ihre elektrodynamische Wirkung die Magnetnadel beeinflussen.

Es drängt sich hier aber die Frage auf, ob nicht der Erdmagnetismus selbst als eine elektrodynamische Wirkung der elektrischen Ladung der Erde aufzufassen ist. Nach der schönen Untersuchung, die Hr. Rowland im Helmholtz'schen Cabinet unter dessen Leitung angestellt hat,[1] ist es als nachgewiesen zu betrachten, dass mechanisch fortbewegte stationäre Elektricität elektrodynamische Wirkungen in ähnlicher Weise ausübt, wie ein elektrischer Strom. Danach muss die Erde, wenn ihre Oberfläche mit Elektricität grosser Dichtigkeit geladen ist, in Folge ihrer Rotation in gleicher Weise magnetische Erscheinungen zeigen, wie wenn elektrische Ströme sie umkreisten, die während der Zeit einer Umdrehung in jeder Breite ebenso viel Elektricität um sie herumführten, wie die statische Elektricität beträgt, die auf dem betreffenden Oberflächenringe sich befindet. Wie gross die Dichtigkeit der Elektricität auf der Erdoberfläche sein müsste, um durch ihre Rotation den Erdmagnetismus hervorzubringen, wird geübten Mathematikern nicht schwer fallen zu berechnen. Da das

[1] Monatsber. d. Berl. Akad. d. Wissenschaften.

magnetische Moment eines Kreisstromes im Verhältniss der umströmten Fläche steht, so wird sich dieselbe voraussichtlich bei den grossen Dimensionen der Erde nicht als unzulässig gross herausstellen. Ferner wird bei den kolossalen Dimensionen der Sonne, deren Oberfläche 11483 Erdoberflächen enthält, während die Entfernung der Sonne nur 22934 Erdhalbmesser beträgt, die Dichtigkeit der Sonnenelektricität nur etwa doppelt so gross, wie die der Erde zu sein brauchen, um diese durch elektrische Vertheilung hervorzurufen. Wäre die Erdoberfläche ganz gleichmässig mit Elektricität beladen, so müssten die magnetischen Pole mit den Rotationspolen der Erde zusammenfallen. Da dem nicht so ist und da überhaupt grosse Unregelmässigkeiten in der Vertheilung des Erdmagnetismus auf der Erdoberfläche stattfinden, so muss die Vertheilung der ruhenden Elektricität auf der Erdoberfläche eine unregelmässige sein. Es erscheint dies auch wahrscheinlich, wenn man bedenkt, dass circa $^1/_3$ der Erdoberfläche aus Festland besteht, welches grossentheils Felsboden hat, der von schlecht leitendem Erdreich oft nur dünn bedeckt ist. Die Ansammlung der Influenzelektricität wird daher hier vorzugsweise auf der Oberfläche des glühenden, gut leitenden Erdinnern zu suchen sein, durch deren grösseren Abstand von der Erdoberfläche der überwiegende Einfluss der zunächst liegenden in convectiver Bewegung befindlichen Elektricitäts-Massen vermindert wird. Ob sich die bestehende Vertheilung des Erdmagnetismus, sowie die beobachteten periodischen und unregelmässigen Störungen desselben aus dieser Theorie über die Ursache der erdmagnetischen Erscheinung werden herleiten lassen — muss späterer eingehender Forschung anheimfallen. Die täglichen regelmässigen Störungen könnten darin ihre Erklärung finden, dass die Dichtigkeit der Influenzelektricität auf der der Sonne abgewendeten Seite etwas geringer sein muss, wie auf der ihr zugewendeten. Diese von der Stellung der Sonne abhängende ungleiche Dichtigkeit der Erdelektricität muss mit der Rotation der Erde fortschreiten, kann daher die Ursache der von Lamont erörterten regelmässigen äquatorialen Erdströme sein. Ebenso können die magnetischen Störungen des Mondes in der Rückwirkung der Mondelektricität auf die Vertheilung der Influenzelektricität der Erde ihre Erklärung finden. Dagegen wird die säculäre Änderung der Lage der magnetischen Pole wohl nur auf kosmische, noch ganz unerkannte Ursachen zurückzuführen sein.

Mag diese Theorie aber auch noch vieles unerklärt lassen, so gewährt sie doch wenigstens die Möglichkeit, eine Erklärung für die Entstehung des Erdmagnetismus im Anschluss an unsere bisherigen Erfahrungen zu geben. Es ist dies bei keiner der bisherigen Theorien der Fall. Der Annahme eines Centralmagneten im Innern der Erde

widerspricht schon die allgemeine Erfahrung, dass die Glühhitze den Magnetismus aller Körper vernichtet. Ohne gänzlich von der Erfahrungsgrundlage abzusehen, kann man daher die Annahme eines Centralmagneten nicht aufrecht erhalten. Der Annahme einer Schicht magnetischer Erze in der Erdkruste als Sitz des Erdmagnetismus widerspricht einmal die Rechnung, da der Magnetismus einer solchen Schicht, auch wenn sie möglichst dick und zum Maximo magnetisirt angenommen wird, nicht ausreichen würde, um den vorhandenen Erdmagnetismus hervorzubringen; dann aber auch die Unmöglichkeit, einen Grund für die Entstehung der Magnetisirung dieser Erzschicht aufzufinden, da dieselbe doch nicht von Anfang an vorhanden gewesen sein kann, sondern erst nach der Erkaltung der Erde entstanden sein müsste. Dasselbe würde von der nach FARADAY's Entdeckung der magnetischen Eigenschaften des Sauerstoffs der Luft aufgestellten Theorie, dass der Sauerstoff der Luft der Sitz des Erdmagnetismus wäre, geltend zu machen sein, wenn nicht die Rechnung schon ergäbe, dass der Sitz dieses Magnetismus sich nicht ausserhalb der Erdoberfläche befinden kann. Ebenso wenig können die aufgestellten Theorieen des Erdmagnetismus, welche auf thermoelektrischen Strömen oder, wie ZÖLLNER es versuchte, auf Convectionsströmen im flüssigen Erdinnern beruhen, Beachtung finden, da in einem nach allen Seiten gleich gut leitenden Medium solche Ströme gar nicht zur Erscheinung kommen können. Übrigens ist auch für die Existenz fortdauernder regelmässiger Strömungen des flüssigen Erdinnern gar keine Ursache aufzufinden.

In ähnlicher Weise, wie ein elektrisches Sonnen-Potential die Möglichkeit der Erklärung des Erdmagnetismus mit den ihm verwandten Erscheinungen der Nord- und Südlichter und der Erdströme gewährt, giebt es auch eine Handhabe für die Erklärung der Luftelektricität und der Gewittererscheinungen. Dass die Erde negativ elektrisch geladen sein müsste, nahm schon LAMONT an zur Erklärung der so wechselnden und unsteten Luftelektricität. Seine Ansicht, dass diese elektrische Ladung durch thermoelektrische Differenzen zu erklären sei, ist aber ebenso wenig haltbar, wie die Ansicht, dass Reibungsvorgänge ein elektrisches Erdpotential erzeugen könnten. Ein solches kann nur durch kosmische Influenz und Ableitung der frei werdenden gleichen Elektricität durch Verbreitung im Raume oder Neutralisirung mit der entgegengesetzt geladenen Materie, die von der Sonne in der Richtung der Ebene des Sonnenäquators ausfliesst, entstehen. Nimmt man aber an, dass dies der Fall sei, dass mithin die Erde mit der Sonne einen elektrischen Ansammlungsapparat bildet, dessen trennendes Dielectricum die Atmosphäre der Sonne und Erde

und der mit äusserst verdünnter Materie erfüllte interplanetare Raum ist, so sind alle von LAMONT und Anderen aus der elektrischen Ladung der Erde gezogenen Schlussfolgerungen berechtigt. Zur Erklärung der Gewitterelektricität scheint aber doch die geringfügige und wechselnde atmosphärische Elektricität, auf die sie bisher zurückgeführt wird, nicht ausreichend zu sein. Das plötzliche Auftreten so gewaltiger Massen Elektricität, wie sie namentlich bei tropischen Gewittern zur Erscheinung kommen, weist die Annahme zurück, dass dieselbe ihren Sitz in der schwachen elektrischen Ladung der verhältnissmässig geringen Luftmenge, die den Träger der Gewitterwolken bildet, gehabt habe. Es müssen ergiebigere Quellen sein, denen sie entstammt. Eine solche Quelle von unerschöpflicher Mächtigkeit findet sich in der elektrischen Ladung der Erde durch Sonnen-Influenz. Wenn man einer grossen elektrisch geladenen Kugel einen leitenden Gegenstand nähert, so unterliegt derselbe der vertheilenden Wirkung der auf der Oberfläche der Kugel befindlichen Elektricität. Findet die in dem Theile des Leiters, welcher der Kugel am entferntesten ist, angesammelte gleichartige Elektricität eine Ableitung nach benachbarten, noch weiter entfernten Leitern, so wird der erstere Leiter dauernd mit Elektricität geladen, deren Polarität der der Kugel entgegengesetzt ist. Ist die Erhebung des Leiters über die Oberfläche aber nur gering im Verhältniss zum Durchmesser der Kugel, so kann auch die Spannungsdifferenz zwischen der Kugelfläche und dem entferntesten Punkte der Erhebung nur gering sein. Aus diesem Grunde kann auch bei einer grossen Dichtigkeit der Elektricität auf der Erdoberfläche auf derselben doch keine elektrische Abstossung stattfinden und selbst auf Bergspitzen kann sie noch nicht sehr bemerklich sein. Anders aber gestaltet sich das Verhältniss, wenn eine Kugel durch Influenz einer entfernten elektrischen Kugel geladen ist. Die nach der FARADAY-schen Molecular-Vertheilungstheorie von der ladenden zur geladenen und abgeleiteten Kugel gehenden Kraftlinien treffen die letztere überall fast senkrecht und bei grossem Abstande der influenzirend auf einander wirkenden Kugeln im Verhältniss zu den Durchmessern der Kugeln in nahe gleicher Anzahl auf der der vertheilenden Kugel zugewandten, wie der abgewandten Seite. Nähert man nun einen isolirten, leitenden Schirm, der einen Theil der Oberfläche der influenzirten Kugel bedeckt, der letzteren, so wird er bei geringer Dicke nicht merklich elektrisch. Sobald man jedoch den Schirm ableitend berührt, nimmt er die der Kugel entgegengesetzte Elektricität an, während die gleiche abgeleitet wird. Entgegengesetzt ist das Verhalten, wenn der Schirm mit der Kugel selbst leitend verbunden wird. Dann bildet der Schirm einen Theil der Kugeloberfläche und nimmt

die elektrische Ladung derselben an, wobei diese unter dem Schirm unelektrisch wird. Als solche Schirme treten nun auf der Erdoberfläche die Gewitterwolken auf. Denkt man sich einen solchen Wolkenschirm in der Bildung über einem Theile der Erdoberfläche begriffen, so wird derselbe unbeeinflusst durch die Erdelektricität bleiben, solange die leitenden Wassertheilchen sich isolirt und in grösserem Abstande von einander befinden. Nebel und leichte Wolken werden daher nicht elektrisch werden. Sobald aber der Nebel sich so weit verdichtet hat, dass seine leitenden Theile in Berührung mit einander kommen, oder die Entfernung zwischen ihnen so klein wird, dass schon Elektricität sehr geringer Spannung den Zwischenraum überspringen kann, so unterliegt die Wolke dem Vertheilungsvorgange. Dieser kann einmal dadurch eingeleitet werden, dass sie durch aufsteigende Wolkenwirbel bis in sehr hohe Regionen hinauf leitende Verbindung mit dort befindlichen Wolken erhält. Dann nimmt diese leitend zusammenhängende Wolke in ihren unteren Theilen die der Erdelektricität entgegengesetzte Elektrisirung an, während die obere die ihr gleiche aufnimmt. Es kann eine dichte leitende Wolkenbank aber auch an einer oder mehreren Stellen mit der Erde selbst in leitende Verbindung kommen. Dann bildet sie einen Theil der leitenden Erdoberfläche und nimmt die Elektricität derselben an.[1] Der letztere Vorgang wird am

---

[1] Bei einer Reise auf dem mittelländischen Meere hatte ich in der Nähe der spanischen Küste zwischen Carthagena und Almeria im Winter 1865 Gelegenheit, den Verlauf der Erscheinung einer Wasserhose zu beobachten, welcher mir entschieden für diese Auffassung zu sprechen scheint.

Zwischen dem Schiffe und der Küste in der Nähe von Almeria zeigte sich bei lebhaft bewegter, sogenannter todter See ohne wesentliche Luftbewegung eine schwarze, dichte, aber, wie es schien, nicht hohe Wolkenbank, unter welcher das Meer in wildester Bewegung zu sein schien. Es erschien dort als ein weisser, hoch aufschäumender, ziemlich runder Fleck, dessen Durchmesser die Seeleute auf 2 bis 3 Seemeilen schätzten, während seine Umgebung nur glatte Wellenzüge ohne alle Sturzwellen zeigte. Trotz der beträchtlichen Entfernung des Schiffes von der heftig bewegten Stelle, die mehrere Seemeilen betrug, konnte man doch deutlich durch das Fernrohr erkennen, dass die wilde Brandung der Meeresoberfläche sich mehrere Meter über die scharf abgegrenzte Oberfläche des relativ ruhigen Meeresspiegels erhob. Die Wolke senkte sich an einer Stelle trichterförmig nieder und bildete einen dem Rüssel eines Elephanten ähnlichen gekrümmten Wolkenstreifen, der bis ziemlich nahe zu der schäumenden Meeresfläche hinabreichte und sich unten etwas verästelte. Eine vollständige Berührung mit der schäumigen Fläche war nicht zu erkennen, auch fand auffallender Weise unter dem Wolkenrüssel kein stärkeres Schäumen des Meeres, als an den übrigen Stellen statt. Der Rüssel selbst rotirte langsam, wenn ich mich recht erinnere, im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers über dem weissen Fleck, und zwar nahm auch seine Verbindungsstelle mit der Wolke an dieser Bewegung Theil, wenn auch nicht in gleichem Umfange. Leider entzog uns die einbrechende Nacht und die wachsende Entfernung nach etwa halbstündiger Beobachtung, während welcher der Rüssel etwa anderthalb Umdrehungen gemacht hatte, wobei seine Spitze sich constant

leichtesten eintreten am Abhange steiler Berge, an die die Wolkenschichten sich anlehnen. Gebirge sind daher häufig Gewitterbildner. Bei der Entstehung der die Träger der Gewitterelektricität bildenden Wolken scheint die Elektricität keine wesentliche Rolle zu spielen. Die Ursache der Wolkenbildung ist der Regel nach in der auf- und niedergehenden Luftbewegung zu suchen, welcher nicht nur diese und der den Wolken entfallende Regen, sondern auch die Entfesselung der Stürme fast ausschliesslich zuzuschreiben ist. Die hierüber in der Meteorologie vielfach noch herrschenden Anschauungen bedürfen meiner Ansicht nach in einigen Punkten der Berichtigung. Würde das Gleichgewicht des Luftmeeres nicht stets durch die ungleiche Erwärmung und Abkühlung der Luft durch die Strahlung gestört, so müssten Temperatur und Dichtigkeit der Atmosphäre bis zur grössten Höhe im sogenannten indifferenten Gleichgewicht sein und zwar in der Weise, dass der Temperaturverlust bei zunehmender Höhe der Ausdehnungsarbeit des Gases überall äquivalent wäre. Die höhere Lufttemperatur der niederen Breiten würde sich durch langsam verlaufende Wirbel mit horizontaler Rotationsaxe, wie die Passatwinde sie in grossem Maassstabe darstellen, ausgleichen und schliesslich würde das ganze Luftmeer in gleichen Höhen gleiche Temperatur haben. Dieses indifferente oder auch adiabatische Gleichgewicht wird nun durch vorzugsweise Erwärmung der Erdoberfläche und der unteren Luftschichten durch die Sonnenstrahlung durch die Absorbtion derselben beim Durchgang durch die Atmosphäre und die vorzugsweise Abkühlung der höheren Schichten durch Ausstrahlung fortwährend gestört. Es werden dadurch die unteren Schichten leichter und die oberen schwerer, wie es das adiabatische Gleichgewicht bedingt, und diese Störung muss sich durch auf- und niedergehende Strömungen in der Atmosphäre ausgleichen.

---

auf etwa ⅓ des Radius des weissen Fleckes von dessen Rande erhielt, die weitere Betrachtung dieses interessanten Phänomens, welches mit mir mein Bruder William und seine Frau, sowie die zur Besatzung des französischen Kabelschiffes, auf welchem wir uns befanden, gehörigen Marineoffiziere mit grösster Spannung verfolgten. Von einer Wirbelbewegung war bei demselben nichts zu bemerken. Es herrschte beinahe Windstille. Es konnte nur eine rein elektrische Erscheinung sein, die in einer elektrischen Strömung von der Erde zur Wolke bestehen musste. Nimmt man an, dass diese Strömung an einer Stelle so stark geworden war, dass sich hier durch elektrische Fortführung der Flüssigkeit eine leitende Wasserstrasse zwischen Meer und Wolke bildete, so erklärt sich auch die Rotation des Rüssels unter dem Einflusse des Erdmagnetismus. Während der Nacht tobte an der spanischen Küste ein Gewitter, dessen Entstehung wir wahrscheinlich in der Trombe beobachtet hatten. Doch schien diese selbst ihren Lauf später von der spanischen nach der afrikanischen Küste gerichtet zu haben, denn gegen Ende der Nacht wurde unser Schiff nahe derselben von einem nur wenige Minuten andauernden, so furchtbaren Unwetter befallen, dass es dadurch in die grösste Gefahr gerieth, und die Seeleute der festen Ansicht waren, die Trombe sei über das Schiff fortgegangen.

Da aufsteigende Luft, welche am Erdboden wärmer geworden ist, wie es der adiabatischen Temperaturcurve entspricht, diesen Wärmeüberschuss beim Emporsteigen beibehält, der Auftrieb aber mit der wachsenden Höhe des aufgehenden Luftstromes zunimmt, weil die am Erdboden nachströmenden Luftschichten immer denselben Temperaturüberschuss haben, so muss der Aufstrom an den Stellen, wo er einmal durch besonders günstige locale Verhältnisse entstanden ist, so lange fortdauern, bis der Temperaturunterschied ausgeglichen ist. Die durch den Aufstrom der relativ leichteren Luft und den Niedergang der durch Strahlung abgekühlten, relativ schwereren an anderen Stellen geleistete Arbeit muss sich in lebendige Kraft umsetzen, indem sie die Luft in lebhaftere Bewegung versetzt. Es wird dies wesentlich durch die Volumvergrösserung der aufsteigenden Luft durch Druckverminderung bewirkt. Da bei dem grossen Durchmesser der Erdkugel der Luftraum mit der Höhe nur unmerklich grösser wird, so muss die Geschwindigkeit der aufsteigenden Luft schon aus diesem Grunde nahe proportional der Druckverminderung zunehmen. In den höchsten Luftregionen, bis zu denen jeder sich bildende Aufstrom gelangen wird, muss daher die Luftgeschwindigkeit eine sehr bedeutende sein, und mit der gleichen Geschwindigkeit muss hier die umgebende ruhige Luft zur Seite gedrängt werden, um Platz für die angekommene zu schaffen. Diese Verdrängung wird namentlich nach der Richtung hin stattfinden, wo ein niedergehender Luftstrom sich gebildet hat zum Ersatz der auf der Erdoberfläche zur Stelle des Aufstromes nachströmenden überhitzten Luft. Diese niederströmende Luft verdichtet sich nun zwar beim Niedergange wieder der jeweiligen Höhe entsprechend, sie behält aber dabei die in den oberen Regionen erhaltene Geschwindigkeit bei. Es ist ersichtlich, dass das Endresultat eine sehr grosse Luftgeschwindigkeit auf der Erdoberfläche sein kann, wenn die Störung des adiabatischen Gleichgewichtes eine qualitativ und quantitativ beträchtliche war. Diese localen Stürme, deren Richtung durch die Rotation der Erde nach dem Dove'schen Drehungsgesetze modificirt wird, müssen besonders heftig werden, wenn der Aufstrom selbst ein engbegrenzter ist, da dann der Ausgleichungsprocess, d. i. die Umwandlung der in der Gleichgewichtsstörung angesammelten Energie in Luftgeschwindigkeit, auf eine verhältnissmässig geringe Luftmenge beschränkt ist. Doch auch starke, über ganze Continente fortgehende Stürme können durch aufsteigende Luftströme von grosser räumlicher Ausdehnung erzeugt werden. Dass der niedergehende Luftstrom eine Druckvermehrung auf dem Erdboden, der aufgehende eine Verminderung des Luftdrucks bedingt, folgt aus den mechanischen Bewegungsgesetzen. Doch muss

auch schon die Bewegung der Luft an sich stets ein Sinken des Barometerstandes verursachen, da die bewegte Luft die ruhende an der Berührungsgrenze mit fortreisst, mithin eine Verdünnung der ruhenden bewirkt. Das Endresultat des Störungsausgleichs wird daher ein Überführen immer grösserer Luftmassen in wirbelnde Bewegung und schliesslich eine Rückbildung der lebendigen Kraft durch Reibung in Wärme sein.

Es folgt aus dieser Betrachtung, dass der Wasserdampf in der Luft nicht die grosse Rolle bei der Luftbewegung spielt, die ihm gewöhnlich beigelegt wird, da sich Luftbewegungs- und Luftdrucks-Erscheinungen auch ohne den Wassergehalt der Luft erklären lassen. Man muss nur den Sitz der Stürme, d. i. hier den Ort der Beschleunigung der Luftmassen, nicht an der Erdoberfläche, sondern wesentlich in den höchsten Luftregionen suchen. Bestände die Atmosphäre nur aus Wasserdampf, so würden die Erscheinungen ganz ähnliche sein. Der Wasserdampf unterliegt dem adiabatischen Ausdehnungsgesetze ebenso, wie die Luft, nur vermindern sich bei ihm Dichtigkeit und Temperatur mit wachsender Höhe weit weniger, als bei den permanenten Gasen der Atmosphäre. Nach Ritter würde eine Dampfatmosphäre ca. 13mal höher sein, als eine Luftatmosphäre. Es findet zwar nach Clausius und Sir William Thomson bei der adiabatischen Ausdehnung des Dampfes eine fortwährende Condensation statt, doch muss dieselbe in den Höhen, in denen erfahrungsmässig die Wolkenbildung eintritt, noch zu gering sein, um die beobachteten Niederschläge hervorzubringen. Der Grund der bei aufgehenden Luftströmen eintretenden Condensation liegt wesentlich darin, dass der Wasserdampf mit der Luft innig gemischt ist und dass derselbe im aufgehenden Strome nicht die ihm zukommende adiabatische Temperatur annimmt, sondern die der weit überwiegenden Luftmasse, mit welcher er gemischt ist. Da die Luft sich nun mit steigender Höhe weit schneller abkühlt, wie der Dampf, so wird dieser unter die ihm angehörige adiabatische Temperatur abgekühlt, und diese Temperaturverminderung verursacht seine Condensation, wenn der Sättigungspunkt des Dampfes überschritten wird.

Gegen diese Auffassung spricht scheinbar der Umstand, dass durch Luftfahrer wiederholt constatirt ist, dass Schichten wärmerer Luft häufig über kälteren gelagert sind, während das adiabatische Ausdehnungsgesetz eine stetige Abnahme des Drucks und der Temperatur verlangt. Es erklärt sich dies aber leicht durch die ungleiche Beschaffenheit der Erdoberfläche, welche bedingt, dass der aufsteigende Luftstrom zu manchen Zeiten und an manchen Orten eine viel höhere Temperatur und einen weit grösseren Wasserdampfgehalt hat, als an

anderen Orten. Ist der Wassergehalt einer solchen heissen aufsteigenden Luftmasse so gross, dass das Wasser zum Theil während des Aufganges ausgeschieden wird und als Regen niederfällt, so wird die in den oberen Schichten der Atmosphäre eingetroffene Luft durch die von ihr aufgenommene latente Wärme des Wasserdampfes noch weiter erwärmt und dadurch ihr Volumen und Auftrieb vergrössert, und das Endresultat muss eine relativ warme, verhältnissmässig wasserarme Luftschicht sein, die dann durch Ausdehnungs-Strömung über kältere, aber mehr Wasserdampf enthaltende und dadurch leichtere fortgeschoben wird.[1] Es sind dies leicht erklärliche Abweichungen von der Regel, dass Temperatur und Dichtigkeit der Atmosphäre mit steigender Höhe abnehmen, der Wassergehalt dagegen zunehmen muss. Letzteres muss wenigstens für höhere Breiten die Regel sein, da die in den Calmen continuirlich aufsteigenden warmen Luftmassen mit relativ grossem Wassergehalte zwar zum grossen Theile auf ihrem Wege zu höheren Breiten nach Verlust ihrer grösseren Wärme durch Ausstrahlung als niedergehende Ströme wieder zum Erdboden niedersinken, zum Theil jedoch als oberer Äquatorialstrom auch die hohen Breiten erreichen müssen. In diesem grösseren Wassergehalte der höheren Schichten der Atmosphäre ist der Grund zu suchen, warum auch bei niedergehenden Luftströmen Regenfälle eintreten können. Ist die Temperatur einer sehr wasserhaltigen oberen Strömung durch Strahlung bis unter den Sättigungspunkt des Dampfes abgekühlt, so bilden sich die Cirrus-Wolken, die wahrscheinlich aus Eisnadeln bestehen.[2] Die dadurch frei werdende latente Dampf- und Wasserwärme wird diese Luftschichten wieder erwärmen und den Process der Bildung schwererer Schneewolken längere Zeit hinausziehen, ist er aber durch fortdauernden

---

[1] Krönig hat bereits den Nachweis geführt, dass der mit einem aufsteigenden Strome gemischte Wasserdampf durch seine Condensation keine Volumverminderung, sondern eine Volumvergrösserung herbeiführt, da die latente Wärme des Dampfes das Volumen der Luft weit mehr vergrössert, als das Volumen des condensirten Dampfes beträgt. Fortschr. d. Phys. Bd. XX S. 626.

[2] Es ist jedoch höchst wahrscheinlich, dass sowohl Wasser wie Dampf in den hohen Luftregionen ihren Aggregatzustand bis weit unter die Temperatur ihres Gefrier- resp. Condensationspunktes beibehalten. Dass das Wasser ohne Gegenwart von die Krystallisation einleitenden festen Körpern und ohne heftige Erschütterungen bis weit unter — 20° abgekühlt werden kann, ohne zu gefrieren, steht fest. Dass Dampf in gleicher Weise die Dampfform unter seinem Condensationspunkte noch beibehalten kann, steht experimentell noch nicht fest. Wir kennen nur die Verzögerung des Siedepunktes, die so häufig zu Dampfkessel-Explosionen Veranlassung giebt. Es ist jedenfalls nicht unwahrscheinlich, dass dieser Verzögerung des Siedens auch eine Verzögerung der Condensation gegenübersteht. Durch Versuche lässt sich dies nur schwer constatiren, da die Mittel fehlen, eine Dampfmasse ausser Berührung mit festen oder flüssigen Körpern abzukühlen. Es ist ohne diese Annahme nicht gut zu erklären, warum der Himmel nicht immer ganz mit Cirrus-Wolken bedeckt ist —

Wärmeverlust durch Ausstrahlung vollendet, so muss das Gewicht des keinen in Betracht kommenden Raum mehr ausfüllenden Eises das adiabatische Gleichgewicht stören, und ein Niedersinken der Wolkenmasse eintreten. Bei der dabei eintretenden Verdichtung und Erwärmung wird der Schnee wieder geschmolzen und die dazu nöthige latente Wärme der Luft entzogen. Das adiabatische Gleichgewicht wird daher progressiv in noch höherem Maasse gestört, und das Endresultat wird ein kalter niedergehender Luftstrom mit Regen sein. Die Dichtigkeit dieser langsam niedersinkenden Regenwolken wird aber nicht gross genug sein, um die Wolke elektrisch leitend zu machen, es wird mithin keine Elektricitätsbildung durch Vertheilung eintreten. Anders aber wird sich der Verlauf gestalten, wenn durch locale Überhitzung der dem Erdboden benachbarten Luftschichten ein localer Aufstrom mit Regenfall entsteht. Dann kann der Aufstrom eine Geschwindigkeit annehmen, die grösser ist, als die Fallgeschwindigkeit der gebildeten Wassertropfen in der widerstehenden Luft; diese werden daher in die höheren Regionen, deren Temperatur weit unter dem Eispunkte liegt, mit in die Höhe gewirbelt und werden zu Hagelkörnern gefrieren. Durch die schnelle Volumvergrösserung und die ihr entsprechende seitliche Ausbreitung des beschleunigten Luftstromes werden die benachbarten relativ feuchten und kalten höheren Luftschichten in Wirbel mit horizontaler Drehaxe versetzt, die sich mit dem um eine senkrechte Axe rotirenden aufsteigenden Wirbel combiniren. Die heftige Wirbelbewegung, in welche das bisher ruhige, überkühlte Luftmeer hierdurch versetzt wird, wird in demselben nun eine plötzliche Wasser- und Eisbildung herbeiführen. Die Wirbel mit horizontaler Drehaxe können dabei einen grossen Durchmesser annehmen und die Eiskörner wiederholt in die Eisregion hinaufschleudern, bis sie zu schwer geworden sind und als Hagelkörner oder nach Durchlaufung tieferer warmer Luftschichten als kalte Regentropfen zu Boden fallen. Durch diese in kurzer Zeit eintretende starke Regenbildung werden die Wassertheile der Wolkenstrasse bis zu den höchsten Luftschichten hin nun so dicht an einander geführt, dass sie ein Leiter der Elektricität wird, mithin auch der elektrischen Vertheilung unterworfen ist. Ist sie an irgend einer Stelle in leitender Verbindung mit der Erde, so muss die Erdelektricität in sie einströmen, und sie erhält dann die gleiche Elektricität; ist sie es nicht, so wird sie in der Nähe der Erde ihr entgegengesetzt geladen, während die gleiche Elektricität durch die leitende

---

es müsste denn angenommen werden, dass flüssig gewordene Wassertheilchen in der grossen Verdünnung der höheren Luftschichten nicht als Wolken erscheinen.

Wirbelwolke in die höheren Regionen entweicht. Wo die Leitung der Wolke unvollständig ist, wird sie durch Blitze, welche zwischen den von einander isolirten Wolkenschichten oder zwischen Wolke und Erde überspringen, vorübergehend hergestellt und schliesslich wird beim Vorübergehen des Wirbelsturmes und der Auflösung der durch ihn gebildeten Wolke die ganze Elektricität durch Blitze sich mit der Erdelektricität wieder ausgleichen oder zum Theil zur Luft als Luftelektricität übergehen.

Manche Beobachtungen von Gewitterbildung sind von hohen Bergspitzen oder vom Luftballon aus gemacht, welche fast alle von mehrfachen Wolkenschichten über einander sprachen, die in Verbindung mit einander standen oder zwischen denen Blitze übersprangen. Die lehrreichste Beschreibung ist die des Hrn. Wite,[1] der von einem Luftballon aus die Entstehung eines starken Gewitters beobachtete. »Er sah zwei Wolkenschichten etwa 2000 Fuss über einander, von denen die obere Schnee, Regen und Hagel der unteren zusandte. Zwischen beiden bewegten sich geräuschlos gelbliche wellenähnliche Lichtmassen. Elektrische Entladungen mit Blitz und Donner ereigneten sich immer in der unteren Schicht, doch war das Gewitter über beiden Schichten weit stärker, als unter denselben. Die obere Schicht war durch Westwind in starker Bewegung.« Dass der Beobachter nur zwei über einander befindliche Wolken beobachten konnte, ist erklärlich, da sein Ballon sich in der Höhe des Zwischenraumes beider befand. Es ist anzunehmen, dass noch mehrere solcher Wolkenschichten bis zu den höchsten Luftregionen hinauf vorhanden gewesen sind, zwischen denen der beobachtete Niederschlag und der elektrische Leitungsvorgang stattfand. Durch den namentlich aus der Mitte der oberen Wolkenschicht niederströmenden starken Regen wurden die Wolkenschichten leitend mit einander verbunden und unterlagen dadurch dem elektrischen Vertheilungsvorgange.

Es könnte der Theorie des elektrischen Sonnen-Potentials noch der Einwand entgegengestellt werden, dass die elektrische Anziehung zwischen der Sonne und den Planeten und die Abstossung, welche letztere auf einander und auf ihre Trabanten ausüben müssten, die Grundlage der astronomischen Rechnungen modificiren würde, da neben der Gravitation dann noch eine weitere Kraft, die elektrische, in Rechnung zu ziehen sei.

Dieser Einwand ist vollkommen berechtigt. Da aber die elektrische Kraft ebenso, wie die Gravitation, im Verhältniss der Quadrate des Abstandes der Mittelpunkte steht, so würden die Bahnen der

[1] Fortschr. d. Phys. 1852 S. 762.

Planeten unverändert bleiben, wenn ein Theil der Gravitationsanziehung durch eine elektrische ersetzt wird. Nur das berechnete Verhältniss der Massen der Sonne und der Planeten zu der der Erde würde sich ändern. Diese Änderungen müssten namentlich bei den kleinen Planeten und den Trabanten bemerklich werden, da die elektrische Kraft eine Oberflächenfunction ist. Dagegen müssen die störenden Einflüsse, welche die Planeten und deren Trabanten gegenseitig auf ihre Bahnen ausüben, sich ändern, wenn die Gravitation durch elektrische Abstossung vermindert wird.

Vielleicht ist es der Astronomie vorbehalten, aus den Störungen der Bahnen des Merkurs, der Asteroiden und der Trabanten den Beweis der Existenz oder Nichtexistenz eines elektrischen Sonnen-Potentials zu führen.

27. Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge.

Dritter Beitrag.

Folgerungen die galvanische Polarisation betreffend.

Von H. von Helmholtz.

(Vorgelegt am 10. Mai: — gedruckt im Bericht vom 31. Mai [St. XXVI]: — ausgegeben am 7. Juni.)

Zur Vorgeschichte der in meiner ersten Mittheilung »zur Thermodynamik chemischer Vorgänge« vom 2. Februar 1882 entwickelten Sätze erlaube ich mir hier nachzutragen, dass, wie ich seitdem gefunden, zunächst Lord Rayleigh in einem vor der Royal Institution am 5. März 1875 gehaltenen Vortrage es als allgemeines Princip ausgesprochen hat, dass nicht die Wärmeentwickelung allein über die Möglichkeit entscheide, ob eine chemische Veränderung in bestimmter Richtung eintrete, sondern dass dies nur geschehen könne, wenn dabei die Entropie (dissipation of Energy) wachse, oder wenigstens nicht abnehme.

Dass die Wärmeentwickelung allein genommen namentlich nicht für die Grösse der elektromotorischen Kräfte galvanischer Elemente entscheidend sei, hat Hr. F. Braun in einer Reihe von Aufsätzen vom Jahre 1878[1] anfangend, ausgesprochen und durch eine Anzahl wichtiger Versuche erwiesen. Die theoretische Auffassung freilich, von der er in den ersten dieser Aufsätze ausgegangen ist, namentlich der Satz, dass »die chemische Energie von der Natur der Wärme sei,« dass jeder chemische Vorgang zunächst immer nur Wärme erzeuge, und dass es nur von zufälligen Nebenumständen abhänge, wie viel von der hohen Temperatur der eben verbundenen Atome in reversible Arbeit anderer Art verwandelt werde, ist meines Erachtens in Widerspruch mit den Thatsachen, welche zeigen, dass galvanische Ketten auch unter Bindung von Wärme arbeiten können. Ein Process, wie ihn Hr. Braun dort angenommen hat, würde nicht reversibel sein, und also, wenn er bei Auflösung eines Metalls eintritt, nicht auch bei der Ausscheidung desselben in gleicher Weise vor sich

[1] Wiedemann's Annalen Bd. 5 S. 182; Bd. 16 S. 561; Bd. 17 S. 592.

gehen können. Da übrigens der genannte Autor sich neuerdings mit meiner analytischen Formulirung des Princips einverstanden erklärt hat, so wird weitere Discussion dieser theoretischen Frage nicht nöthig sein.

Die grosse Vereinfachung der thermodynamischen Sätze ferner, welche sich durch Darstellung der Energie und Entropie eines Körpersystems durch die Differentialquotienten einer Integralfunction ergiebt, hat vor mir schon im Jahre 1877 Hr. F. Massieu[1] gefunden und wenigstens für zwei Variable vollständig durchgeführt, aber ohne Beziehung auf chemische Processe. Er nennt die entsprechende Integralfunction, die er mit H bezeichnet, welches meinem $(-\mathfrak{F})$ entspricht, die charakteristische Function des Körpers. Ich ziehe vor, für die Function $\mathfrak{F}$ den von mir gewählten Namen der freien Energie beizubehalten, da dieser die wichtige physikalische Bedeutung dieser Grösse deutlicher ausdrückt.

Hr. Massieu hat die Sätze in einer etwas allgemeineren und für die bequemere Durchführung gewisser Rechnungen vortheilhafteren Form dargestellt. Die von mir gegebene Ableitung macht nämlich die Voraussetzung, dass die Parameter p, welche in Verbindung mit der Temperatur ϑ den Zustand des Körpersystems vollständig definiren, so gewählt seien, dass die nach aussen geleistete Arbeit nur von den dp, nicht von $d\vartheta$ abhänge. Allerdings können die Parameter immer dieser Bedingung gemäss gewählt werden; aber die so gewählten können unter Umständen schwer herauszufinden und zu berechnen sein, so dass es bequemer ist, andere Parameter zu brauchen, bei deren Constanz Änderung der Temperatur nicht ohne Arbeit vor sich gehen kann. Die entsprechenden Änderungen der allgemeinen Formeln sind leicht durchzuführen. Bei Hrn. Massieu kommt ein dahin gehöriges Beispiel vor, wo er Druck und Temperatur als Parameter für gasige und tropfbare Körper braucht.

In sehr umfassender und allgemeiner Weise sind endlich die thermodynamischen Bedingungen für moleculare und chemische Vorgänge in Körpersystemen, die aus beliebig vielen verschiedenen Stoffen zusammengesetzt oder gemischt sind, von Hrn. J. W. Gibbs[2] (1878) analytisch entwickelt worden. Hrn. Massieu's charakteristische Function ist darin ebenfalls gefunden und »Kräftefunction für constante Temperatur« genannt. Die allgemeinen Ergebnisse aller dieser Untersuchungen zeigen natürlich keine wesentlichen Unterschiede, so-

[1] Mémoires des Savants étrangers t. XXII; Journal de Physique par d'Almeida t. VI. p. 216.

[2] On the Equilibrium of heterogeneous substances. Transact. Connecticut Acad. III. p. 108—248; 343—524; Silliman's Journal 1878. XVI. p. 441—458.

weit sie einfach Folgerungen aus den wohlbekannten Principien der Thermodynamik sind.

Für die Theorie der galvanischen Polarisation haben nun diese Folgerungen aus der Thermodynamik deshalb grosse Wichtigkeit, weil sich zeigt, dass der Überschuss freier Energie des Knallgases über die des Wassers in hohem Grade von dem Druck abhängt, während die Wärmeentwickelung bei der Verbindung davon fast unabhängig ist. So lange man die elektromotorische Kraft der Polarisation nach letzterer berechnen zu müssen glaubte (was ich selbst in meinen früheren Arbeiten gethan habe), musste sie als eine fast unveränderliche Grösse erscheinen, und das machte gewisse Vorgänge bei der Polarisation eines Voltameters fast unerklärlich. Wenn man aber die elektromotorische Kraft nach der freien Energie berechnet, so erscheint sie im höchsten Grade veränderlich nach der Gassättigung der letzten den Elektroden anliegenden Flüssigkeitsschichten, und dadurch wird die Erklärung eines grossen Theils der Polarisationserscheinungen wesentlich verändert, und das meiste, was bisher räthselhaft war, erscheint verständlich.

Da meine Erklärungsversuche der Vorgänge bei der galvanischen Polarisation durch eine Reihe älterer Aufsätze[1] zerstreut sind, und einiges darin den neuen Gesichtspunkten entsprechend geändert werden muss, so erlaube ich mir, dieselben hier im Zusammenhang zu recapituliren.

Die Grundvoraussetzungen, von denen ich immer ausgegangen bin, sind dabei das Gesetz von der Constanz der Energie und die strenge Gültigkeit von Faraday's elektrolytischem Gesetz gewesen. Letzterem entsprechend halte ich die Voraussetzung fest, dass Elektricität aus der Flüssigkeit an die Elektroden nur unter äquivalenter chemischer Zersetzung übergehen kann, und dass dieser Übergang nicht stattfinden kann, vielmehr die Grenzfläche wie eine vollkommen isolirende Zwischenschicht wirkt, wenn die zur Zerlegung der chemischen Verbindungen nöthige Arbeit nicht durch die vorhandenen elektrischen Kräfte geleistet werden kann.

Wenn in einem Voltameter die beiden Elektroden elektrisch geladen werden und verschiedenes Potential erhalten, so werden zunächst dem Abfall des Potentials entsprechend elektrische Kräfte im Innern der Flüssigkeit wirksam, welche $+E$ gegen die Kathode, $-E$ gegen die Anode treiben. Diese Bewegung der Elektricität geschieht,

[1] Monatsberichte der Akad. 1873, S. 587; 1877, S. 713; 1880, S. 285; auch in Poggendorff's Annalen Bd. CL. S. 483—495; Wiedemann's Annalen Bd. III. S. 201 bis 216; Bd. XI. S. 737—759. — Faraday Lecture im Journal of the Chemical Society 1881. June.

so viel wir wissen, niemals ohne eine gleichzeitige Bewegung der Jonen des Elektrolyten, an denen das bewegte + E und — E haftet. Es geht also positiv beladener Wasserstoff (H + · H +) zur negativ geladenen Kathode, und negativ geladener Sauerstoff (— O —) an die positiv geladene Kathode. Wenn es nachher zur Entwickelung der Gase kommt, so sind die ausgeschiedenen Gase elektrisch neutral. Also muss nach dem consequent durchgeführten Princip des FARADAY'schen Gesetzes der entwickelte Wasserstoff (H + · H —) sein, und der frei gewordene Sauerstoff, entweder (— O — · + O +), oder (— O +). Da die Molekeln des entwickelten Sauerstoffs aus zwei oder (Ozon) drei Atomen bestehen, so halte ich die erstere Form für wahrscheinlicher. Ozon würde sein: (— O — · + O — · + O +).

Die hierbei entstandene Ansammlung von (H +) an der negativ geladenen Kathode und von (— O —) an der positiven Anode ergiebt zunächst die condensatorischen Ströme zu den sich polarisirenden Elektroden. Bei diesen verhalten sich die beiden Elektrodenflächen nur wie zwei Condensatorflächen von colossaler Capacität, letztere bedingt durch den ausserordentlich geringen, nur molekularen Abstand der entgegengesetzt geladenen beiden Schichten. Verbindet man die beiden Elektroden nach Ausschaltung der Batterie durch einen einfachen Leitungsdraht, so entladen sich die beiden Condensatoren wieder und geben den depolarisirenden Strom. Der hierbei stattfindenden Elektricitätsbewegung, welche die Grenzen des flüssigen Leiters nicht überschreitet, scheinen die chemischen Kräfte innerhalb der Flüssigkeit gar keinen Widerstand entgegenzusetzen, da unter dem Einfluss vertheilender Kräfte sich elektrolytische Leiter ebenso vollständig in elektrostatisches Gleichgewicht setzen, wie metallische. Das zeigt bis zu einem hohen Grade von Genauigkeit Sir WILLIAM THOMSON's Water dropping collector, in dem die schwächsten elektrostatischen Kräfte die Oberfläche der sich lösenden Wassertropfen bis zum vollkommensten elektrostatischen Gleichgewicht zu laden im Stande sind. Ich selbst habe in möglichst luftleer gemachten Zersetzungszellen die bei sehr geringen elektromotorischen Kräften leicht zu constatirende Proportionalität zwischen elektromotorischer Kraft und Grösse der condensatorischen Ladung bis hinab zu 0.0001 Daniell verfolgen können. Dagegen ist der Übergang der Elektricität von den geladenen Jonen der Grenzschicht an das Metall offenbar dem Widerstande der chemischen Kräfte unterworfen. Erst die elektrische Entladung der Jonen löst definitiv die chemische Verbindung. So lange sie nicht entladen sind, können sie noch aus der Ansammlung in den Grenzschichten bei langsamer Schwächung der sie festhaltenden elektrischen Anziehungskraft ohne in Betracht kommende Wärmeentwickelung in

ihre frühere Verbindung zurückkehren. Dies führt zu dem Schlusse, dass der mächtigste und wesentlichste Theil der chemischen Kräfte, der namentlich die eigentlich typischen Verbindungen zusammenhält, in der verschiedenen Anziehung der elementaren Substanzen gegen die beiden Elektricitäten begründet ist. Faraday's Gesetz zwingt dabei zu der Annahme, dass jede Valenzstelle jedes Elements immer mit einem ganzen Äquivalent, sei es positiver, sei es negativer Elektricität geladen sei, und dass die Grösse dieser elektrischen Äquivalente ebenso unabhängig von dem Stoffe ist, mit dem sie sich verbinden, wie die Atomgewichte der einzelnen chemischen Elemente unabhängig sind von den Verbindungen, die sie eingehen, gerade so als wäre die Elektricität selbst in Atome getheilt.

Dass die elektrischen Kräfte, die hierbei in Betracht kommen, durchaus nicht zu klein sind, um die grossen bei den chemischen Scheidungen und Wiedervereinigungen auftretenden Arbeitsbeträge zu leisten, ergiebt sich, wenn man die colossale Grösse der bei diesen Processen ausgetauschten elektrischen Äquivalente berücksichtigt. Meine in der Faraday Lecture veröffentlichte Berechnung ergiebt, dass, wenn das an den Atomen von 1^{mg} Wasser haftende + E auf eine Kugel, das − E auf eine andere 1 Kilometer entfernte ohne Verlust übertragen werden könnte, beide Kugeln sich mit einer Kraft anziehen würden, welche der Schwere von 26800^{kg} gleich sein müsste. Eben wegen der colossalen Grösse dieser Ladungen der Atome sind auch die verhältnissmässig schwachen Anziehungskräfte, welche ein oder zwei Daniell'sche Elemente in einer elektrolytischen Flüssigkeit hervorbringen, verhältnissmässig so grosser Leistungen fähig. Schwach sind diese Kräfte nur den kleinen Mengen freier Elektricität gegenüber, welche durch unsere Elektrisirmaschinen geliefert werden.

Die für die Herstellung elektrischen Gleichgewichts nothwendige Ausbildung der elektrischen Doppelschichten erklärt einen grossen und wesentlichen Theil der Vorgänge bei der Polarisation, nämlich die starken Anfangsströme bei Ladung und Entladung der Elektroden. Erheblich verlängert werden können diese Ströme, wenn gleichzeitig Occlusion[1] eines oder beider Gase in dem Metall der Elektroden vorkommt. Aber keiner dieser beiden Processe erklärt die unbegrenzte Dauer der Ströme bei schwächeren elektromotorischen Kräften.

In meiner Arbeit vom Jahre 1873 habe ich gezeigt, dass der Gehalt der elektrolytischen Flüssigkeit an aufgelösten Gasen, namentlich

[1] In meiner Arbeit über »Bewegungsströme am polarisirten Platina« (1880) habe ich diesen Einfluss überschätzt, da ich die Gegenkraft der Wasserzersetzung für unveränderlich hielt. Ich sehe jetzt, dass viele der dort gegebenen Erklärungen sich viel einfacher und folgerichtiger aus der Diffusion der Gase in der Flüssigkeit herleiten lassen.

atmosphärischem Sauerstoff, auf die Stärke dieser dauernden Ströme von grössestem Einfluss ist, und habe das Zustandekommen der davon abhängigen Ströme, der Convectionsströme, erklärt. Dabei kommt in Betracht, dass elektrisch neutral gewordene Gase, die in der Flüssigkeit aufgelöst sind, der Anziehung der elektrisch geladenen Elektroden nicht in der gleichen Weise unterliegen, wie es die elektrisch geladenen Jonen vor ihrer Entladung thun, sondern frei durch die Flüssigkeit diffundiren können. Nehmen wir nun eine stärkere Anziehung des Sauerstoffs zu — E an, so wird neutraler gelöster Sauerstoff an der negativ geladenen Kathode sich ohne Widerstand oder sogar unter Leistung positiver Arbeit zur Unterstützung des Stroms mit — E sättigen können, und dann entweder der Verbindung mit $(H_+ \cdot H_+)$ verfallen, oder eine neue Wanderung als Anion zur Anode antreten, während gleichzeitig an der Anode ein Molekel von (— O —) sich neutralisirt. Die ganze Arbeit der elektromotorischen Kraft der Batterie besteht dann nur darin, dass aufgelöstes neutrales O an der Anode in sauerstoffarmer Flüssigkeit als solches verschwindet, sich negativ ladet und wieder Bestandtheil des Wassers wird, während an der Kathode das Anion des Wassers zu neutralem aufgelösten Sauerstoff wird, aber in sauerstoffreiche Flüssigkeit eintritt. Ein stationärer Strom ist möglich, sobald durch Diffusion so viel gelöster Sauerstoff von der Kathode zur Anode zurückwandert, als durch den Strom als Anion von der Kathode zur Anode geführt wird.

Ich habe seit der Veröffentlichung jener Arbeit mannigfache Versuche angestellt, die letzten Spuren der aufgelösten Gase vollständiger zu beseitigen als dies mir damals gelungen war, aber ohne besseren Erfolg. Ich habe die Berührung der elektrolytischen Flüssigkeit mit dem Quecksilber der damals gebrauchten Quecksilberpumpe beseitigt, weil der Verdacht nicht ganz sicher auszuschliessen war, dass minimale Spuren aufgelöster Quecksilbersalze sich bilden könnten. Ich habe in einer zugeschmolzenen Zelle[1] die atmosphärische Luft durch elektrolytisch entwickeltes Knallgas auszuwaschen und letzteres wieder durch den Einfluss einer wasserstoffhaltigen Palladiumplatte zu beseitigen gesucht, die den Sauerstoff wieder zu Wasser machen, den Wasserstoff unter dem Einflusse elektrischer Ströme occludiren sollte. Das Wasser in der Zelle klapperte scharf wie in einem Pulshammer, aber dauernde elektrische Ströme waren immer noch da.

Was man mit solchen Zellen erreichen kann, habe ich in neuerer Zeit einfacher mit kleinen aus Glas geblasenen Zellen erreicht, welche sich an das obere Ende eines Barometerrohrs anschliessen. Am besten

[1] Faraday Lecture. Fig. 1.

lässt man vier Elektroden von Platindraht im Kreuze einander gegenüberstehend einschmelzen, von denen man zwei platiniren kann. So kann man beliebige Mengen Knallgas durch zwei der Elektroden entwickeln, und die beiden anderen zu den Messungen der Polarisation brauchen. Das untere Gefäss des Barometers wird durch eine doppelhalsige Flasche gebildet, in deren einem Halse das Barometerrohr luftdicht eingekittet ist. Der andere Hals enthält ein kürzeres Glasrohr, durch welches man Flüssigkeiten und Quecksilber einfüllen oder mittels einer Pipette entfernen kann. Dasselbe Rohr kann auch mit einer Wasserluftpumpe verbunden werden, um die Luft aus der Barometerzelle zu entfernen. Wenn man die in dieser enthaltene Flüssigkeit bis 30° oder 40° C. erwärmt, giebt sie grosse Volumina Dampf aus, die die letzten Spuren Luft austreiben. Sobald man langsam die Luft wieder in die Flasche eindringen lässt, steigt das Quecksilber im Barometerrohr empor, bis zu der um den Wasserdampfdruck verminderten Barometerhöhe. Aus diesen Apparaten ist neugebildetes Gas immer leicht wieder zu entfernen und sehr vollständiges Auskochen ist möglich.

Indessen überzeugt man sich immer wieder, dass ein Zustand der Flüssigkeit, wobei ein hinreichend empfindlicher Multiplicator nicht auch bei Kräften kleiner als ein Daniell dauernde Ströme anzeigte, nicht zu erreichen ist. Ich habe in den letzten Jahren ein Siemens'sches Instrument mit astatischen Glockenmagneten angewendet, bei welchem in der gewählten Aufstellung ein Scalentheil einer Intensität von 10^{-9} Ampère entspricht. Ein solcher noch vollkommen sicher zu beobachtender Strom würde 334 Jahre brauchen, um 1^{mg} Wasser zu zersetzen. Wenn also nur 1^{cmm} Knallgas von 0° und 760^{mm} Quecksilberdruck (0.0005^{mg}) im Wasser aufgelöst wäre, brauchten dessen Bestandtheile in 36 Tagen nur einmal von der Anode zur Kathode zu wandern, um den angezeigten Strom zu geben.

Ebenso zeigte sich auch in den möglichst luftleer gemachten Zellen durchaus nicht, dass die Polarisation eine oberste Grenze erreicht hatte, wenn die Entwickelung der Gasbläschen begann, und also die elektromotorische Kraft der Batterie gross genug geworden war, den Widerstand der chemischen Kräfte zu bewältigen, sondern es stieg noch immer die Gegenkraft der Polarisation mit der Steigerung der Kraft der galvanischen Batterie, wenn längst schon lebhafte Gasentwickelung vorhanden war.

Überhaupt ist bei allen den Graden elektromotorischer Kraft, die der Grenze der Gasentwickelung nahe liegen, in dem Verhalten des Stromes nichts zu entdecken, was eine plötzlich eintretende Überwältigung der chemischen Kräfte durch die elektrischen anzeigte.

Für diese Schwierigkeiten eröffnet nun die thermodynamische Theorie einen willkommenen Ausweg, indem sie zeigt, dass, wenn die gebildeten Gase sich in der elektrolytischen Flüssigkeit auflösen, der durch den Strom zu überwindende Widerstand der chemischen Kräfte immer grösser und grösser werden muss, je mehr von den ausgeschiedenen Gasen rings um die Elektroden aufgelöst ist, und dass der Antheil der Gase keineswegs unerheblich ist, sondern jeden beliebigen positiven Werth zwischen o und ∞ annehmen kann.

Dass die Wasserzersetzung bei hohem Druck selbst bei elektromotorischen Kräften von drei bis vier Daniell aufhören kann, ist von Hrn. Werner Siemens[1] gezeigt worden. Leider fehlen Angaben über die Grösse des erreichten Drucks und über die Intensität des gleichzeitig eingetretenen Convectionsstroms, der den für die chemische Arbeit verwendbaren Theil der elektromotorischen Kraft erheblich herabsetzen musste.

Thermodynamische Berechnung der freien Energie des Knallgases.

Ich bezeichne mit U_g die gesammte innere Energie für 1^{gr} Knallgas, wobei die beiden Gase aber als nicht mit einander gemischt angenommen werden.[2] U_g sei Function der Temperatur und der Dichtigkeit beider Gase, welche drei Grössen die unabhängigen Variablen des Problems bilden. U_w sei die gesammte innere Energie von 1^{gr} Wasser bei derselben absoluten Temperatur ϑ, für welche U_g bestimmt ist. Dann ist $(U_g - U_w)$ das Arbeitsäquivalent der Wärme, welche bei der Verbrennung des Knallgases und seiner Überführung in tropfbar flüssiges Wasser entwickelt wird. Zu bemerken ist nur, dass wenn die Gase vor und bei der Verbrennung unter atmosphärischem Druck stehen, auch noch Wärme durch diesen Druck entwickelt wird, indem das Volumen der Gase sich auf das des Wassers verkleinert. Letztere Wärmemenge Q ist

$$Q = \frac{pv}{\mathfrak{J}}$$

wenn p den normalen Atmosphärendruck, v das Volumen von 1^{gr} Knallgas unter dem Drucke p, und $\mathfrak{J}$ das mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit bezeichnet.

Die entwickelte Wärme muss aber innerhalb solcher Temperatur-

[1] Gesammelte Abhandlungen und Vorträge. S. 445.

[2] Mischung derselben würde die freie Energie ändern, wie Lord Rayleigh nachgewiesen hat (Philosophical Magazine. 1875. April). S. auch L. Boltzmann Sitzb. der K. Akad. der Wissensch. zu Wien. Bd. LXXVIII. II. Abth. 10. October 1878.

grenzen, wo die specifische Wärme des Wassers und der Gase sich nicht merklich ändert, von der Form sein:

$$U_g - U_w = C - \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{k} \cdot \vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} \; 1$$

$$\mathfrak{k} = 1 - \frac{2\alpha_h \cdot \gamma_h + \alpha_0 \cdot \gamma_0}{2\alpha_h + \alpha_0}$$

worin α_h und α_0 die Atomgewichte des Wasserstoffs und Sauerstoffs, γ_h und γ_0 aber die specifischen Wärmen für constantes Volum bedeuten. Wenn die Gase constantes Volumen behalten und man die durch die sehr kleinen Volumenänderungen des Wassers zu leistende mechanische Arbeit vernachlässigt, bleibt bei Temperatursteigerungen nur die durch die Wärmeaufnahme bedingte Änderung der inneren Energie zu berücksichtigen.

Aber auch Volumenänderungen der Gase haben keinen merklichen Einfluss auf die Werthe von U, da beide Gase sehr nahehin die Bedingung des vollkommenen Gaszustandes erfüllen, wonach die äussere Arbeit das genaue Äquivalent der verschwundenen Wärme ist und daher nach Wiederherstellung der früheren Temperatur die Änderung im Werthe von U wieder ausgeglichen ist. Die Zahlenwerthe der obigen Formel ergeben sich, wenn man mit v das Volumen von je 1^{gr} eines Gases unter dem Drucke p und bei der Temperatur ϑ bezeichnet, und

$$\frac{p \cdot v}{\vartheta} = R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} \; 1_a$$

setzt, ferner die specifische Wärme bei constantem Druck mit c bezeichnet, wie folgt:

$$\alpha_h = 1 \qquad\qquad \alpha_0 = 16$$

$$\mathfrak{J} \cdot \gamma_h = \mathfrak{J} \cdot c_h - R_h \qquad\qquad \mathfrak{J} \cdot \gamma_0 = \mathfrak{J} c_0 - R_0$$

Nach Regnault ist

$$c_h = 3.4090$$
$$c_0 = 0.2175$$
$$v_h = 11163.6 \cdot \frac{cm^3}{g} \text{ für } 0^\circ \text{ und } 760^{mm} \text{ Quecksilberdruck,}$$

also

$$\gamma_h = 2.29965$$
$$\gamma_0 = 0.17371$$
$$\mathfrak{k} = 0.58007.$$

Aus den bei 0° im Eiscalorimeter angestellten Versuchen der HH. Schuller und Wartha (Wiedemann's Annalen II. S. 378, Werthe α) ergiebt sich als Mittelwerth der durch 1^{gr} H bei der Verbrennung zu flüssigem Wasser entwickelten Wärme 34123.56 Calorien, also für

1 H_2O 3791.5 Calorien. Die Arbeit der Atmosphäre hat davon 45.232 Calorien geliefert: es bleiben 3746.268 für den chemischen Process bei 0°. Daraus ergiebt sich die Constante C der Gleichung 1:

$$C = \mathfrak{J} \cdot 3904.63.$$

Nach den von mir in meiner Mittheilung vom 2. Februar 1882 gebrauchten Bezeichnungen ist die gesammte Energie eines körperlichen Systems aus dem Werthe seiner freien Energie $\mathfrak{F}$ zu finden durch die folgende Beziehung (l. c. S. 12 Gleichung 1[b]):

$$U = \mathfrak{F} - \mathfrak{T} \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{T}}$$

oder

$$-\frac{U}{\mathfrak{T}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{T}}\left[\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{T}}\right].$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth von $U_v - U_w$ aus Gleichung 1 und integrirt, so erhält man

$$\mathfrak{F}_v - \mathfrak{F}_w = C + \mathfrak{J} \cdot f \cdot \mathfrak{T} \cdot \log \mathfrak{T} + \mathfrak{T} \cdot \phi \quad \ldots\ldots\ldots \{1_b.$$

Hierin ist ϕ die Integrationsconstante, welche nicht von $\mathfrak{T}$, wohl aber von v_h und v_o abhängig sein kann.

Deren Abhängigkeit von den letztgenannten Grössen bestimmt sich, wenn man die Arbeit für Volumänderungen der einzelnen Gase berechnet. Es ist nur der Summand $\mathfrak{F}_v$, der von beiden Grössen abhängen kann:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_v}{\partial v_h} = \frac{-2p_h a_h}{2a_h + a_o}, \text{ und } \frac{\partial \mathfrak{F}_v}{\partial v_o} = \frac{-p_o a_o}{a_o + 2a_h}.$$

Benutzt man die obige Gleichung 1_a, so ergiebt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_v}{\partial v_h} = -R_h \cdot \frac{\mathfrak{T}}{v_h} \cdot \frac{2a_h}{2a_h + a_o} \text{ und } \frac{\partial \mathfrak{F}_v}{\partial v_h} = -R_o \cdot \frac{\mathfrak{T}}{v_o} \cdot \frac{a_o}{2a_h + a_o}.$$

Aus Gleichung 1_b dagegen

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_v}{\partial v_h} = \mathfrak{T} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v_h} \text{ und } \frac{\partial \mathfrak{F}_v}{\partial v_o} = \mathfrak{T} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v_o}.$$

Also ist

$$\phi = -R_h \frac{2a_h}{2a_h + a_o} \cdot \log v_h - R_o \cdot \frac{a_o}{2a_h + a_o} \cdot \log v_o + H \quad \ldots\ldots \{1_c.$$

worin H eine Integrationsconstante bezeichnet.

Der Gesammtwerth der freien Energie, den die getrennten Gase mehr haben, als das Wasser, ergiebt sich daraus:

$$\mathfrak{A}_g - \mathfrak{A}_w = C + \mathfrak{J} \cdot t \cdot \mathfrak{T} \cdot \log\left(\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_0}\right) - \mathfrak{T}\left[\frac{R_1 \cdot 2a_0}{2a_1 + a_0}\log(v_1) - R_0 \frac{a_0}{2a_1 + a_0} - \log(v_0) + H\right] \quad 1_c$$

worin

$$H = H' - \mathfrak{J} \cdot t \cdot \log(\mathfrak{T}_0)$$

nur einer anderen Bezeichnung der Integrationsconstante entspricht, und $\mathfrak{T}_0$ irgend eine passend gewählte Normaltemperatur, z. B. die des schmelzenden Eises bezeichnet.

Zu bemerken ist übrigens, dass für die vollkommenen Gase nach Avogadro's Gesetz

$$R_1 a_1 = R_0 a_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1_d$$

Die Gleichung 1_c zeigt an, dass die durch Vereinigung der Gase zu leistende Arbeit allerdings und in sehr wesentlicher Weise von ihrer Dichtigkeit vor der Vereinigung abhängt, während dies für ihre Verbindungswärme nicht der Fall ist, falls nicht dabei fremde Arbeit z. B. die der Atmosphäre hinzukommt. Da die Volumina v_1 und v_0 alle positiven Werthe von 0 bis ∞ annehmen können, so können ihre Logarithmen von $-\infty$ bis $+\infty$ steigen, und da die übrigen Grössen der rechten Seite von Gleichung 1_c alle nothwendig endlich sind, könnte auch der Werth von $\mathfrak{A}_g - \mathfrak{A}_w$ von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen; oder da negative Werthe die Möglichkeit der Verbrennung ausschliessen, mindestens von 0 bis $+\infty$.

Arbeitsäquivalent gelöster Gase.

Bei elektrolytischer Zersetzung treten die Gase zuerst in Lösung in der elektrolytischen Flüssigkeit auf und erst, wenn in den die Elektroden berührenden Grenzschichten die aufgelöste Menge die Grenzen der Sättigung überschreitet, die bei dem gegebenen Drucke eintreten kann, werden sie sich in Bläschen ausscheiden.

Wenn ein Gas in dem Volumen V von Wasser unter dem Drucke p zur Sättigung aufgelöst ist, so ist die aufgelöste Menge m gegeben durch die Gleichung

$$\frac{bp}{\vartheta} = R \cdot \frac{m}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$

worin b der Bunsen'sche Absorptionscoefficient ist, der übrigens selbst eine Function der Temperatur bildet.

Wenn die Menge dm aus der Flüssigkeit austritt, so leistet sie einen ersten Theil der Arbeit

$$-d\mathfrak{A}_1 = p \cdot v \cdot dm.$$

Soll nun weiter das ausgetretene Gas in einen Normalzustand übergeführt werden, der durch den Index 1 angezeigt werden mag, so ergiebt dies einen zweiten Theil der Arbeit:

$$-d\mathfrak{F}_2 = dm\int_v^{v_1} p \cdot dv$$

$$= dm \cdot p_1 \cdot v_1 - dm\int_p^{p_1} v \cdot dp - dm \cdot p \cdot v,$$

Also die gesammte Arbeit, die der Austritt der Menge dm des Gases aus der Flüssigkeit und Übergang desselben in den gewählten Normalzustand leistet, ist:

$$\left.\begin{aligned} -d\mathfrak{F} &= -(d\mathfrak{F}_1 + d\mathfrak{F}_2) \\ &= \mathfrak{S} \cdot R \cdot dm \left[1 - \log \cdot \left(\frac{p_1}{p}\right)\right] \cdots\cdots\cdots \\ &= \mathfrak{S} \cdot R \cdot dm \left[1 + \log \cdot \left(\frac{v_1}{v}\right)\right] \cdots\cdots\cdots \\ &= \mathfrak{S} \cdot R \cdot dm \left[1 - \log \cdot \left(\frac{m_1}{m}\right)\right] \cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} 2.$$

In der letzten Gleichung bezeichnet m_1 die Menge des Gases, die unter dem Drucke p_1 des Normalzustandes aufgelöst sein würde.

Diese Gleichungen zeigen an, dass bei abnehmenden Werthen von m steigende Arbeit nöthig ist, um die gleiche Menge dm des Gases aus der Flüssigkeit wegzunehmen: dass also die Flüssigkeit die letzten Portionen des aufgelösten Gases mit einer bis unendlich steigenden Kraft festhält, beziehlich heranzieht.

Wenn also bei der Zersetzung des Wassers die freigewordenen Elemente sich nicht als Gase unter dem Drucke p_1 entwickeln, sondern im Wasser gelöst bleiben, so wird $d\mathfrak{F}$ berechnet für 1^{gr} Knallgas von der bei der Zersetzung des Wassers zu leistenden Arbeit als noch nicht geleistet abzuziehen sein. Für 1^{gr} Wasser giebt dies also

$$\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w = C + \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{S} \cdot \log \cdot \left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_0}\right)$$

$$+ \mathfrak{S}\left\{R_h \cdot \frac{2\alpha_h}{2\alpha_h + \alpha_0}[1 - \log(v_h)] + R_0 \frac{\alpha_0}{2\alpha_h + \alpha_0}[1 - \log v_0] - H\right\} \cdots \} 3.$$

Hierin bedeuten v_h und v_0 die specifischen Volumina, welche über der Flüssigkeit stehendes Gas haben müsste, um denselben Grad der Sättigung hervorzubringen, den das in den Grenzschichten an der Elektrode gelöste Gas hat. Auch in diesem Falle kann also, wenn noch sehr wenig Gas gelöst ist, und die betreffenden v daher sehr gross sind, der Werth $(\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w)$ gleich Null oder selbst negativ werden.

Stabiles Gleichgewicht der chemischen Kräfte ist hiernach im Wasser überhaupt nur bei einem gewissen minimalen Grade der Dissociation seiner Elemente möglich, und andererseits wird um so geringerer Arbeitsaufwand durch eine dazu angewendete elektromotorische Kraft nöthig sein, um neue Zersetzung hervorzubringen, je weniger von den betreffenden Gasen im Wasser schon aufgelöst ist. Es wird also ein Convectionsstrom durch wässerige Elektrolyte auch bei den schwächsten elektromotorischen Kräften streng genommen niemals ganz fehlen können; bei stärkeren Kräften wird der Gehalt an aufgelösten Gasen und damit auch die Stärke des Convectionsstromes wachsen müssen. Andererseits erklärt es sich aus der Langsamkeit der Diffusionsprocesse, dass es viele Tage dauern kann, ehe bei constant gehaltener elektromotorischer Kraft der stationäre Zustand der Gaslösung und des Stromes sich ausbildet. Auch erhellt hieraus, dass jede Bewegung der Flüssigkeit, sei sie nun durch mechanische Ursachen oder durch Temperaturungleichheiten hervorgerufen, Änderungen der Stromstärke, meistentheils Steigerungen derselben hervorrufen muss, da sie die Ordnung der Flüssigkeitsschichten von verschiedenem Gasgehalt stört. Aus beiden Umständen ergiebt sich eine grosse Schwierigkeit für die Ausführung der Versuche über den stationären Zustand, da dieselben sehr lange Zeit in Anspruch nehmen und die Störung durch Erschütterungen, wenigstens im Innern einer grossen Stadt, kaum zu vermeiden sind. Galvanische Ketten von hinreichender Constanz lassen sich bei der geringen Intensität dieser Ströme mit Hülfe der Calomelelemente oder anderer ähnlicher Combinationen gut herstellen. Nur habe ich in meinen neuesten Versuchsreihen die Vorsicht gebraucht, die zur Messung der elektromotorischen Kräfte dienenden Elemente dieser Art immer nur compensirt und daher nahehin stromlos anzuwenden und die elektromotorische Kraft derjenigen, welche dauernde Ströme zu geben hatten, von Zeit zu Zeit durch die der stromlosen zu bestimmen.

Wenn wir zur Messung der elektrischen Ströme Ampère's, Volt's und Ohm's gebrauchen, ist $AJt = J^2 Wt$ die Arbeit der elektromotorischen Kraft A bei der Stromstärke J während der Zeit t, ausgedrückt in den entsprechenden Einheiten cg. 10^{-9}, cm. 10^9 und Secunden. Die Einheit der Arbeit wäre das von Sir William Siemens vorgeschlagene Watt, welches 10 Millionen Mal grösser ist, als das in g, cm. und secd. berechnete Arbeitsmaass des C. G. S.-System, welches wir der Berechnung der Gasarbeit zu Grunde gelegt haben.

Wenn wir mit η die Menge Wasser bezeichnen, welche ein Ampère in der Secunde zersetzt (nach Hrn. F. Kohlrausch[1] $\eta = 0{,}00009476$),

[1] Pogg. Ann. Bd. 49 S. 175. (Dort für 1 Weber in mg. gegeben.)

so ergiebt sich für die Arbeit, welche ein Ampère bei der Wasserzersetzung in der Secunde liefert:

$$A = 10^{-7} \cdot \eta \, (\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \{3_a$$

Wenn wir bei der Substitution des Werthes der letzteren Parenthese aus Gleichung 3 den Werth derjenigen elektromotorischen Kraft mit A_a bezeichnen, welcher eintritt, wenn die sich entwickelnden Gase unter atmosphärischem Druck p_a stehen, so ist

$$v_h = R_h \cdot \frac{\vartheta}{p_a} \text{ und } v_o = R_o \cdot \frac{\vartheta}{p_a}$$

also

$$\left.\begin{aligned} A_a &= 10^{-7} \cdot \eta \left\{ C + \mathfrak{J} \cdot t_a \cdot \vartheta \cdot \log\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) + \vartheta \left\{ R_h \cdot \frac{2\alpha_h}{2\alpha_h + \alpha_o} \log(p_a) + R_o \cdot \frac{\alpha_o}{2\alpha_h + \alpha_o} \log(p_a) - H_a \right\} \right. \\ t_a &= \frac{2\alpha_h (1 - c_h) + \alpha_o (1 - c_o)}{2\alpha_h + \alpha_o} = 0.5970 \\ H_a &= H + \mathfrak{J} \cdot t_a \log(\vartheta_0) - R_h \cdot \frac{2\alpha_h}{2\alpha_h + \alpha_o} [1 - \log R_h] - R_o \cdot \frac{\alpha_o}{2\alpha_h + \alpha_o} [1 - \log R_o] \end{aligned}\right\} 3_b$$

Dagegen ist für andere Werthe des Druckes der gelösten Gase

$$A = A_a + 10^{-7} \cdot \eta \cdot \vartheta \cdot \left\{ R_h \cdot \frac{2\alpha_h}{2\alpha_h + \alpha_o} \log\left(\frac{p_h}{p_a}\right) + R_o \frac{\alpha_o}{2\alpha_h + \alpha_o} \log\left(\frac{p_o}{p_a}\right) \right\} \ldots . \{3_c$$

Um zunächst nur eine angenäherte Vorstellung von dem Grade der Veränderlichkeit der elektromotorischen Kraft zu geben, benutze ich den Werth von A_a, der sich mir aus den Versuchen an den barometrischen Zellen für das erste Aufsteigen von Gasbläschen ergab:

$$A_a = 1.6447 \text{ Volt.}$$

Wenn nur Knallgas in der Flüssigkeit gelöst ist, und wir mit $\mathfrak{p}$ den Druck bezeichnen, den das befreite Gas in einem Volumen haben würde, welches dem der Flüssigkeit gleich wäre, so ist

$$\tfrac{2}{3}\mathfrak{p} = b_h \cdot p_h \text{ und } \tfrac{1}{3}\mathfrak{p} = b_o \cdot p_o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \{3_d$$

Die Absorptionscoefficienten b sind nach R. Bunsen bei 20° C

$$b_h = 0.0193$$
$$b_o = 0.0480.$$

Aus diesen Daten ergiebt sich für $A = 0$ aus Gleichung 2_b

$$\mathfrak{p} = \frac{p_a}{3.420 \cdot 10^{38}} = p_a \cdot 0.2923 \cdot 10^{-38},$$

oder $0.2655^{grm} \cdot 10^{-36}$ Knallgas im Cubikcentimeter der Flüssigkeit, während man bisher mit den besten Quecksilberluftpumpen nur etwa bis $p_a \cdot 10^{-8}$ gelangt ist.[1] Für alle chemischen und selbst für alle galvano-

[1] E. Bessel Hagen in Wiedemann's Annalen Bd. 12 S. 438.

metrischen Prüfungen wird ein solches Quantum als unwahrnehmbar betrachtet werden müssen.

Die Differenz $(A_a - A)$ würde also durch Einführung und Steigerung einer elektromotorischen Kraft A etwa auf ein Viertel von A_a (also $A = 1.2$ Volts, etwa ein Daniell) zurückgeführt werden müssen, ehe das aufgelöste Gas anfangen könnte wahrnehmbar zu werden.

Wenn man das $\mathfrak{p}$ so wählt, dass es der Zersetzung durch einen Strom von einem Scalentheil meines Galvanometers während einer Secunde entspricht und das entstandene Gas in ein Cubikcentimeter der Flüssigkeit zusammengedrängt annimmt, also

$$\mathfrak{p} = \frac{\eta \cdot 10^{-9}}{r_h}$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen 3_c und 3_d der Werth

$$A_a - A = 0.33745$$
$$A = 1.3 \text{ Volt.}$$

Da etwa 100 Cubikcentimeter Wasser in meinen barometrischen Zellen waren, die bei stationärer Strömung mit jedem der Gase im Mittel halb so stark beladen sein mussten, als angenommen wurde, so hätte der Dissociationsstrom hierbei schon eine Ablenkung von einem Theilstrich durch 50 Secunden geben können. Wir können dies etwa als die Grenze seiner galvanometrischen Wahrnehmbarkeit betrachten.

Wenn dagegen die volle elektromotorische Kraft A_a eintritt, so muss die Parenthese der rechten Seite von 3_c gleich Null werden, d. h.

$$\frac{\mathfrak{p}}{p_a} = 0.04942$$

was einem Strome entspräche, dessen Zeitintegral für 100 Cubikcentimeter Flüssigkeit 2176 Millionen Scalentheile mal Secunden ausmachte.

In der That haben schon meine unter dem 11. März 1880[1] mitgetheilten Versuche ergeben, dass auffallend viel stärkere und andauernde Ströme auftreten, wenn die elektromotorische Kraft etwas über die Grenze von einem Daniell gesteigert wird, als bei geringeren Kräften der Fall war, und dasselbe hat sich auch regelmässig in den neueren Versuchen gezeigt. Um diese stärkeren Ströme an der Grenze der Gasentwickelung überhaupt nur beobachten zu können, musste ich den durch das Galvanometer gehenden Theil des Stromes sehr erheblich, nämlich auf $\frac{1}{630}$ herabsetzen. Die übrig bleibenden Convectionsströme entsprachen etwa 0.001 Ampère. Aber auch wenn

[1] Siehe meine »Wissenschaftliche Abhandlungen« I. Bd. 903.

diese Stromstärken ganz zur Gasentwickelung verbraucht würden, würde es 36 Minuten dauern, ehe die zur Sättigung nöthige Gasmasse entwickelt ist. In Wahrheit dauert es viele Stunden oder selbst Tage, weil der grösste Theil des betreffenden Stromes nicht der Entwickelung, sondern nur der Diffusion des schon entwickelten Gases entspricht.

Der Temperaturcoefficient der Kraft A_a ergiebt sich aus den obigen Formeln und Werthen sehr klein, nämlich nahehin $\frac{1}{3000}$ des Werthes als Abnahme für 1° C.

Bildung der Gasblasen.

Wenn die Sättigung der den Elektroden benachbarten Schichten mit Gas gross genug geworden ist, dass bei dem auf der Flüssigkeit lastenden Drucke, sich Gasbläschen bilden können, so beginnen diese aufzusteigen. Die Gasbläschen enthalten nur das an der betreffenden Elektrode sich ausscheidende Gas und die der Temperatur entsprechende Menge von Wasserdämpfen. Sie stehen unter dem Druck der Gasmasse, die über der Flüssigkeit steht, ferner der Wassersäule, die sich über ihnen befindet, endlich der Capillarspannung der kugeligen Grenzfläche des umgebenden Wassers. Der Druck im Innern einer kugeligen Capillarfläche ist bekanntlich

$$p = \frac{2T}{r},$$

wenn r den Radius der Kugel und T die Spannung der Capillarfläche bezeichnet. Setzen wir die letztere nach den Bestimmungen von Hrn. G. Quincke gleich der Schwere von 8.253^{mg} wirkend durch ein Millimeter, so ist in einem Bläschen von 0.1^{mm} Radius der Druck p gleich dem von 12.14^{mm} Quecksilber; bei sehr feinen Bläschen von 0.01^{mm} Radius würde er das Zehnfache davon ausmachen. Es ergiebt sich daraus eine erhebliche Schwierigkeit für die erste Bildung der entstehenden Bläschen, welche auch in dem grossen Siedeverzug luftfreier Flüssigkeiten bekanntlich sehr auffällig hervortritt. Im Allgemeinen scheint die Bildung der Blasen an der Berührungsfläche der Flüssigkeit mit einer Wand, der sie nicht stark anhaftet, am leichtesten zu gelingen. Wie grossen Einfluss hierbei die Natur der Wand hat, ist aus dem Studium der Siedeverzüge wohl bekannt. Auch in Wasser gelöste Kohlensäure entwickelt sich viel reichlicher an Metallen, namentlich edlen, als an Glas und an rauhen oder scharfeckigen Stellen des Glases mehr als an ganz glatten. Die elektrolytischen Gase zeigen ein entsprechendes Verhalten. Man muss anfangs eine grössere elektromotorische Kraft gebrauchen, um die ersten Blasen zu erhalten, als nachher nöthig ist, um die Entwickelung zu unterhalten. Wenn diese

begonnen hat, kann man in kleinen Schritten zu schwächeren Kräften absteigen. Dann steigen die Blasen schliesslich nur noch von einer oder einigen wenigen Stellen des Drahtes auf. Unterbricht man aber die Entwickelung auch nur auf wenige Minuten durch zu grosse oder zu schnelle Abschwächung der elektromotorischen Kraft, so muss man von Neuem eine viel grössere Kraft zur Einleitung eines neuen Blasenstroms einführen. Offenbar hatte sich dann die Risstelle zwischen Flüssigkeit und Elektrode geschlossen, und muss neu gebildet werden.

Es kann daher der Anfang der Gasentwickelung von vielen kleinen Zufälligkeiten an der Oberfläche der Elektrode abhängen. Platinirtes Platin bildet leichter Blasen als glattes.

Auf die elektromotorische Gegenkraft des Voltameters, d. h. auf die Grösse, die man gewöhnlich als Stärke der Polarisation zu bezeichnen pflegt, muss die Gasentwickelung einen wesentlichen Einfluss haben, insofern die chemische Arbeit nach dem oben gegebenen Theorem von der Gasbeladung der letzten Flüssigkeitsschichten abhängt, und diese durch die Entwickelung der Gasblasen herabgesetzt wird. Darin könnte auch die Erklärung für die verschiedene elektromotorische Kraft der galvanischen Elemente mit einer Flüssigkeit liegen, in denen sich Wasserstoff an verschiedenen Metallen entwickelt. Wo die Blasen sich schwer bilden, wird sich der Wasserstoff in einer mit diesem Gase stärker gesättigten Flüssigkeit ausscheiden müssen, was mehr freie Energie verlangt. Dies könnte an den unedlen Metallen im Gegensatz zum Platin der Fall sein, und ihr abweichendes Verhalten erklären. Diese Umstände erschweren nun auch in hohem Grade die Messung der elektromotorischen Kräfte, welche im gegebenen Falle nöthig sind, um eine andauernde Gasentwickelung einzuleiten, und zwar ist das Hinderniss für die Blasenbildung verhältnissmässig grösser in den Fällen, wo die Flüssigkeit geringere Gasmengen enthält, weil aus diesen schwerer die Gasmenge an einem Punkte zu sammeln sein wird, welche nöthig ist, um den bei gleicher Grösse der Gasblasen gleich bleibenden Druck der capillaren Fläche im Gleichgewicht zu halten. Hierzu wird bei gleich grossen Blasen immer dieselbe Menge Gas herbeigeschafft werden müssen, während die Menge, welche den Druck der über der Flüssigkeit stehenden Atmosphäre trägt, diesem Drucke proportional ist, so dass in demselben Maasse weniger Gas zur Füllung der Blase verlangt wird, als die Flüssigkeit weniger davon enthält.

In der That fand ich, dass bei möglichst vollständiger Entfernung des Gases über der Flüssigkeit Blasen sich bei geringerer elektromotorischer Kraft entwickelten, als wenn der Druck des Knallgases über der Flüssigkeit $^1/_3$ oder $^1/_2$ Atmosphäre betrug. Aber die Unterschiede waren nicht so gross, als nach der Theorie zu erwarten wäre. Ich

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 giebt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden Theil des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus diesen Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reinen Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder ihr fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch demselben Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, Reden und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird in der Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften und Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfingen und statt der vollständigen »Sitzungsberichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zuschicken zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu geben.

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich:

die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,

» » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,

» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fertigstellung des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrganges 1882 nicht zugekommen sein sollten, werden ersucht, hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen nur in Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1883 angebracht werden.

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann) in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 M.

Gesondert von denselben erscheinen ebendaselbst, ebenfalls in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 M.

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsberichte« oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften von Seiten der Akademie, jetzt nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in einzelnen Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten, zuzusenden. Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der genannten Buchhandlung in Verbindung setzen.

STR
Q3
M38

MATHEMATISCHE

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES
MAY 7 1884

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN.

HEFT IV.

APRIL 1883.

MIT EINER TAFEL.

BERLIN 1883.
VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
IN COMMISSION BEI FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ & GOSSMANN.

15. Über secundär-elektromotorische Erscheinungen an Muskeln, Nerven und elektrischen Organen.

Von E. du Bois-Reymond.

(Vorgelegt am 5. April: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XVI]: — ausgegeben am 12. April.)

§. I. *Einleitung.*

Ich halte die Zeit für gekommen, das Schweigen zu brechen, welches ich bisher über gewisse thierisch-elektrische Versuche beobachtete, mit denen ich seit bald vierzig Jahren beschäftigt bin, und denen ich grosse Wichtigkeit beilege. Gern hätte ich diese Untersuchung nach Kräften vollendet, ehe ich deren Ergebnisse veröffentlichte. Da neuerlich die Elektrophysiologen von mehreren Seiten her dem Gebiete sich nähern, auf welchem ich so lange der einzige Anbauer war, mehrere sogar es schon betraten, wenn auch ohne die Hauptsache zu gewahren, so liefe ich bei längerer Zurückhaltung Gefahr, für meinen Theil die Frucht einer Arbeit einzubüssen, bei welcher ich das *Nonum prematur in annum* mehr als vervierfachte. Ich will deshalb heute die vornehmsten Gesichtspunkte aufdecken, zu denen ich gelangte. In mehreren Abhandlungen werde ich dann das hier Gesagte weiter ausführen.

Die elektromotorischen Erscheinungen der Muskeln und Nerven habe ich vor längerer Zeit in drei Classen vertheilt.[1] Die einen werden im Zustand der Ruhe oder der Thätigkeit ohne Mitwirkung eines fremden Stromes wahrgenommen. Dahin gehört der Strom des ruhenden Muskels und Nerven mit seiner negativen Schwankung, auch wenn diese elektrisch hervorgerufen wurde, sofern der tetanisirende Strom durch jeden anderen Reiz ersetzbar ist. Wollen wir die Classification auch über die elektrischen Organe ausdehnen, so werden wir in dieselbe Classe deren schwache elektromotorische Wirkungen in der Ruhe, die ich den 'Organstrom' nenne,[2] und den irgendwie ausgelösten Schlag der Organe einzureihen haben.

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. II. S. 377.

[2] Dr. Carl Sachs' Untersuchungen am Zitteraal, Gymnotus electricus, nach seinem Tode bearbeitet von E. du Bois-Reymond u. s. w. Leipzig 1881. S. 171 ff.

In die zweite Classe brachte ich die während der Dauer eines fremden Stromes extrapolar auftretenden Elektrotonusströme der Nerven, zu welchen der Muskel und das elektrische Organ kein sicheres Seitenstück bieten.[1]

Zu diesen beiden, länger gekannten Classen kündigte ich noch eine dritte, die der secundär-elektromotorischen Erscheinungen, an. Darunter verstand ich elektromotorische Erscheinungen, welche ein fremder Strom in der durchflossenen Strecke selber erzeugt, und die daher meist nur erkannt werden, sofern sie den fremden Strom überdauern. Dies sind die grossentheils neuen Thatsachen, von welchen hier die Rede sein soll. Doch wird sich, wie ich gleich sagen will, finden, dass eine Scheidung zwischen den beiden letzten Classen kaum aufrecht erhalten werden kann (s. unten S. 381).

Die secundär-elektromotorischen Erscheinungen stellen sich zunächst unter dem Bilde von Polarisationsströmen dar. Ich ziehe jenen Ausdruck vor, welcher auch auf die gewöhnlichen Polarisationserscheinungen passt, für den möglichen Fall, dass es bei der scheinbaren Polarisation der Muskeln und Nerven sich noch um etwas von der galvanischen Polarisation Verschiedenes handeln sollte. Doch halte ich nicht pedantisch an jenem Namen fest, sondern nenne gelegentlich den durch secundär-elektromotorische Kraft erzeugten secundären Strom den Polarisationsstrom, auch wohl den Nachstrom, den ihn erzeugenden primären den polarisirenden Strom. Auch finde ich es zuweilen bequem, von den zu polarisirenden Körpern als 'Polarisations-Object' zu sprechen. Negativ heisst eine dem primären Strom entgegen-, positiv eine ihm gleichgerichtete Polarisation.

§. II. *Geschichtliches.*

Eine hierher gehörige Erscheinung fand ich beim Beginn meiner Untersuchungen in der Wissenschaft vor. Peltier beschrieb 1836

[1] Hr. Eckhard versuchte am Organ des Zitterrochen, Sachs an dem des Zitteraales durch dauernde Durchströmung der elektrischen Nerven elektromotorische Wirkung zu erhalten, Hr. Eckhard vergeblich, Sachs mit zweifelhaftem Erfolge (Untersuchungen am Zitteraal u. s. w. S. 188 ff.). Auch wenn diese Versuche gelungen wären, könnte man nicht von Elektrotonus des elektrischen Organes sprechen. An den Muskeln will Hr. Hermann jetzt endlich eine Spur jener Elektrotonusströme gefunden haben, welche er früher so wenig wie ich nachweisen konnte, da doch seine Theorie ihrer so dringend bedarf (Handbuch der Physiologie. Bd. II. Leipzig 1878. S. 168; — Die Ergebnisse neuerer Untersuchungen auf dem Gebiete der thierischen Elektricität. Separat-Abdruck aus der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 1878. S. 21. 22.). Er gedenkt nicht der Möglichkeit, dass die wahrgenommenen Wirkungen von den intramusculären Nerven herrühren. Schon 1849 hatte ich vor dieser Täuschung gewarnt (Untersuchungen u. s. w. Bd. II. Abth. I. S. 330).

an durchströmten Froschgliedmaassen eine negative Polarisation, welche er der Polarisation der Metalle in Ritter's secundärer Säule verglich. Sitz der Polarisation waren nach ihm die in das stromzuführende Wasser tauchenden Theile des Praeparates. Als er den dazwischen gelegenen, durchströmten Strecken Multiplicatorenden anlegte, blieb in seinen Versuchen jede Wirkung aus. Für die Ursache der Polarisation hielt deshalb Peltier die Ausscheidung von Wasserstoff und Sauerstoff an den eingetauchten Theilen, welche er dort, jedoch ohne irgend Etwas der Art nachzuweisen, nach Analogie metallischer Elektroden annahm.[1]

Peltier's Wahrnehmung wurde der Ausgangspunkt meiner eigenen Arbeiten über diesen Gegenstand. Bei Wiederholung seines Versuches mit Kochsalzlösung statt mit Wasser fand ich wirklich die Stelle, wo der Strom in das Praeparat eindrang, alkalisch, die, wo er es verliess, sauer reagirend.[2] Schien dies Peltier's Erklärung günstig, so zeigte sich mir andererseits, seiner ausdrücklichen Behauptung entgegen, jede durchströmte Strecke des Praeparates nach Art einer secundären Säule negativ elektromotorisch. Ein Theil der negativen Polarisation also rührt möglicherweise von den an der Aus- und Eintrittsstelle des Stromes angesammelten Ionen her, deren grösster und weitaus wichtigster Theil aber hat seinen Sitz im Inneren der Gewebe, unstreitig zunächst in den Muskeln.

§. III. *Vorstudien: von der inneren Polarisation feuchter poröser Körper.*

So gelangte ich zum Begriff einer inneren Polarisation der Muskeln. Bald aber fand ich auch andere feuchte poröse Körper innerlich polarisirbar, und nun verfolgte ich die neue Erscheinung zuerst rein physikalisch durch eine lange Reihe feuchter poröser Körper.

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. I. Abth. I. S. 377; — Bd. II. Abth. II. S. 378.

[2] Schon Humphry Davy sah Säure und Alkali sich aus Muskelfleisch, aus lebenden Pflanzentheilen, ja aus den Fingern entbinden, welchen destillirtes Wasser den Strom zuführte (Philosophical Transactions for the Year 1807. P. I. p. 52. 53; — Gilbert's Annalen der Physik. 1808. Bd. XXVIII. S. 196. — Vergl. Simon in Gilbert's Annalen u. s. w. 1801. Bd. VIII. S. 28; — Ritter ebenda. Bd. IX. S. 329). — Auch an einem mit veilchenblauem Lackmuspapier bekleideten Wasserbausch zwischen Kochsalzbäuschen sah ich Säure und Alkali frei werden (Gesammelte Abhandlungen zur allgemeinen Muskel- und Nervenphysik. Bd. I. Leipzig 1875. S. 11). Als ich hier sagte, dass dies Davy's Behauptungen zuwider sei, wonach Reagenspapiere durch Ionen nur an metallischen Elektroden sich verfärben, waren mir obige Versuche Davy's nicht gegenwärtig.

Diese waren entweder unorganischer oder organischer Natur, und im letzteren Falle entweder nicht organisirt oder organisirt; im letzteren Falle wieder entweder todt, wie Holz, oder lebend, wie frisches Pflanzengewebe.[1]

Im Allgemeinen kann man sagen, dass jeder poröse Körper, dessen Stoff nicht zu schlecht leitet, mit einem Elektrolyten getränkt, der im Vergleich mit ihm nicht zu gut leitet, negativer innerer Polarisation fähig ist; d. h. nach der Durchströmung wirkt jede zwischen zwei isoëlektrischen Flächen begriffene Querscheibe elektromotorisch im umgekehrten Sinne des polarisirenden Stromes. Dies erklärt sich bei der Annahme, dass dieser Strom sich theilt zwischen der tränkenden Flüssigkeit und dem porösen Gerüst, und dass letzteres nach Art metallischer Zwischenplatten sich durch daran ausgeschiedene Ionen polarisirt. Jedes der unzähligen Zwischenplättchen wirkt elektromotorisch im umgekehrten Sinne von dem, in welchem es durchflossen wurde. Der dadurch erzeugte Partialstrom gleicht sich theils auf dem ihm durch den innerlich polarisirbaren Körper dargebotenen unmittelbaren Rückwege, theils durch den diesem Körper angelegten Bussolkreis ab. Seine Stärke im letzteren hängt ab von den Dimensionen des Polarisations-Objectes, der Lage des Zwischenplättchens in dessen Innerem, von der stofflichen Natur des porösen Gerüstes und der tränkenden Flüssigkeit. Aus der Superposition aller Partialströme geht dann der totale Strom im Bussolkreise hervor, dessen Stärke aber selbstverständlich auch noch eine unbekannte, verwickelte Function der Stärke und Dauer des polarisirenden Stromes, und der seit seiner Öffnung verflossenen Zeit ist. Nur im Allgemeinen sieht man ein, dass sie mit dem Wachsen der beiden ersten Veränderlichen bis zu einer gewissen Grenze wachsen, mit dem der dritten abnehmen müsse.

Ein durchsichtiges Beispiel innerer Polarisation bietet ein der Axe nach durchströmter Cylinder wohl ausgeglühter, mit verdünnter Schwefelsäure getränkter Holzkohle. Sie leitet stofflich gut genug, damit trotz der guten Nebenleitung durch die verdünnte Säure ein Theil des Stromes seinen Weg durch sie nehme. Jede gleich lange Strecke des Kohlencylinders wirkt gleich stark secundär-elektromotorisch: die Wirkung des ganzen Cylinders ist gleich der Summe der Wirkungen aller einzelnen Strecken. Auch Holz nimmt sehr starke innere Polarisation an. Nur darf es, da die Holzfaser schlecht leitet, nicht mit besser leitender Flüssigkeit getränkt werden. Mit Kochsalz- und Kupfer-

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. I. Abth. I. S. 380. 381; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. A. a. O. S. 13—28: »Über innere Polarisation poröser, mit Elektrolyten getränkter Halbleiter.« (4. August 1856.)

sulphat-Lösung erhält man nur schwache Wirkung; am günstigsten ist destillirtes Wasser.

An Holzprismen studirte ich den Einfluss von Länge und Querschnitt des innerlich polarisirbaren Körpers auf die Stärke des Polarisationsstromes unter sonst gleichen Umständen. Zunächst versteht es sich von selbst, dass bei der inneren Polarisation nicht die Stromstärke, sondern die Stromdichte in Betracht kommt. In Übereinstimmung mit der Theorie zeigte sich aber ferner, dass die Stärke der inneren Polarisation eine Function des Widerstandes des feuchten porösen Körpers ist, sofern dieser Widerstand durch die Dimensionen bestimmt wird. Die Function besitzt ein Maximum, welches in einem gegebenen Kreise bei beständiger Länge des innerlich polarisirbaren Körpers mit um so grösserem Querschnitt eintritt, je schlechter die tränkende Flüssigkeit leitet.[1]

§. IV. *Fortsetzung der Vorstudien: von der Polarisation an der Grenze ungleichartiger Elektrolyte.*

Gewisse Wahrnehmungen bei den Versuchen über innere Polarisation führten mich zur Kenntniss einer zweiten Art von Polarisation an feuchten Leitern, nämlich der Polarisation an der Grenze ungleichartiger Elektrolyte. Im Gegensatz zur inneren Polarisation bietet sie die Eigenthümlichkeit, dass sie auch positiv sein kann. Befindet sich gleichzeitig im Kreise ein innerlich polarisirbarer Körper, so erhält man oft, was ich 'doppelsinnige Wirkung' nenne, d. h. einen Ausschlag erst im einen, dann im anderen Sinne.[2] Wird beispielsweise ein Wasserbausch zwischen Kochsalzbäuschen durchströmt, so erfolgt nach Öffnung der polarisirenden Kette und Schliessung des Bussolkreises zuerst ein negativer 'Vorschlag', dem eine länger anhaltende positive Ablenkung auf dem Fusse folgt. Der negative Vorschlag rührt von innerer Polarisation des Wasserbausches her, die positive Ablenkung von der Summe der positiven Polarisationen an den Grenzen von Salzlösung und Wasser, Wasser und Salzlösung. Die innere Polarisation ist stärker, aber flüchtiger, die äussere schwächer, aber nachhaltiger, woraus sich der negative Vorschlag, gefolgt von einem positiven Hauptausschlag, erklärt.

---

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 29—41: »Über den Einfluss, welchen die Dimensionen innerlich polarisirbarer Körper auf die Grösse der secundär-elektromotorischen Wirkung üben.« (31. Januar 1859.)

[2] Ebenda. Bd. II. Leipzig 1877. S. 407.

Ähnlich dem Wasserbausche verhalten sich zwischen Kochsalzbäuschen alle von mir untersuchten frischen thierischen Gewebe: ein Stück Rippe, Rippenknorpel, Sehne, elastisches Gewebe, Froschhaut, Haut vom Menschen, Stücken Lunge, Leber, Milz, Niere vom Kaninchen, endlich Muskeln und Nerven. Sie nehmen positive äussere Polarisation an, welche sich mit innerer negativer Polarisation algebraïsch summirt. Letztere tritt unter sonst gleichen Umständen um so stärker hervor, je länger die durchströmte Strecke.[1]

In einem Bogen aus Zinkbäuschen, physiologischem Kochsalzthon und thierischen Theilen macht sich unter den gewöhnlichen Umständen die äussere Polarisation wenig bemerkbar.[2] Doch empfiehlt es sich, um bei Versuchen über innere Polarisation der Muskeln und Nerven ganz sicher zu gehen, die secundär-elektromotorischen Wirkungen nicht mittels derselben Bäusche, Thonspitzen u. d. m. abzuleiten, welche den primären Strom zuführen, oder, wenn diese Anordnung aus gewissen Gründen geboten sein sollte, wenigstens nicht zu vergessen, dass dabei Polarisation an der Grenze der ungleichartigen Elektrolyte sich einmischen kann.

§. V. *Weitere Fortsetzung der Vorstudien: vom äusseren und vom inneren Widerstande feuchter poröser Körper.*

Als ich diesen Punkt erreicht hatte, glaubte ich von den Vorgängen bei Durchströmung einer Reihe feuchter poröser Körper genug zu wissen, um in der Erforschung der secundär-elektromotorischen Erscheinungen der Muskeln und Nerven ungefährdet fortzuschreiten. Doch fand ich mich arg getäuscht. Nachdem ich nämlich schon zahllose Versuche der Art angestellt hatte, entdeckte ich einen neuen Quell des Irrthums, durch welchen meine bisherige Arbeit, wenn auch nicht werthlos, doch für strengere Ansprüche unzureichend wurde. Dies war der von mir sogenannte secundäre Widerstand der feuchten porösen Körper, welchen ich nun zum Gegenstand einer ausgedehnten und mühseligen Versuchsreihe machte.[3] Ich verstehe darunter einen Widerstand, der durch den Strom selber erzeugt, nach Aufhören des Stromes allmählich etwas abnimmt, bei dessen Umkehr allmählich

[1] Ebenda. Bd. I. S. 1—12: »Über Polarisation an der Grenze ungleichartiger Elektrolyte.« (17. Juli 1856.). — Vergl. unten S. 369.

[2] Ebenda. Bd. II. S. 189 ff.

[3] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 80—130: »Über den secundären Widerstand, ein durch den Strom bewirktes Widerstandsphänomen an feuchten porösen Körpern.« (20. December 1860.)

schwindet. Der in geronnenem Eiweiss zwischen Zinkbäuschen sich entwickelnde secundäre Widerstand kann den Strom einer zwanzigliederigen Grove'schen Säule so schwächen, dass nur ein Zehntel der ursprünglichen Stärke übrig bleibt. Der secundäre Widerstand überwiegt also weit die Erhöhung der Leitungsgüte in Folge der Erwärmung der feuchten Leiter durch den Strom. Wenden des Stromes in feuchten porösen Körpern, in welchen secundärer Widerstand herrscht, bringt nicht, wie Wenden des Stromes in polarisirten Leitern, einen plötzlichen positiven Sprung der Stromstärke hervor, sondern es bietet sich das merkwürdige Schauspiel ihres minutenlangen langsamen Wiederanwachsens bis fast zur ursprünglichen Höhe, worauf das Sinken von vorn anfängt, um bei erneutem Wenden abermals mit langsamem Wachsen abzuwechseln.

Es giebt zwei Arten secundären Widerstandes, nämlich entsprechend der äusseren und der inneren Polarisation feuchter poröser Körper, einen äusseren und einen inneren secundären Widerstand. Des ersteren Sitz ist die Eintrittsstelle des Stromes, und obschon Manches dunkel bleibt, erklärt er sich aus der kataphorischen Wirkung des Stromes, aus dem Forttreiben der im Kreise befindlichen Flüssigkeiten von der Anode zur Kathode. Wo ein Zinkbausch thierischen Geweben den Strom zuführt, entwickelt sich ein sehr starker äusserer secundärer Widerstand, doch ist es leicht, seiner Entstehung durch die von mir angegebenen Mittel vorzubeugen. Der innere secundäre Widerstand, welcher überall im feuchten porösen Körper seinen Sitz hat, ist in bedeutendem Grade bisher nur im lebenden Pflanzengewebe beobachtet, und kommt daher bei den hier in Rede stehenden Versuchen minder in Betracht.[1]

Die Untersuchung der äusseren und der inneren Polarisation, des äusseren und des inneren secundären Widerstandes der feuchten porösen Körper, die mich mehrere Jahre festhielt, war somit nur ein Glied in der Reihe von Forschungen, in welchen ich den secundärelektromotorischen Erscheinungen der Muskeln und Nerven nachging. Wenn ich im Verfolgen dieses Hauptzweckes durch jene Vorstudien über die Gebühr aufgehalten wurde, so beschwichtigte meine Ungeduld nicht bloss die offenbare Nothwendigkeit, hier solche sichere Grundlage zu schaffen, sondern auch die Einsicht, dass dieselbe Grundlage für alle physiologisch-elektrischen Versuche gleich unentbehrlich sei.[2]

---

[1] Über den secundären Widerstand ist ferner nachzusehen: H. Munk, Über die kataphorischen Veränderungen der feuchten porösen Körper. Im Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w. 1873. S. 241 ff.

[2] Vergl. Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 191 ff.

Leider wurde ich noch fast zwei Jahrzehnde lang durch andere Aufgaben davon abgehalten, die errungene Stellung auszunutzen. Etwa um dieselbe Zeit war ich in den Besitz der unpolarisirbaren Elektroden gelangt, ich hatte im physiologischen Kochsalzthon ein unschätzbares Material zum Ab- und Zuleiten der Ströme in physiologisch-elektrischen Versuchen entdeckt, dem Poggendorff'schen Compensationsverfahren die richtige Gestalt gegeben, und etwas später diesen Fortschritten in der Methode noch die Erfindung der aperiodischen Bussole hinzugefügt. So entstand für mich die Nöthigung, mit diesen neuen, den älteren so weit überlegenen Hülfsmitteln fast alle meine Versuche zu wiederholen, in welchen jetzt Messung der elektromotorischen Kräfte an Stelle der Schätzung von Stromstärken trat. Auch die mir vom Auslande zur Untersuchung anvertrauten Zitterwelse aus Westafrika lenkten mich vom Wege ab, und noch jüngst kostete mich die Bearbeitung des Sachs'schen Nachlasses fast zwei Jahre. Die letzteren Zwischenfälle hatten aber die wichtige Folge, dass ich über die secundär-elektromotorischen Erscheinungen an den elektrischen Organen einigen Aufschluss erhielt.

§. VI. *Einiges von Vorrichtungen und Versuchsweisen.*

Die ausführliche Beschreibung meiner jetzigen Vorrichtungen und Versuchsweisen in diesem Gebiete bleibt späteren Mittheilungen vorbehalten. Doch mag Einiges davon schon hier gesagt werden, damit das Folgende bestimmte Vorstellungen erwecke.

Zu den Versuchen an Muskeln dienten gewöhnlich die in ihrem natürlichen Zusammenhange gelassenen, im Muskelspanner[1] ausgestreckten Mm. gracilis und semimembranosus vom Frosch, wie ich sie seit langer Zeit anwende, wo es gilt, an regelmässigen immobilisirten Muskeln zu arbeiten. Zunächst den Elfenbeinplatten des Spanners werden den Muskeln von der inneren (femoralen) Seite her die Schneiden von Keilbäuschen[2] angelegt, welche den polarisirenden Strom zuführen: dazwischen, von der äusseren Seite her, die Schneiden von Keilbäuschen, welche den Polarisationsstrom ableiten. Des Widerstandes der Sehnen wegen, die sich erhitzen und austrocknen würden, kann man nicht, was sonst grosse Vorzüge hätte, den Muskeln den Strom durch die den Knochenstücken ausserhalb der Elfenbeinplatten angelegten gewöhnlichen Bäusche zuführen. Die beiden Paar Schnei-

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. I. S. 86; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 118. 119; — Bd. II. S. 313.

[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 88. 89.

den, welche im Folgenden kurz Säulenschneiden und Bussolschneiden heissen, sind mit oft erneutem Thone bekleidet; bei der geringen Dauer der meisten Versuche sind Störungen durch äusseren secundären Widerstand wenig zu fürchten, jedenfalls sind sie stets leicht erkennbar. Der Muskelstrom war durch einen mittels des runden Compensators gewonnenen Zweigstrom einer Raoult'schen Kette compensirt.[1]

Zu den Versuchen an Nerven dienten gewöhnlich die beiden als ein Nerv zusammengefassten Ischiadnerven desselben Frosches. Sie wurden sanft ausgespannt zwischen zwei an einem wagerechten Glasstabe verschiebbaren Korkstücken, auf deren oberer Fläche sie mit Insectennadeln festgesteckt waren; und die beiden Paar Keilbäusche wurden ihnen wie den Muskeln von beiden Seiten her genähert. Für Versuche an Spinalnervenwurzeln dienten theils die unpolarisirbaren Zuleitungsröhren mit Thonspitzen,[2] theils besondere Vorrichtungen.

[redacted]e nicht leicht zu erfüllende Bedingung sicherer Erfolge bei
ersuchen ist so vollkommene Isolation des Säulenkreises vom
V C., Datum eise, dass auch bei sehr grossen elektromotorischen Kräften, wie
37. ner fünfziggliederigen Grove'schen Säule, bei offenem Säulen-
olkreise keine Ablenkung an der Bussole entsteht. Das Mittel
ich schon früher kurz an bei Beschreibung der Versuche
sere Polarisation an feuchten Leitern.[3] Es besteht darin,
beiden Kreise an zwei Stellen zu unterbrechen.
Vorrichtung, welche dies leistet, erfüllt zugleich noch einen
weck. Sie dient auch zur Beherrschung der Zeit, während
er polarisirende Strom durch das Polarisations-Object gesandt
der Schliessungszeit. Ich besitze mechanische Mittel, um
stätig von 0.001 bis 0.100 Secunde, dann in passenden Ab-

n Rektor/

n grossen Dank

Rundschreiben d

rsuchungen am Zitteraal u. s. w. S. 141.
meiner letzten Veröffentlichung experimentellen Inhalts stiess ich an den
en Zuleitungsröhren mit 'Thonstiefeln' auf eine Erscheinung, welche
deren Gebrauch Beachtung verdient, sondern auch noch sonst interessirt.
Paar solcher Röhren, das sich bei Schliessung des Kreises durch gegen-
ung der Spitzen der Thonstiefel so gleichartig wie möglich verhält, und
nit der Spitze des einen Stiefels den dickeren oberen Theil des anderen,
, so entsteht ein Strom in der Richtung aus der Spitze in den Wulst.
Die Wirkung ist minder deutlich bei frischen als bei schon länger zusammengesetzten Röhren. Sie würde sich durch die Annahme erklären, dass feuchter und minder feuchter Thon miteinander elektromotorisch wirken, jedoch so, dass für eine Reihe immer feuchterer Thonschichten keine Spannungsreihe gilt. — Feuchter und minder feuchter Thon einander zwischen Zinkbäuschen berührend liefern eine Kraft bis zu 0.014 Raoult. — Die Beziehung der elektromotorischen Wirkung zwischen ungleich feuchtem Thon zu den Nobili'schen Thon-Thermoströmen ist noch nicht aufgeklärt (Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. I. S. 201—203).

[3] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 2.

ständen von ungefähr 0.3 bis 20″ Secunden zu verändern. Darüber hinaus kommen die Fehler nicht mehr in Betracht, die man bei Schliessen und Öffnen mit der Hand nach der Uhr begeht. Dieselbe Vorrichtung besorgt endlich auch die Schliessung des Bussolkreises nach Öffnung des Säulenkreises nach möglichst kurzer und gleicher Zeit, welche die Übertragungszeit heisst.

Die zum Polarisiren angewandten galvanischen Apparate waren eine Daniell'sche Kette von der gewöhnlichen (Trinkglas-) Grösse, deren verdünnte Schwefelsäure bei 19°.4 1.03 Dichte besass, und eine Grove'sche Säule aus den bekannten kleinen Elementen, deren ich fünfzig besitze.[1] Um von dem veränderlichen Widerstand der Bäusche, Schneiden, Muskeln u. s. w. unabhängig zu sein, wurde der gute Zustand der Säule mit einer metallischen Schliessung controlirt. Andere Elektromotore werden besonders erwähnt.

Die secundär-elektromotorischen Wirkungen wurden an der aperiodischen Bussole beobachtet. Da diese Wirkungen oft doppelsinnig sind, leistet die Aperiodicität hier ganz besonders werthvolle Dienste: sie macht Vorkehrungen unnütz, wie ich sie ursprünglich anwendete, wodurch der Bussolkreis anstatt möglichst schnell nach Öffnung des primären Kreises, erst nach kürzerer oder längerer Übertragungszeit geschlossen wurde.

Endlich versteht es sich von selbst, dass wie bei Elektrotonus-, so auch bei Polarisations-Versuchen stäte Überwachung des primären Stromes an einer besonderen Bussole unerlässlich ist. Mit keiner anderen als der Wiedemann'schen Bussole wäre dies hier möglich, wo es sich darum handelt, in aufeinanderfolgenden Versuchen vielleicht die dauernde Ablenkung durch den Strom von dreissig Grove, und den fast zehntausendmal schwächeren Ausschlag durch einen nur wenig Tausendstel einer Secunde anhaltenden Stromstoss von Einem Daniell messend zu vergleichen.

Ich verlor viel Zeit und Mühe mit dem Versuche, die Bussole (*P*) für den primären oder polarisirenden und die (*S*) für den secundären Strom im nämlichen Fernrohr abzulesen. Abgesehen von technischen Schwierigkeiten wird der Beobachter dabei mit zu vielen Geschäften auf einmal belastet, und ich kehrte zur einfachsten Art zurück, einen Gehülfen die zweite Bussole ablesen zu lassen.

---

[1] Im Jahre 1849 hatte die Akademie, der ich noch nicht die Ehre hatte anzugehören, die Güte, mir auf meine Bitte für diese Untersuchung eine hundertgliederige Daniell'sche Säule von Siemens und Halske zur Verfügung zu stellen. Ich kehrte aber bald zu den kleinen Grove zurück, die bei grösserer Leistung so viel handlicher sind.

§. VII. *Die secundär-elektromotorische Wirkung der Muskeln in ihrer Abhängigkeit von Dichte und Dauer des primären Stromes.*

Man stelle sich das Muskelpaar, bestehend aus Gracilis und Semimembranosus, im Muskelspanner so unbeweglich ausgestreckt vor, dass es bei der Zuckung sich nicht merklich verschiebt, die beiden Paar Keilbäusche den Muskeln in der beschriebenen Art angelegt, und den Muskelstrom compensirt. Bei symmetrischer Lage der Schneiden pflegt dieser in den Muskeln aufzusteigen, mit einer Kraft, welche, oft nur unbedeutend, manchmal bis zu 0.017 Raoult beträgt.

Wird nun bei doppelt geöffnetem Bussolkreise den Muskeln ein Strom während kürzerer oder längerer Zeit zugeführt, und wird unmittelbar nach doppelter Öffnung des Säulenkreises der Bussolkreis geschlossen, so gleicht sich durch letzteren die etwa in den Muskeln erregte secundär-elektromotorische Wirkung ab, und kommt an der Bussole rein zum Vorschein, unter der Bedingung, dass die Compensation ungestört blieb. Bei längerem Säulenschlusse, nachlassender Spannung der Muskeln, heftiger Zuckung ist diese Bedingung nicht immer sicher erfüllt; wozu noch kommt, dass, wenn ein stärkerer Muskelstrom zu compensiren war, die Zuckung Nachwirkung hinterlässt. Inzwischen sind die secundär-elektromotorischen Wirkungen meist zu bedeutend, um mit solchen Störungen verwechselt zu werden. Sie rühren allein von innerer Polarisation der Muskeln her; selbst wenn an den Säulenschneiden äussere Polarisation in merklichem Grade sich entwickelte, könnte diese sich nicht durch den Bussolkreis abgleichen. Auch überzeugt man sich leicht, dass jede Strecke der Muskeln secundär-elektromotorisch in demselben Sinne wirkt, daher, bei ausreichendem Widerstand des Bussolkreises, die Stärke der Wirkung mit dem Abstand der Bussolschneiden wächst. Bei gleicher Beschaffenheit aller Strecken müssten diese auch gleich stark secundär-elektromotorisch wirken. Abgesehen von der Unmöglichkeit die Schneiden zweimal nacheinander gleich anzulegen, trifft dies an unserem Muskelpaare schon deshalb nicht ein, weil der Semimembranosus sich nach unten verjüngt.[1] Wir werden aber noch einen anderen Grund kennen lernen, weshalb die beiden Hälften eines Muskels nicht gleich stark secundär-elektromotorisch wirken (s. unten S. 363).

Schickt man verschieden starke Ströme verschieden lange Zeit durch die Muskeln, so stellen sich die secundär-elektromotorischen Wirkungen anfangs sehr verworren dar. Man erhält bald negative Ausschläge wie von einem gewöhnlichen innerlich polarisirbaren feuchten

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 161. 315. 575.

porösen Körper, bald dagegen auch positive Ausschläge, als mischte sich äussere Polarisation ein. Wie bemerkt, ist diese hier durch die Anordnung ausgeschlossen, und es zeigt sich denn auch, dass die positive secundär-elektromotorische Wirkung auf positiver innerer Polarisation beruht, ein Verhalten, von welchem die Reihe der von mir auf innere Polarisirbarkeit geprüften Körper kein Beispiel bot. Diese positive innere Polarisation des Muskelgewebes ist also hier das Neue und Interessante,[1] und es handelt sich vor Allem darum, die Bedingungen ihres Auftretens festzustellen.

Dies zu erreichen giebt es keinen anderen Weg, als eine Tabelle mit doppeltem Eingange zu entwerfen, in deren einem Kopfe, etwa dem wagerechten, die Schliessungszeiten stehen, während im senkrechten Kopfe sich die Zahl der Säulenglieder findet. In dem zu einer bestimmten Schliessungszeit und einer bestimmten Stromdichte gehörigen Felde sind einzutragen erstens die Ablenkungen, welche der polarisirende Strom an der Bussole (P) erzeugt; zweitens die secundär-elektromotorischen Wirkungen, welche er an der Bussole (S) hinterlässt; und zwar beides sowohl bei auf- als bei absteigender Richtung des polarisirenden Stromes.

Das Herstellen solcher Tabelle ist ein sehr mühsames Geschäft. Die durch irgend stärkere und längere Ströme erzeugten secundären Wirkungen sind meist so nachhaltig, dass man fast für jeden Versuch ein frisches Praeparat nehmen muss. Ausgenommen sind nur die Fälle, wo ganz schwache Ströme einen kleinen Bruchtheil der Secunde dauern, da dann die Polarisation flüchtig genug ist, um gleich darauf andere Versuche, insbesondere mit stärkeren und längeren Strömen, folgen zu lassen; so wie, im Gegensatz dazu, die Fälle, wo ein länger dauernder Strom so nachhaltige Polarisation erzeugt, dass man, ohne den Polarisationszustand merklich zu ändern, kurze Zeit den Säulenkreis öffnen, und den Bussolkreis schliessen kann. In den anderen Fällen, wo eine erst schnell, dann langsam sinkende Polarisation hinterbleibt, könnte man nun zwar leicht von Neuem compensiren und so Gleichgewicht im Bussolkreise herstellen. Allein man wäre dann doch nicht sicher, bei wiederholten Versuchen am selben Praeparat die nämliche secundäre Wirkung zu erhalten, wie am frischen Muskel. Will man warten bis die Polarisation sich zerstreute, so verfliesst auch wieder zu lange Zeit, um darauf rechnen zu dürfen, dass der Muskel wie ein frischer sich verhalte.

[1] Ich gab zuerst Nachricht davon in meinen 'Untersuchungen', Bd. I. 1848. S. 240 und Bd. II. Abth. I. 1849. S. 331. — 1852 machte ich darüber der British Association zu Belfast eine ausführlichere Mittheilung (Report of the twenty-second Meeting of the British Association etc.; held at Belfast in September 1852. London 1853. Notices and Abstracts etc. p. 78). Später spielte ich wieder darauf an in dem Vortrag über die Zitterwelse aus Westafrika (Monatsberichte der Akademie u. s. w. 1858. S. 106) und in den 'Untersuchungen am Zitteraal u. s. w.' S. 206.

Wegen der Nothwendigkeit, dem Muskelpaare das Becken zu lassen, liefert jeder Frosch nur ein Paar, daher jeder Versuch, der nicht unter jene beiden Ausnahmen gehört, einen neuen Frosch kostet. Sollen aber die Ergebnisse vergleichbar sein, so müssen die Frösche erstens der Grösse nach sich nicht zu sehr unterscheiden, zweitens sich in möglichst gleichem Zustande befinden. Erwägt man nun, dass, um zu einer einigermaassen vollständigen Kenntniss der Erscheinung zu gelangen, mindestens etwa zehn Schliessungszeiten und ebensoviel Stromdichten in beiden Richtungen durchzuprobiren sind, was zweihundert Versuche giebt; dass diese zweihundert Versuche möglichst hintereinander an fast ebensoviel möglichst gleich frischen und grossen Fröschen angestellt sein wollen; rechnet man hinzu die unvermeidlichen Fehlschläge und Wiederholungen, so sieht man, dass eine Tabelle, wie die verlangte, die Arbeit vieler Wochen ist, zu der eine grosse Menge günstiger Umstände sich vereinigen muss, und man wird sich nicht wundern, dass ich in so langer Zeit mich nur zweimal daran wagte.

Das erstemal, im Herbst 1855, besass ich noch keine der neuen Vorrichtungen und Versuchsweisen und ich wusste noch nichts vom secundären Widerstande. Ich entdeckte ihn vielmehr erst, leider zu spät, bei dieser Gelegenheit, und die ganze Arbeit, die übrigens jetzt auch sonst veraltet wäre, musste verworfen werden (vergl. oben S. 348).

Erst im vorigen Sommer, 1882, kam ich dazu, eine neue Tabelle auszuarbeiten. Die Schwierigkeiten waren mittlerweile nicht vermindert, denn in dem Maasse, wie die Hülfsmittel vervollkommnet waren, hatten auch die Ansprüche an Genauigkeit sich gesteigert. Als Normalmaass der Frösche setzte ich jetzt 22^{cm} zwischen Nasenspitze und längster Zehe fest; grössere Abweichungen als $^1/_2{}^{cm}$ liess ich nicht zu. Ich wendete vierzehn Schliessungszeiten an, von 0″.006 bis 25′, und neun Stromstärken, von Einem Daniell bis zu vierzig Grove. Ohne die Fehler und Wiederholungen betrug die Zahl der Versuche 198. Es würde dem Charakter der gegenwärtigen Mittheilung nicht entsprechen, diese Tabelle hier vollständig abzudrucken; nur eine Probe will ich davon geben.

		0″.006	0″.076	0″.320	1″.122	4″.626	10″.022	14″.754	20″.018	1′	5′
X	S	+ 86^{sc}	+ 133	+ 109	+ 84	+ 73	— 66	— 79	— 125	— 170	— 119
	P	18^{sc}	109	400	305	1250	2020	2100	2216	1669 bis 1824	1824 bis 1962
	S	+ 79	+ 111	+ 160	+ 164	− 15 bis + 4	− 9 bis + 34	− 87 bis − 112	— 62	— 100	— 24
	P	14	178	229	865	2129	1337	2412	1777	1657 bis 1860	1860 bis 2151

Wie nicht gesagt zu werden braucht, zeigt der wagerechte Kopf die Schliessungszeiten, unter Einer Secunde vor dem ersten, unter Einer Minute vor der zweiten senkrechten Doppellinie. Die X bedeutet, dass der polarisirende Strom von zehn Grove herrührte. Die Pfeile geben die Stromrichtung in den Muskeln an. Die wagerechten Reihen S enthalten die Ablenkungen durch den secundären Strom; das Pluszeichen bedeutet positive, das Minuszeichen negative Polarisation. Die Empfindlichkeit der Bussole *(S)* war vermindert; es wurde nur eine Rolle in 3^{cm} Abstand angewendet. Zwei Zahlen hinter einer Klammer zeigen doppelsinnige Polarisation an. In den wagerechten Reihen P finden sich die Ablenkungen durch den primären Strom. Wegen $4''.626 > t_{max}$[1] erreicht für diese und für jede grössere Schliessungszeit der durch den primären Strom abgelenkte Spiegel der Bussole *(P)* die Ablenkung, in welcher er durch den beständigen Strom gehalten werden würde. Die Grösse der hier vorkommenden Zahlen rührt daher, dass die Ablenkungen reducirte sind. Die Bussole war nämlich graduirt, d. h. von 5 zu 5^{mm} des Geleises war das relative drehende Moment der Rolle bekannt. Je nach der Stromstärke wurde die Rolle so weit vom Spiegel entfernt, dass sie eine passende Ablenkung A erzeugte. Es heisse m das relative Moment für den Rollenabstand von 20^{mm}, m' das Moment für den jedesmal gewählten Abstand, so ist die reducirte Ablenkung $A_r = A \cdot m/m'$. Bei den grössten hier angewandten Stromstärken kamen reducirte Ablenkungen von fast 10000^{sc} heraus (vergl. oben S. 352). An den Zahlen P der Tabelle erkennt man übrigens sofort die grosse Unvollkommenheit, welche diesen Versuchen, trotz allen meinen Bemühungen, noch immer anhaftet. Von der Schliessungszeit $4''.626$ an sollten sämmtliche Ablenkungen durch den primären Strom dieselben sein; sie schwanken im Verhältniss von 100 : 180, zum Theil wegen der Unmöglichkeit, den Widerstand des Muskels und der Keilbäusche mit ihrer Thonbekleidung in mehreren aufeinanderfolgenden Versuchen gleich gross zu machen, zum Theil, da diese Erklärung kaum genügt, aus anderen, unbekannten Gründen. Das Wachsen der Stromstärke, wenn die Schliessung Eine Minute und darüber dauert, rührt von Erwärmung der Keilbäusche, ihrer Schneiden und der Muskeln selber her. Bei noch grösserer Stärke und längerer Dauer des Stromes wird diese Wirkung durch äusseren secundären Widerstand an der Eintrittsstelle des Stromes in die Muskeln überwogen (s. oben S. 349.)

Die Polarisation nach $1'$ Schluss war so stätig, dass kurze Zeit der Säulenkreis geöffnet, der Bussolkreis geschlossen werden konnte,

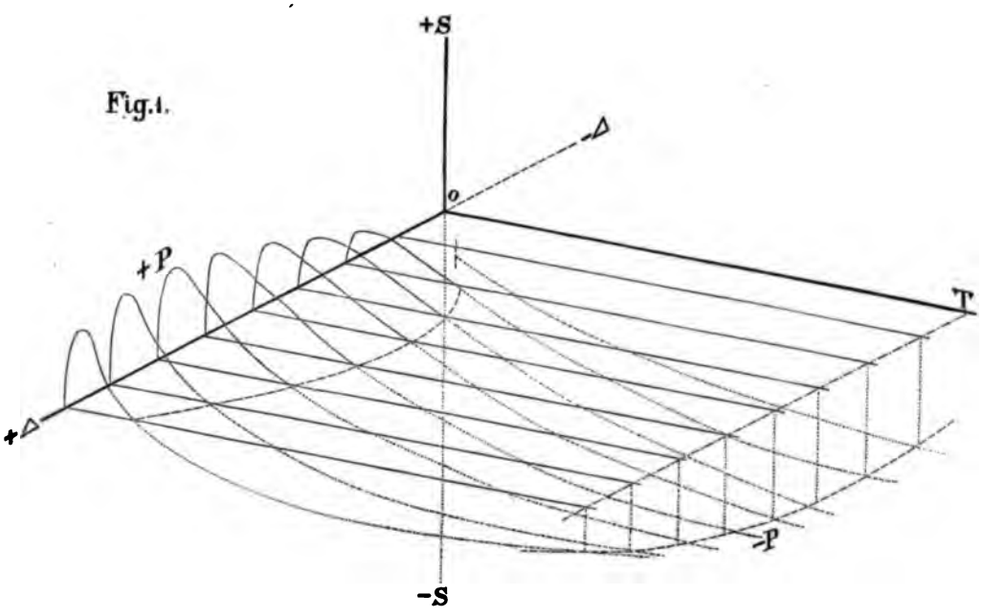
[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 302.

ohne den Polarisationszustand merklich zu ändern, so dass kein neues Praeparat genommen zu werden brauchte (s. oben S. 354).

§. VIII. *Graphische Darstellung und Discussion der Polarisationscurven bezogen auf die Schliessungszeit.*

Wie unvollkommen diese Versuche auch noch seien, es lässt sich ihnen doch schon eine Anzahl wichtiger Schlüsse entnehmen. Die nebenstehende Fig. 1 zeigt zunächst den allgemeinen Gang der Erscheinung.

Fig. 1.



Nennen wir T die Schliessungszeit, Δ die Dichte des primären Stromes, $\pm s$ die Stärke der secundär-elektromotorischen Wirkung, so ist die perspectivisch gesehene, gleichsam gedielte Ebene die T-Δ-Ebene. Auf den, bestimmten Schliessungszeiten und Stromdichten entsprechenden Punkten dieser Ebene sind parallel der S-Axe die secundären Wirkungen aufgetragen, die positiven über, die negativen unter der Ebene. Doch sind nicht die Ordinaten s selber gezeichnet, sondern die Curven, welche die zu einer bestimmten Stromdichte gehörigen Ordinaten verbinden, und also die Stärke der durch diese Stromdichte erzeugten secundären Wirkung als Function der Schliessungszeit vorstellen. Obschon im Allgemeinen von ähnlichem Verlaufe, ändern sich diese Curven doch stätig mit wachsender Stromdichte. In folgenden allgemeinen Eigenschaften kommen sie überein. Der Schliessungszeit

Null entspricht natürlich secundäre Wirkung gleich Null. Die Curven gehen also von der △-Axe aus. Sie erheben sich schnell zu einem positiven Maximum, und senken sich dann minder steil, doch immer noch sehr rasch, der T-△-Ebene zu. Bis zu dem Punkte, wo sie diese Ebene schneiden, sind sie in der Figur ausgezogen; weiterhin, in ihrem negativen Verlaufe, sind sie punktirt. Hier zeigt sich, in grösserer Entfernung vom Schneidepunkt als das positive Maximum, aber um so früher, je grösser die Stromdichte, ein meist schwächer ausgeprägtes negatives Maximum: bei einem Daniell erst nach 15′, einem Grove nach 10′, zwei Grove nach 5′, fünf Grove nach 1′ u. s. w. Bei 1′ liegt es auch in dem oben mitgetheilten Stück der Tabelle, welches mit zehn Grove gewonnen wurde, und man sieht klar, dass es nicht etwa auf Schwächung des primären Stromes durch secundären Widerstand beruhen kann. Über dies negative Maximum hinaus habe ich die Polarisationscurven bezogen auf die Schliessungszeit noch nicht weiter verfolgt. Doch bieten sie vermuthlich nichts Besonderes mehr dar, sondern nähern sich sehr allmählich der Axe der Schliessungszeiten, bis, bei übermässiger Dauer des Versuches, das Ergebniss zuletzt durch allerlei Nebenwirkungen getrübt wird.

Bei Stromdichten unter der von zwei Grove und bei ganz kurzer Schliessungszeit erscheint überhaupt keine an der Bussole bemerkbare Polarisation. Die ersten Spuren, welche man bei einem Daniell und 1″ Schliessungszeit auftreten sieht, sind negativ: negative innere Polarisation der Muskeln erhält man auch, wie ich dies schon vor langer Zeit beschrieb, durch längeres Hindurchleiten eines Stromes von der Ordnung des Muskelstromes.[1] Die ersten positiven Spuren dagegen kommen erst bei zwei Grove und ungefähr 0″.3 Schliessungszeit zum Vorschein.

Die Schliessungszeit, für welche die positive Polarisation in die negative übergeht, mag die kritische heissen. In der Figur sind die Punkte, an welchen die Polarisationscurven bezogen auf die Schliessungszeit die T-△-Ebene schneiden, durch eine gestrichelte Curve verbunden. Diese Curve ist also die der kritischen Schliessungszeiten bezogen auf die Axe der Stromdichten als Abscissenaxe. Wie man sieht, hat die Curve der kritischen Schliessungszeiten ein Maximum: in meinen Versuchen lag dies Maximum etwa bei der durch zwei Grove erzeugten Stromdichte, und die kritische Schliessungszeit betrug dann etwa 5″. Bei zwanzig Grove war sie nur etwa 1″.

Verbindet man die positiven Maxima der einzelnen Polarisationscurven bezogen auf die Schliessungszeit durch eine Curve, so zeigt

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 191. 192.

auch diese wieder ein Maximum bei etwa zwanzig bis dreissig Grove; und ebenso zeigt eine Curve, welche die negativen Maxima verbindet, ein Maximum, aber dies schon bei nur einem Grove.

Es bleibt übrig, von der Grösse dieser Maxima im Vergleich mit dem Muskelstrom eine Vorstellung zu geben. Liess ich durch den Bussolkreis, in welchem das Muskelpaar wie bei einem Polarisationsversuche sich befand, eine elektromotorische Kraft von etwa 0.045 bis 0.055 Raoult, entsprechend der Kraft eines mit dem ganzen[1] künstlichen Querschnitt aufgelegten Gracilis oder Semimembranosus, wirken, so erfolgte, bei der verminderten Empfindlichkeit der Bussole, eine Ablenkung von 235—285^{sc}. Die stärkste negative Polarisation beobachtete ich bei 10′ Minuten langer Schliessung eines Grove, und sie gab 423^{sc}. Die stärkste positive Polarisation erhielt ich durch 0″.075 lange Schliessung von zwanzig Grove; sie betrug 239^{sc}, und blieb also an elektromotorischer Kraft scheinbar etwas hinter dem Muskelstrome zurück. Doch werden wir bald sehen, dass dies eine trügliche Schätzung ist. Wie sich die secundär-elektromotorischen Wirkungen der Muskeln der Grösse nach zu denen anderer feuchter poröser Körper verhalten, ist noch nicht untersucht.

Sofern obige Zahlenwerthe für die Lage der Maxima u. d. m. von der Dichte des primären Stromes abhangen, gelten sie natürlich nur für das Muskelpaar von 22^{cm} langen Fröschen bei unserer Art der Zuleitung. Übrigens darf man nicht erwarten, das Verhältniss zwischen diesen Zahlenwerthen in Fig. 1 treu wiedergegeben zu finden. Räumliche Rücksichten machten dies unmöglich. Da beispielsweise die kritische Schliessungszeit in unseren Versuchen höchstens 5″ beträgt, das Maximum der negativen Polarisation aber erst nach 10—15′ eintritt, so müsste die Figur drei bis vier Meter lang sein, um bei den für die ersten Secunden der Schliessung angenommenen Maassen jenes Maximum an der richtigen Stelle zu zeigen; die Stromdichten müssten einen mindestens fünfmal breiteren Raum einnehmen u. d. m.

An die Versuche mit galvanischen Strömen von veränderlicher Stärke und Dauer schliessen sich solche mit Elektromotoren, welche ihrer Natur nach kurze Stromstösse erzeugen; diese geben ohne Weiteres positive Polarisation. Ich fand noch nicht Zeit, derartige Versuche mit den neuen Vorrichtungen und Versuchsweisen anzustellen, und muss mich begnügen, ältere Ergebnisse anzuführen, die im Wesentlichen richtig sein werden. Im December 1846 erhielt ich allem Anschein nach positive Polarisation an den Beinen eines lebenden Frosches mit einer Saxton'schen Maschine, deren Schläge

[1] Vergl. Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 193. 243.

durch einen Stromwender gleichgerichtet werden konnten. Da diese von Oertling für Dove gebaute Maschine[1] in den Besitz des physiologischen Institutes überging, bin ich in der Lage, jene noch mit sehr unvollkommenen Einsichten und Versuchsweisen angestellten Versuche zu controliren. Schon unter etwas besseren Bedingungen sah ich im November 1855 positive Polarisation am Muskelpaare durch Öffnungsschläge des Schlitteninductoriums. Endlich auch schon im December 1846 beobachtete ich positive Polarisation an Fröschen, die ich mit einer stark geladenen Leydener Batterie von etwa 0.31 Quadratmeter Belegung erschlug. Die Muskeln sahen blutrünstig aus, und reagirten nur noch spurweise auf weitere Schläge.[2]

§. IX. *Von den Polarisationscurven bezogen auf die Zeit nach Öffnung des primären Stromes.*

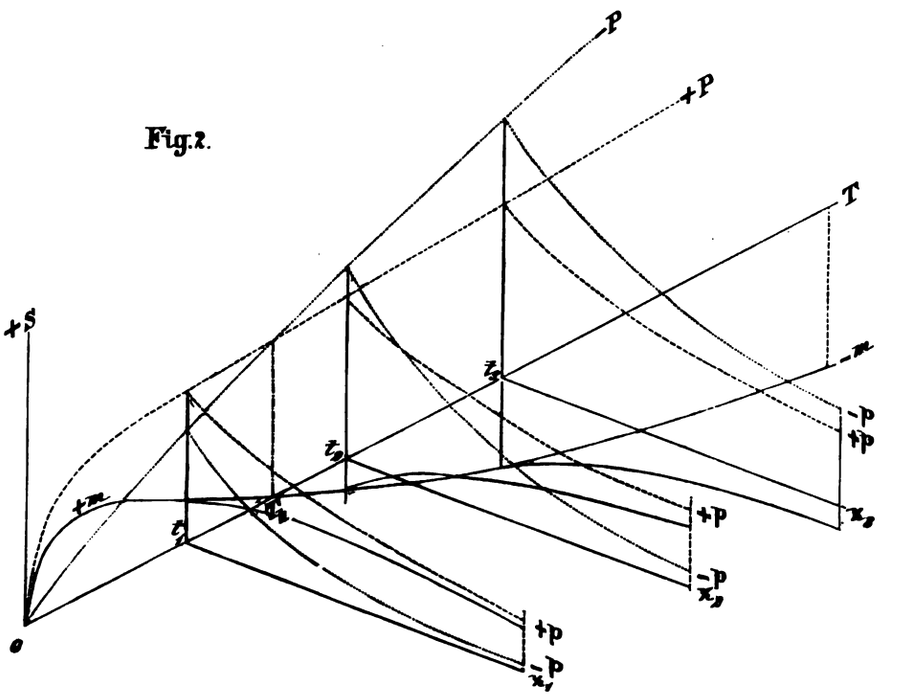
Die Polarisation der Muskeln kann nun noch in Bezug auf ihren zeitlichen Verlauf nach Öffnung des primären Stromes studirt, und dieser Verlauf durch eine auf die seitdem verflossene Zeit bezogene Curve dargestellt werden. Diese Zeit heisse die Öffnungszeit. Im Allgemeinen erscheint sowohl die positive wie die negative Polarisation sehr nachhaltig, und schon oben S. 354 wurde der Schwierigkeiten gedacht, welche daraus jedesmal erwachsen, dass man an demselben Muskel mehrere Versuche nach einander anstellen will. Nachdem der Muskel stärkere positive Polarisation annahm, können zwanzig Minuten und mehr vergehen, bis er sich seinem ursprünglichen Zustande wieder soweit genähert hat, dass man den Unterschied vernachlässigen kann. Da auch ohne polarisirt zu sein, der Muskel während dieser Zeit seinen elektromotorischen Zustand nicht unverändert bewahrt haben würde, ist es nicht einmal möglich zu sagen, ob und wann die Wiederherstellung vollendet ist. Ebenso verhält es sich mit der negativen Polarisation.

Allein die Polarisationscurven bezogen auf die Öffnungszeit bieten andere, wichtige Besonderheiten dar. Geschieht die Öffnung um die kritische Zeit, so erfolgt sehr oft doppelsinnige Ablenkung, zuerst negativer, dann positiver Polarisation entsprechend. Der Übergang rein positiver Polarisation in rein negative durch solche doppelsinnige Wirkung lässt sich auf die in Fig. 2 dargestellte Art erklären. Man hat

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. I. S. 398 ff.; — Wiedemann, Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Bd. II., 2. Aufl. Braunschweig 1874. S. 236.

[2] Untersuchungen a. a. O. S. 181. 182.

Fig. 2.



sich nicht zu denken, dass von der Öffnung des primären Kreises bis zum Umschlagen der Polarisation diese einfach positiv, darüber hinaus einfach negativ sei. Vielmehr sind vom Augenblick der Schliessung an beide Polarisationen vorhanden, und wachsen nach verschiedenem Gesetz, indem die negative Polarisation mehr der Schliessungszeit proportional zunimmt, die positive zuerst schnell, dann langsam ansteigt. In der Figur ist dies auf der senkrechten Ebene dargestellt, welche sich, perspectivisch gesehen, von vorn und links nach hinten und rechts erstreckt. In dieser Ebene ist die Abscissenaxe o T die wachsende Schliessungszeit, die gestrichelte Curve o $(+P)$ ist die der positiven, die punktirte o $(-P)$ die der negativen Polarisation für eine bestimmte Stromdichte bezogen auf die Schliessungszeit. Denkt man sich die Ordinaten dieser componirenden Curven[1] algebraïsch summirt, und deren Unterschied je nach seinem positiven oder negativen Werth ober- oder unterhalb der Abscissenaxe aufgetragen, so entsteht die ausgezogene resultirende Curve o $(+m)$ T_k $(-m)$, welche bei T_k, der kritischen Schliessungszeit, die Abscissenaxe o T schneidet, und in der That nichts ist, als eine der Polarisationscurven bezogen auf die

[1] Vergl. Untersuchungen am Zitteraal u. s. w. S. 215.

Schliessungszeit, wie sie in Fig. 1 vorkamen. Das negative Maximum bei längerer Schliessungszeit erklärt sich durch die Annahmen, dass entweder die Curve der negativen Polarisation zu sinken, oder langsamer als die der positiven zu steigen, oder dass diese schneller zu steigen anfängt (s. unten S. 369. 399).

Auf senkrechten Ebenen, welche unter einem rechten Winkel an die *S*-*T*-Ebene der Polarisationscurven bezogen auf die Schliessungszeit stossen, sind nunmehr die componirenden Polarisationscurven bezogen auf die Öffnungszeit dargestellt; die Abscissenaxen t_1z_1, t_2z_2, t_3z_3 sind jedesmal die wachsende Öffnungszeit. Die Polarisationscurven bezogen auf die Öffnungszeit sind entsprechend behandelt wie die bezogen auf die Schliessungszeit, aus welchen sie gleichsam hervorgehen: die componirenden positiven sind gestrichelt, die componirenden negativen punktirt, die resultirenden sind ausgezogen. Dabei ist die Annahme gemacht, dass die positive Polarisation langsamer, die negative schneller in der Zeit abfällt. Nun zeigt ein Blick auf die Figur, dass beim Öffnen des primären Stromes zur Zeit t_1 die Polarisation stets positiv bleiben werde. Beim Öffnen zur Zeit T_k, wenn man sie träfe, wäre die Polarisation Null im ersten Augenblick, nachher positiv. Beim Öffnen zur Zeit t_2 aber erfolgt doppelsinnige Wirkung, zuerst negativ, dann positiv. Weiterhin, bei t_3, ist die negative Polarisation, welche mehr der Schliessungszeit proportional wächst, so hoch über die von Anbeginn mehr auf gleicher Höhe verharrende positive gelangt, dass trotz dem steileren Abfall der negativen Curve die Curven sich nicht mehr schneiden, und rein negative Polarisation erscheint.

Ausser den doppelsinnigen Wirkungen, welche so sich befriedigend erklären, kommen in dem zeitlichen Verlaufe der Polarisationsströme noch manche Besonderheiten vor, die, da sie nicht gesetzmässig unter bestimmten Umständen auftreten, schwer mit Sicherheit zu deuten sind. In seltenen Fällen erfolgt doppelsinnige Polarisation mit positivem Vorschlage, negativer Hauptablenkung. Oft steigt die Polarisation sehr langsam an, was wohl auf Schwinden der entgegengesetzten beruht. Manchmal sind die Wirkungen zwar einsinnig, aber doppelt sofern die Ablenkung erst ein Maximum erreicht, dann zu einem Minimum sinkt, und nun abermals zu einem Maximum anschwillt, welches manchmal sogar über dem ersten liegt. Ein Fall der Art findet sich in der obigen Tabelle bei absteigendem Strom und 14.″754 Schliessungszeit. Dies erklärt sich durch einen Gang der componirenden Curven bezogen auf die Öffnungszeit, bei welchem die eine vollständig über der anderen verläuft, aber stärker gegen die Abscisse convex ist, so dass sie sich der unteren Curve erst nähert, dann von ihr entfernt, wie Fig. 3 zeigt.

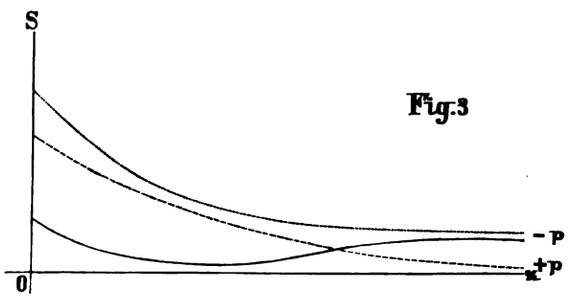


Fig. 3

Es ist unmöglich, diesen noch sehr unvollkommen erforschten Einzelheiten hier weiter nachzugehen. Das Wichtige, was schon jetzt daraus sich ergiebt, besteht in der Nöthigung, die Coëxistenz der beiden Polarisationen im Muskel anzunehmen, woraus sogleich folgt, dass die scheinbare Grösse, in welcher uns die resultirende positive oder negative Polarisation entgegentrat, über die wahre Grösse der componirenden Polarisationen nichts lehrt; denn man bekommt nur den Unterschied letzterer zu sehen, welche sehr viel grösser sein können, als ihr Unterschied.

§. X. *Vom Einflusse der Richtung des primären Stromes auf die secundär-elektromotorischen Wirkungen der Muskeln.*

Ich übergehe die zufälligen Wahrnehmungen und die lange Reihe vorbereitender Untersuchungen, welche mich schliesslich zur Einsicht führten, dass an einem regelmässigen Muskel, beispielsweise unserem Muskelpaare, die obere Hälfte in aufsteigender, die untere in absteigender Richtung stärkere positive Polarisation zeigt. Die beste Art, dies darzuthun, besteht darin, den primären Strom abwechselnd in beiden Richtungen erst durch die eine, dann durch die andere Muskelhälfte zu senden, indem man zwischen den einzelnen Stromstössen einen stets gleichen Zeitraum lässt, welcher die Zerstreuung der Polarisation bis auf einen kleinen Rest gestattet, den man dann compensirt. Will man deren völliges Verschwinden abwarten, so wird man zu einer so langen Pause zwischen den einzelnen Versuchen gezwungen, dass daraus grosse Übelstände erwachsen. Will man, ohne sich an die Zeit zu kehren, jedesmal warten, bis die Polarisation einen gewissen relativen oder absoluten Werth erreichte, d. h. bis sie entweder auf einen gewissen Bruchtheil ihres ursprünglichen Betrages oder auf eine gewisse Zahl von Scalentheilen oder Compensatorgraden sank, so geräth man auch in allerlei Ungewissheiten. Bei kurzer Schliessungszeit eines stärkeren Stromes leistet erstere Versuchsweise immer noch die besten Dienste. Jedenfalls ist sie der statistischen Methode vorzuziehen, welche darin besteht, einen mittleren

Werth für die positive und für die negative Polarisation an beiden Hälften aus Versuchen an stets erneuten Muskeln zu gewinnen, so dass jede Muskelhälfte nur einmal in Einem Sinne durchflossen wird. Die durch die Ungleichmässigkeit der Zuleitung bedingten Schwankungen in der Stärke des primären Stromes sind, wie wir schon oben S. 356 erfuhren, trotz aller Sorgfalt so bedeutend, dass zu ihrer Ausgleichung eine ganz ausserordentliche Zahl von Versuchen gehören würde.

Aber auch wenn einer und derselben Hälfte des Muskelpaares die Säulenschneiden unverrückt anliegen, ist nicht darauf zu rechnen, dass der primäre Strom in beiden Richtungen gleich stark sei. Für den elektrischen Strom gilt bekanntlich kein solches Gesetz der Reciprocität wie für den Lichtstrahl. Durch dieselbe Reihe von Leitern in entgegengesetzter Richtung wirkend, erzeugt dieselbe elektromotorische Kraft oft sehr verschieden starken Strom. Die Nothwendigkeit, über die Bedingungen der irreciproken Leitung elektrischer Ströme klar zu sehen, gab die Veranlassung zu einigen Versuchen von Hrn. von Beetz und mir, welche wiederum der Keim von Hrn. Prof. Christiani's gründlichen Untersuchungen über diesen Gegenstand wurden.[1] Ich habe mich davon überzeugt, dass durch einen Thonstab, dem der Strom wie einem Muskel zugeführt wird, völlig genügende Reciprocität der Leitung stattfindet.

Doch wird man sich selbstverständlich nicht auf diese allgemeine Erfahrung verlassen, sondern gerade hier am meisten darauf bedacht sein, die Stärke des primären Stromes neben der des secundären aufzuzeichnen. Hr. Prof. Georg Quincke, damals noch in Berlin, hatte die grosse Güte, mir bei den älteren Beobachtungen der Art behülflich zu sein, während neuerlich Hr. Prof. Christiani mir zur Seite stand, dem ich überhaupt für seine Unterstützung bei der jetzigen Organisation meiner Versuche zum wärmsten Danke verpflichtet bin. Folgende Tabelle giebt ein Bild davon, um wie grosse Unterschiede es sich an den beiden Muskelhälften handelt. Man hat sich zu denken, dass von den Bussolschneiden stets die eine dem Aequator des Muskelpaares anliegt, die andere unmittelbar entweder über der unteren, oder unter der oberen Säulenschneide.

Zehn Grove. Schliessungszeit 0″.320.

1. Obere Hälfte.

Muskelstrom: 189^{sc}, $21^{gr}\downarrow$.

S	↑ + 113^{sc}	↓	+ 93	↑	+ 145	↓	+ 81	↑	+ 159	↓ + 64
P	171^{sc}		169		153		159		180	190

[1] Arthur Christiani, Beiträge zur Electricitätslehre. Über irreciproke Leitung electrischer Ströme u. s. w. Berlin 1876.

2. Untere Hälfte.

Muskelstrom: 214^{sec}, 22.5^{cgr} ↑.

S	↓	+ 294	↑	+ 199	↓	+ 285	↑	− 3 / + 136	↓	+ 255	↑	− 9 / + 92
P	↓	200		160	↓	160		169	↓	185		180

3. Nochmals obere Hälfte.

Muskelstrom: 264^{sec}, 27^{cgr} ↓.

S	↓	+ 34	↑	+ 87
P	↓	210		220

4. Nochmals untere Hälfte.

Muskelstrom: 285^{sec}, 30^{cgr} ↑.

S	↑	− 16 / + 38	↓	+ 142
P		190	↓	190

Die Summe der aufsteigenden positiven Polarisationen in der oberen Muskelhälfte ist 504, die der absteigenden 272. Für die untere Hälfte sind die entsprechenden Zahlen 976 und 465. Die Zahlen an sich sind, nebenbei gesagt, nicht mit denen oben S. 355 zu vergleichen, da diesmal die Rolle der Bussole auf Null stand.

Ein Blick auf die Tabelle lehrt, dass nicht daran zu denken ist, die Überlegenheit der positiven Polarisation von Schwankungen in der Stärke des primären Stromes abzuleiten. Diese Schwankungen, welche zum Theil von Fehlern der die Schliessungszeit regelnden Vorrichtung herrühren, sind zuweilen unmerklich, zuweilen haben sie den verkehrten Sinn von dem, welchen sie haben müssten, um Verdacht zu erregen, und wenn sie dazu den richtigen Sinn haben, sind sie viel kleiner, als dass der Verdacht gegründet erscheinen könnte. Ohnehin sprechen gegen solche Erklärung die Fälle, deren die Tabelle drei bietet, wo bei der für die positive Polarisation minder günstigen Richtung des polarisirenden Stroms ein negativer Vorschlag erscheint, vollends die nicht seltenen Fälle, wo die Polarisation rein negativ wird, da bei gleicher Schliessungszeit doppelsinnige Wirkung oder negative Polarisation vielmehr stärkeren polarisirenden Strom voraussetzen. Diese Fälle schliessen auch die Vorstellung aus, dass es sich um ein Widerstandsphaenomen handele.

Eine andere Vermuthung, welche sich hier darbietet, verdient dagegen ernstliche Erwägung. Die ganze Erscheinung könnte nämlich auf Täuschung beruhen. Wie sich nach dem Gesetze des Muskelstromes von selbst versteht, und wie auch für den vorliegenden Fall aus der Tabelle erhellt, herrscht in der oberen Muskelhälfte ab-, in der unteren aufsteigender Muskelstrom. Die negative Schwankung, und deren Nach-

wirkung, stellt sich also in der oberen Hälfte als aufsteigende, in der unteren als absteigende elektromotorische Wirkung dar. Demnach wird sich die Nachwirkung in der oberen Hälfte bei aufsteigendem polarisirendem Strome der positiven Polarisation hinzufügen, bei absteigendem davon abziehen. In der unteren Hälfte wird, *mutatis mutandis*, dasselbe geschehen. Da nun beim Durchgang des polarisirenden Stromes der Muskel zuckt, so wäre, ohne irgend Neues zu Hülfe zu nehmen, Alles aus Altbekanntem erklärt.

Auf doppelte Art glaube ich bewiesen zu haben, dass diese Erklärung, obwohl denkbar, nicht richtig ist.

Erstens verschaffte ich mir eine Vorstellung davon, welche Grösse denn die Nachwirkung hier erreichen könne. Statt der polarisirenden Säule liess ich den die Schliessungs- und die Übertragungszeit regelnden Mechanismus (S. oben S. 351. 352) den primären Kreis des Schlitteninductoriums schliessen. Am Muskelpaare hing noch der Nerv, und lag den Platinblechen der 'stromzuführenden Vorrichtung' auf.[1] Bei dem Spiele jenes Mechanismus wurde also der Muskel, statt polarisirt, während eines Bruchtheiles einer Secunde tetanisirt, und zwischen Ende des Tetanus und Schliessen des Multiplicatorkreises verfloss dieselbe Übertragungszeit, wie zwischen Ende des polarisirenden Stromes und demselben Augenblick. Es ergab sich in mehreren nach den damaligen Ansprüchen untadelhaften Versuchen, dass bei dieser Versuchsweise die Nachwirkung nur spurweise sichtbar wird, und keinenfalls im Stand ist, die beobachteten Unterschiede der Polarisation zu erklären. Eigentlich liess sich dies vorhersehen, da die Nachwirkung mit der Dauer des Tetanus wächst, dieser aber hier nur ganz kurze Zeit anhält.

Zweitens schnitt ich die Muskeln am Aequator bis etwa zur Hälfte ihrer Dicke ein, so dass eine klaffende Wunde entstand, die sich als künstlicher Querschnitt verhielt. Der Wunde zunächst wurde der sonst am Aequator befindliche Keilbausch angebracht. Der Muskelstrom hatte nun in beiden Hälften die verkehrte Richtung, und folglich musste sie auch die negative Schwankung haben. Dennoch hatte nach wie vor die aufsteigende positive Polarisation in der oberen, die absteigende in der unteren Muskelhälfte die Oberhand.

Wenn ich demnach als ausgemacht betrachte, dass die positive Polarisation in den beiden Muskelhälften in der Richtung vom Aequator nach den Enden stärker ist als in der anderen, so soll doch dieser Ausdruck nur die unmittelbare Erscheinung wiedergeben, denn keineswegs ist diese eindeutig. Nennen wir die durch aufsteigenden Strom

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. I. S. 450. — Es war im März 1857, vor der Zeit des physiologischen Thones und der unpolarisirbaren Elektroden. Der Muskelstrom wurde am Nervenmultiplicator beobachtet.

erzeugte positive und negative Polarisation beziehlich $P_{\uparrow}, \Pi_{\uparrow}$, die entsprechenden Polarisationen durch den absteigenden Strom ebenso $P_{\downarrow}, \Pi_{\downarrow}$, so ist der Thatbestand, dass nicht $P_{\uparrow} - \Pi_{\uparrow} = P_{\downarrow} - \Pi_{\downarrow}$, sondern dass in der oberen Muskelhälfte das linke, in der unteren das rechte Glied das grössere ist. Natürlich kann dies durch viele Combinationen von positiven und negativen Veränderungen der vier Termen zu Stande kommen, von welchen aber zwei besonders in's Auge zu fassen sind. Entweder es ist

$$P_{\uparrow} \gtrless P_{\downarrow}, \text{ oder } \Pi_{\downarrow} \lessgtr \Pi_{\uparrow};$$

das obere Zeichen gilt in der oberen, das untere in der unteren Muskelhälfte. Welcher Fall in Wirklichkeit stattfinde, wird sich unten mit einiger Wahrscheinlichkeit entscheiden lassen.

Eine merkwürdige Thatsache, welche sich auch in der Tabelle ausspricht, ist die grössere Stärke aller secundären Wirkungen in der unteren Muskelhälfte. Lässt man die negativen Vorschläge bei Seite, so beträgt die Summe dieser Wirkungen in der oberen Hälfte 776, die in der unteren 1341^{mc}. Die entsprechenden Zahlen für den primären Strom sind 1452 und 1434^{mc}. Der Unterschied der secundären Wirkungen erklärt sich nicht aus der abwärts verjüngten Form des Semimembranosus, denn ich habe ihn auch am symmetrisch gebauten Gracilis wahrgenommen. Mit symmetrisch dem Muskelpaar angelegten Bussolschneiden müsste man, bei abwechselnd auf- und absteigendem polarisirenden Strome, in absteigender Richtung stärkere positive Polarisation erhalten, als in aufsteigender. Dies habe ich schon im Januar 1857, zwar mit minder vollkommenen Hülfsmitteln, doch mit genügender Schärfe, in der That beobachtet.

Wichtig ist die Bemerkung, dass bei längerer Dauer der hier beschriebenen Versuchsreihen deren Erfolg unsicher wird, und zuletzt sich oft in das Gegentheil verkehrt, so dass beispielsweise in der oberen Muskelhälfte nicht nur die absteigende positive Polarisation stärker ausfällt, sondern sogar bei aufsteigendem primären Strome negative Polarisation erscheint.

Ein Umstand verdient endlich noch Erwähnung, der in der Tabelle so entschieden hervortritt, dass ich trotz seiner Paradoxie ihn als vollgültig betrachten muss. Bei sehr starken absteigenden Strömen nämlich wird nach der kritischen Schliessungszeit, die sich wie gewöhnlich durch doppelsinnige Ausschläge kennzeichnet, die Polarisation im ganzen Muskelpaare wieder positiv. Bei zwanzig Grove war von diesem Verhalten erst eine Spur da; bei dreissig Grove war es stärker, bei vierzig aber so stark ausgeprägt, dass ich bei 20″; 1′; 5′

Schliessungszeit durch den aufsteigenden Strom beziehlich erhielt: -125; -112; -170^{sc}; durch den absteigenden: $+165$; $+166$; $+117^{sc}$. Ob und wie dies mit der verschiedenen Polarisirbarkeit der beiden Muskelhälften in beiden Richtungen zusammenhänge, ist noch ganz dunkel. Um das Verhalten in Fig. 1 aufzunehmen, hätten die Curven auch jenseit der T-Axe, von der $(-\triangle)$-Axe aus, entworfen werden müssen. Dies lohnte sich um so weniger, als, wie man jetzt sieht, eigentlich für jede Muskelhälfte solche Doppelfigur nöthig wäre.

Polarisationsversuche bei querer Richtung des primären Stromes im Muskel stossen auf grosse Schwierigkeiten, und sind noch nicht befriedigend durchgeführt.

§. XI. *Vom Einflusse verschiedener Umstände auf die Polarisation der Muskeln.*

Vor allen Dingen ist hervorzuheben, dass die positive innere Polarisation der Muskeln nur im Zustand des Lebens wahrgenommen wird.

Von der negativen inneren Polarisation hatte ich früher berichtet, dass sie auch an gekochten Muskeln noch vorhanden sei.[1] Dies war ein Irrthum, wie ich später erkannte, als ich statt an ganzen Gliedmaassen, an einzelnen Muskeln experimentirte. Die innere Polarisirbarkeit der Froschmuskeln wird durch Abbrühen, vollends durch Kochen, vernichtet. Dennoch findet man, wie ich richtig gesehen hatte, an einem ganzen gesottenen Froschbeine starke innere negative Polarisation. Bei näherer Untersuchung zeigt sich aber, dass während die Muskeln selber völlig unwirksam wurden, diese Polarisation im Kniegelenk, also in Knochen oder Bändern oder beiden, ihren Sitz hat. Auch das Fussgelenk eines gesottenen Unterschenkels findet man stark polarisirbar. Im Fall des ganzen Beines dienen also die Muskelmassen der Gliedmaassen nur den Gelenken als Zuleitung.

Auf andere Weise abgestorbene Muskeln — Rindfleisch vom Schlächter, Froschmuskeln, welche 48 Stunden in der feuchten Kammer oder in Wasser lagen, oder über Chlorcalcium getrocknet und wieder aufgeweicht wurden — zeigten am Nervenmultiplicator noch schwache Reste negativer innerer Polarisirbarkeit durch den Strom von fünfzig Grove.

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. I. S. 378. 379.

Abbrühen und Kochen der Muskeln üben demnach auf die innere Polarisirbarkeit einen besonders verderblichen Einfluss. Bei derselben Gelegenheit fand ich (im September 1855) die seitdem von Hrn. Joh. Ranke genauer untersuchte Thatsache, dass Kochen den eigenthümlichen Widerstand der Muskeln erheblich vermindert.[1] Ob diese Thatsache und die Vernichtung der inneren Polarisirbarkeit der Muskeln durch Kochen mit einander zusammenhängen, werden wir später erwägen (s. unten S. 398).

Ich glaube bemerkt zu haben, dass auch der längere Hindurchgang eines sehr starken Stromes die Polarisirbarkeit vernichtet. Dies würde erklären, warum sich ein Maximum der negativen Polarisirbarkeit, und zwar um so früher einstellt, je dichter der Strom. Wie dem auch sei, in meinen Tagebüchern sind Fälle verzeichnet, wo trotz der Vernichtung der Polarisirbarkeit durch einen starken Strom die Muskeln noch zuckten; bei der Unvollkommenheit meiner älteren Versuche bin ich aber dieser Dinge nicht gewiss, und führe sie nur an, um anzudeuten, was es hier wohl Alles noch zu ermitteln gebe.

Zwischen Kochsalzlösung und Muskelfleisch entwickelt sich, wie zwischen derselben Lösung und anderen thierischen Geweben (s. oben S. 348), positive Polarisation. Eine Scheibe Rindfleisch, in welcher der Strom nur mässige Dichte erlangt, giebt zwischen Salzbäuschen nur positive, ein langer dünner Streif doppelsinnige oder rein negative Polarisation in geringem Betrage, weil dann die negative innere neben der positiven äusseren Polarisation zum Vorschein kommt.

Dass die Gliedmaassen eines lebenden Frosches positive innere Polarisation annehmen, sahen wir oben S. 359. 360. Ich habe solche Versuche aber auch schon früh am lebenden Menschen angestellt. In den Jahren 1845 und '46 hatte ich mir eine kräftige Volta'sche Säule ursprünglichster Einrichtung, bestehend aus 150 Zinkkupfer-Plattenpaaren, verschafft. Von diesen Paaren waren 100 kreisrund bei $1\frac{1}{2}''$ Durchmesser, 50 viereckig bei $2\frac{1}{2}''$ Seite. Sollte die Säule gebraucht werden, so kamen als feuchte Leiter zwischen den Plattenpaaren Pappscheiben getränkt mit ziemlich concentrirter warmer Salmiaklösung zu liegen. Mit der letzten Zinkplatte verbunden tauchte eine Kupfer-, mit der letzten Kupferplatte verbunden eine Zinkplatte in je ein Becken mit gesättigter Kochsalzlösung. Zuerst wurden die Zeigefinger in den Zuleitungsgefässen des Muskelmultiplicators auf ihre Gleichartigkeit geprüft. Dabei stiess ich natürlich auf dieselben, seitdem durch die Compensationsmethode überwundenen Schwierigkeiten,

[1] Joh. Ranke. Tetanus. Eine physiologische Studie u. s. w. Leipzig 1865. S. 10. 19 ff.

wie bei den Versuchen über negative Schwankung durch willkürlichen Tetanus.[1] Nun wurden die Finger in die Säulenbecken getaucht, um den Schlag zu nehmen, und darauf wieder in die Zuleitungsgefässe, um die secundär-elektromotorische Wirkung zu beobachten.

Die Schläge der Säule waren keine Kleinigkeit. Mit voller Hand genommen spürte man sie bis in die Schultern, und während des dauernden Schlusses hatte man jene Empfindungen von Wärme und Kälte, welche im Anfange des Jahrhunderts Joh. Wilh. Ritter zum Gegenstand seiner naturphilosophischen Constructionen machte.[2] Meine Jugendfreunde Wilhelm Beetz, Ernst Brücke, Karl v. Erlach, J. G. Halske, Gustav Karsten theilten damals mit mir die Beschwerden dieser Versuche; ich bin glücklich, nach fast vierzig Jahren ihnen hier meinen Dank abstatten zu können. Das Ergebniss war zunächst ein regelloses Durcheinander positiver und negativer Ausschläge; doch gelang es bald, die Erscheinungen zu beherrschen. Nach kurzem Säulenschlusse erfolgte positive, nach langem (15″ waren Alles, was man aushalten konnte) negative Polarisation; nach mässig langem Schlusse bei schnellem Übertragen der Finger aus dem Säulenbecken in die Zuleitungsgefässe, negative, bei langsamem Übertragen positive Polarisation.

Die Wirkungen waren stark genug, um zu versuchen, ob sie nicht am stromprüfenden Schenkel sich würden sichtbar machen lassen. Wirklich war dies der Fall. Auf Humboldt'sche Weise[3] wurden dem Nerven zwei Stücke Rindfleisch als Zuleiter angelegt: berührte ich diese mit den Fingern, nachdem ich mich im Säulenkreise polarisirt hatte, so zuckte der Schenkel auf das Lebhafteste. Da es nicht gelingt, durch willkürlichen Tetanus den Froschschenkel zum Zucken zu bringen, ist es von einigem Interesse, dass man es durch secundär-elektromotorische Wirkung vermag.

Versuche, den menschlichen Körper mittels des Schlages der Leydener Batterie zu polarisiren, blieben erfolglos. Im Ganzen erscheinen diese Thatsachen in völliger Übereinstimmung mit denen an den Froschmuskeln und lebenden Fröschen. Leider sind sie mit einer Unsicherheit behaftet, welche sie bis auf Weiteres entwerthet. Ich kannte damals noch nicht die Polarisation an der Grenze von Elektrolyten. Ich achtete nun wohl darauf, ob die Finger nach dem Schliessen

---

[1] Monatsberichte der Akademie u. s. w. 1852. S. 111; — Moleschott's Untersuchungen zur Naturlehre des Menschen und der Thiere u. s. w. 1857. Bd. II. S. 247; — Untersuchungen über thierische Elektricität Bd. II. Abth. II. S. 186 ff.

[2] Untersuchungen u. s. w. Bd. I. S. 356. 357.

[3] Versuche über die gereizte Muskel- und Nervenfaser u. s. w. Posen und Berlin 1797. Bd. I. S. 35 ff.

der Säule in der Art wie die Enden eines durchströmten Frosches sauer und alkalisch reagirten, und fand auch, bei längerer Dauer des Schlusses, einmal Spuren saurer Reaction an dem einen Finger, doch erschienen sie mir zu unbedeutend, um weiter Etwas darauf zu geben, um so mehr, als absichtliches Verunreinigen der Finger mit verdünnter Salpetersäure und Kalilauge keine mit den zu erklärenden vergleichbare Wirkungen hervorbrachte. Ich begreife aber heute nicht, warum ich nicht den Versuch so abänderte, dass beispielsweise mit den Zeigefingern der Schlag genommen, von den Mittelfingern die secundär-elektromotorische Wirkung abgeleitet wurde. Bis der Versuch in dieser oder einer ähnlichen Form geglückt ist, bleibt der Verdacht auf ihm ruhen, dass es sich darin nur um äussere positive Polarisation in der Haut, nicht um innere positive Polarisation der Muskeln handele.

Dagegen ist kein Grund vorhanden zu bezweifeln, dass die in diesen Versuchen beobachteten negativen Ausschläge auf ächter innerer Polarisation beruhten, und diese neue Wirkung des Stromes im menschlichen Körper scheint mir der Aufmerksamkeit der Elektrotherapeuten einigermaassen werth zu sein.

Ob die Froschzuckungen durch die polarisirten menschlichen Gliedmaassen von positiver oder negativer Polarisation herrührten, kann ich noch nicht angeben.

§. XII. *Die positive innere Polarisation der Muskeln im Conflict mit Tetanus.*

Eine der merkwürdigsten Beziehungen, welche die positive innere Polarisation der Muskeln zeigt, besteht darin, dass sie durch deren Thätigkeitszustand beeinflusst wird, und zwar nimmt der tetanisirte Muskel weniger starke Polarisation an, als der ruhende.

Der Versuch ist schwierig wegen der sich einmischenden und nicht immer sicher in Rechnung zu ziehenden negativen Schwankung. Die Bussolschneiden müssen dem Muskelpaare, dem der Nerv gelassen ist, so angelegt sein, dass der Muskelstrom möglichst schwach ist; dann ist es auch die negative Schwankung. Wegen des asymmetrischen Baues des Semimembranosus herrscht bei symmetrischer Lage der Schneiden gewöhnlich mehr oder minder starker aufsteigender Strom (s. oben S. 353). Man erhält daher das gesuchte Gleichgewicht, indem man mit der unteren Schneide höher am Muskel hinaufrückt. Das Muskelpaar muss so stark gespannt sein, dass es beim Tetanisiren sich nicht merklich

verschiebt. Man verzeichnet Betrag und Richtung der noch übrigen Schwankung. Darauf sendet man alle anderthalb bis zwei Minuten einen polarisirenden Stromstoss von kurzer Dauer durch das Muskelpaar, indem man es abwechselnd das eine Mal in Ruhe lässt, das andere Mal tetanisirt. Man wählt die Richtung des Stosses so, dass die negative Schwankung sich zur secundär-elektromotorischen Wirkung addirt. Trotzdem fällt diese Wirkung regelmässig während des Tetanus kleiner aus, als bei Ruhe des Muskels. Folgende Tabelle giebt ein Beispiel dieses Verhaltens.

11. September 1855.

Muskelmultiplicator, Platinelektroden in gesättigter Kochsalzlösung. Kochsalzkeilbäusche mit Eiweisshäutchen. Zwanzig Grove. Schliessungszeit etwa 1″. Anderthalb Minuten zwischen den Versuchen.

No.	Tetanus allein.	Aufsteigender polarisirender Stromstoss allein.	Aufsteigender polarisirender Stromstoss mit Tetanus.	△
1.	5° ↑	—	—	—
2.	—	+ 53°.5	—	+ 18°.5
3.	—	—	+ 35°.0	− 1.0
4.	—	+ 36.0	—	+ 19.5
5.	—	—	+ 16.5	—
6.	—	—	+ 9.5	− 3.0
7.	—	+ 12.5	—	—
8.	1.5 ↑	—	—	—

Die Stärke des primären Stromes wurde nicht verzeichnet; doch nimmt nach meinen Versuchen der Widerstand des immobilisirten Muskels im Tetanus um eine kleine Grösse ab.[1]

Das Tagebuch berichtet von keiner Vorkehrung, damit stets der Tetanus gleich lange dauere und der Stromstoss gleich lange nach dem Beginn des Tetanus eintrete. Mit den heutigen Einsichten und Hülfsmitteln wird es natürlich leicht sein, ungleich vollkommenere Zahlenreihen als obige zu gewinnen. Wie sie sind, scheinen sie an dem hingestellten Satze keinen Zweifel übrig zu lassen.

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. I. 1849. S. 74 ff. — Als diese Bogen meines Werkes gedruckt wurden, war Hrn. Helmholtz' Arbeit 'Über die Wärmeentwickelung bei der Muskelaction' (in Joh. Müller's Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w. 1848. S. 144 ff.) noch nicht erschienen. Ich hätte sonst Grund gehabt, die Möglichkeit zu erwägen, dass die von mir beobachtete Widerstandsverminderung auf Erwärmung des Muskels beruhe. Auch die Säurung des Muskels bei der Zusammenziehung entdeckte ich erst viel später.

Ich habe ähnliche Versuche auch mit negativer Polarisation gemacht. Aus gewissen Gründen dachte ich mir, dass diese Polarisation durch den Thätigkeitszustand des Muskels nicht verändert würde. Wegen der Schwächung der davon sich abziehenden positiven Polarisation müsste sie dann stärker erscheinen. Leider stösst man bei der Prüfung, ob dem so sei, auf die Schwierigkeit, dass eine Schliessungszeit von mindestens 10″ nöthig ist, um die passende negative Polarisation zu erhalten. Da der Tetanus früher anfangen, und länger dauern muss, als der polarisirende Strom, so wird der Muskel dermaassen angegriffen, dass man meist nichts zu sehen bekommt, als schnelles Sinken aller Wirkungen. Doch glaube ich in meinen Zahlenreihen Spuren des erwarteten Verhaltens vor mir zu haben, welche kaum auf blossem Zufall beruhen dürften.

Schliesslich sei bemerkt, dass eigentlich nicht recht zu verstehen ist, worin ein gewöhnlicher Versuch über positive Polarisation und ein Versuch über positive Polarisation im Conflict mit Tetanus sich von einander unterscheiden. Denn auch im Versuch ohne Tetanus ist während der kurzen Durchströmung der Muskel in Zuckung begriffen. Es ist noch nicht an der Zeit, diese Frage zu erörtern. Vielleicht beruht die scheinbar geringere positive Polarisirbarkeit des tetanisirten Muskels darauf, dass der den Säulenschluss überdauernde Tetanus die positive Polarisation zum Theil aufhebt.

§. XIII. *Von den secundär-elektromotorischen Erscheinungen der Nerven.*

Als ich im Herbst 1852 der British Association zu Belfast eine Mittheilung über secundär-elektromotorische Wirkungen der Muskeln und Nerven machte (s. oben S. 354), war es mir noch nicht gelungen, von den Nerven positive innere Polarisation zu erhalten. Im Zusammenhang mit meiner Hypothese über den Elektrotonus, und in Hinblick auf die Thatsache, dass Muskeln keinen extrapolaren Elektrotonus zeigen (s. oben S. 344 Anm.), verglich ich damals die Muskeln mit hartem Stahl, die Nerven mit weichem Eisen.[1] Die mittlere Strecke einer Stahlstange, von durchströmten Windungen umgeben, wird magnetisch, und bleibt es nach Aufhören des Stromes; aber nur durch Fernwirkung breitet sich der Magnetismus zeitweise über die unmittelbar betroffene Strecke aus. Besteht die Stange aus weichem Eisen, so wird sie in ihrer ganzen Länge magnetisirt, wenn auch mit abnehmender Kraft von der Rolle nach den Enden zu; aber nach Aufhören des Stromes ist der Magnetismus überall verschwunden.

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. I. S. 326.

In derselben Art verschieden schienen sich mir damals Muskeln und Nerven in Bezug auf die Polarisation ihrer elektromotorischen Molekeln zu verhalten. Aber ich hatte zu früh theoretisirt. Als ich im Winter 1852—53 mit verbesserten Hülfsmitteln zur Erforschung der secundär-elektromotorischen Wirkungen der Nerven und Muskeln zurückkehrte, fand ich alsbald, dass auch die Nerven positive innere Polarisirbarkeit, also im Sinne des obigen Vergleiches, Coërcitivkraft besitzen, nur dass, aus leicht erklärlichen Gründen, ihre Polarisation etwas schwerer aufzufassen ist, als die der Muskeln.

Bei der grossen Bedeutung, welche diese Erscheinung für die Lehre vom Elektrotonus zu haben schien, nahm ich deren Untersuchung seitdem wiederholt auf in dem Maasse, wie meine Einsichten und Methoden fortschritten, und zahllose Versuche über Polarisation der Nerven lagern seit Jahren in meinen Tagebüchern. Unter Anderem hatte ich schon einmal in den Jahren 1857 und 1858 eine Tabelle ausgefüllt, welche die secundär-elektromotorischen Wirkungen der Nerven für eine Reihe von Schliessungszeiten, und von Stromdichten in beiden Richtungen, darstellte. Die Versuche wurden am Nervenmultiplicator mit den zusammengelegten beiden Ischiadnerven vom Frosch angestellt. Für jede Schliessungszeit und Stromdichte in jeder Richtung wurde ein neues Paar Nerven genommen. Hr. Pflüger, damals noch in Berlin, hatte die grosse Gefälligkeit, mir bei diesen Versuchen beizustehen. Wie die zwei Jahre vorher für die Muskeln entworfene Tabelle (s. oben S. 355) leidet die Tabelle für die Nerven an allen Gebrechen, welche vor Erfindung der unpolarisirbaren Elektroden, des physiologischen Kochsalzthones, der Methode der Compensation und der aperiodischen Bussole meinen Ergebnissen anhafteten; auch wurde die Stärke des primären Stromes nicht regelmässig und nicht scharf genug bewacht. Dennoch muss ich hier auf diese ältere Tabelle mich stützen, da es mir noch nicht möglich war, wie im Fall der Muskeln, sie durch eine mehr fehlerfreie zu ersetzen. Da aber die Ergebnisse der älteren Nerventabelle denen der neuen Muskeltabelle sehr gleichen, ist das Übel vielleicht nicht so gross.

In der That können die in Fig. 1 und 2 gegebenen graphischen Darstellungen der Polarisationscurven bezogen auf die Schliessungs- und auf die Öffnungszeit fast ebenso gut für die Nerven gelten, wie für die Muskeln. Stromdichten unter einer gewissen Grösse geben nur negative Polarisation. Bei beträchtlicheren Stromdichten, von fünf bis fünfzig Grove, und sehr kurzer Schliessungszeit erscheint rein positive Polarisation. Bei etwas längerer Schliessungszeit, welche vielleicht 0″.2 Secunde betrug, wurde aber hier die Polarisation schon doppelsinnig, d. h. einem negativen Ausschlage folgte ein positiver

auf dem Fusse. Beträgt die Schliessungszeit mehr als eine Secunde, so wird die Polarisation rein negativ.

Die stärkste positive Polarisation erhielt ich bei ganz kurzer Schliessung von fünfundzwanzig bis dreissig Grove; die Kraft blieb wie beim Muskel scheinbar unter der des Stromes des ruhenden Nerven. Die stärkste negative Wirkung erfolgte, auch ganz wie beim Muskel, nach längerem Hindurchleiten verhältnissmässig schwacher Ströme. Nach 45′ gaben fünf, nach 15′ sieben, nach 5′ zehn Grove Anschlagen an die Hemmung des Nervenmultiplicators, also stärkere Wirkung, als der Nervenstrom. Auch hier gilt aber natürlich, wie bei den Muskeln (s. oben S. 367), die Bemerkung, dass die resultirende Polarisation, als Unterschied der beiden componirenden Polarisationen, kein Maass für deren Stärke abgiebt, welche ein Vielfaches des beobachteten Unterschiedes sein kann. Denn, wie nicht gesagt zu werden braucht, die verschiedenen Erscheinungsweisen der Nervenpolarisation führen unausweichlich zur Annahme, dass in den Nerven, wie in den Muskeln, zwei Polarisationen gleichzeitig vorhanden sind: eine plötzlich fast in voller Höhe auftretende, nur noch langsam wachsende, sehr nachhaltige positive Polarisation, und eine mit der Schliessungszeit wachsende, mehr und mehr über jene sich erhebende, aber nach Öffnung des Säulenkreises schneller schwindende negative Polarisation.

Öffnungsschläge des Schlitteninductoriums geben bei hinreichender Stärke rein positive Polarisation.

Hinsichtlich der feineren Züge der Erscheinung, der verschiedenen für die Muskeln erkannten Maxima der Polarisationscurven, und deren Lage nach Stromdichte, Schliessungszeit und Öffnungszeit, wird es rathsam sein, weitere Beobachtungen abzuwarten, obschon auch in dieser Beziehung die ältere Nerventabelle, bei aller Unvollkommenheit, eine gewisse Ähnlichkeit mit der neuen Muskeltabelle erkennen lässt. Über die verhältnissmässige Stärke und Nachhaltigkeit der Polarisation in den Muskeln und in den Nerven bei gleicher Stromdichte u. s. w. wissen wir noch nichts, und dürfte es sehr schwer sein, sich eine sichere Vorstellung zu verschaffen.

§. XIV. *Matteucci's Versuche über Nervenpolarisation.*

Von der negativen inneren Polarisation der Nerven gab ich zuerst Nachricht 1856 in meiner Abhandlung über diese Erscheinung in feuchten porösen Körpern überhaupt.[1] 1867 kam ich darauf zurück

[1] Monatsberichte u. s. w. 4. August 1856, S. 457; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 19.

als auf einen Umstand, welcher sich der Beständigkeit von Strömen in nervenhaltigen Kreisen widersetze.[1] Dass die Nerven daneben positive innere Polarisation besitzen, habe ich auch schon wiederholt, gelegentlich der secundär-elektromotorischen Wirkungen der elektrischen Organe, freilich auf eine nur für den Kundigen durchsichtige Weise angedeutet.[2]

Obschon meine Abhandlungen über Polarisation von Elektrolyten und von feuchten porösen Körpern auch in französische und italiänische Zeitschriften übergingen,[3] beschrieb Matteucci 1860, also vier Jahre nach mir, ohne mich zu nennen, ähnliche Phaenomene, als hätte er sie entdeckt, und bemächtigte sich bei dieser Gelegenheit auch der inneren negativen Polarisation der Nerven.

Auch die Bezeichnung der Wirkungen als secundär-elektromotorischer hat er mit mir gemein. Seine Versuchsweise freilich erinnert nicht an die meinige. Er legt die beiden Enden eines Nerven zuerst auf die Platinelektroden einer zwei- bis achtgliederigen Säule aus Zink-Kohle-Salzwasser-Elementen, lässt den Strom zwei Secunden bis drei Minuten hindurchgehen, und überträgt den Nerven auf die Multiplicatorbäusche. Man finde dann in der intrapolaren Strecke negative Polarisation, positive aber in den beiden extrapolaren Strecken, und zwar stärker in der an die Kathode grenzenden. Diese Versuche wurden nicht bloss an den Nerven von Fröschen, sondern, und sogar mit Vorliebe, an denen von Warmblütern, Schafen, Kaninchen, Hühnern, angestellt. In der That überdauere die negative Polarisirbarkeit viele Stunden lang den Verlust der Lebenseigenschaften; nur Siedhitze und Druck *(compression)* machen ihr ein Ende. Matteucci bringt die secundär-elektromotorische Wirkung auf Rechnung der an den Platinelektroden ausgeschiedenen Säuren und Alkalien.[4]

In einer zweiten Mittheilung ändert er aber, in der ihm eigenen Art, seine Aussagen mannigfach ab, ohne zu sagen, ob die früheren falsch waren oder nicht. Nun werden die Nerven »in den meisten Fällen« nicht mehr unmittelbar mit Platinelektroden in Berührung gebracht, sondern durch Streife mit Quellwasser getränkten Wollenzeuges. Die Säule besteht aus acht bis zehn Grove, und die Schliessungszeit beträgt 25—30 Minuten. Es ist auch nicht mehr die Rede von Polarisation der extrapolaren Strecken, sondern jetzt heisst es,

---

[1] Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w. 1867. S. 262; — Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 192.

[2] Monatsberichte u. s. w. 1858. S. 106; — Untersuchungen am Zitteraal u. s. w. S. 206.

[3] Il nuovo Cimento ec. t. V. Maggio e Giugno. Pubbl. il 9 Luglio 1857. p. 338. — Annales de Chimie et de Physique. 3me Série. 1860. t. LVIII. p. 314. 318.

[4] Comptes rendus etc. 27 Février 1860. t. L. p. 412; — Archives des Sciences physiques et naturelles. Février 1860. t. VII. p. 173.

dass der an die Anode grenzende Abschnitt der intrapolaren Strecke an negativer secundär-elektromotorischer Kraft den an die Kathode grenzenden Abschnitt übertreffe, und dass dieser Unterschied beträchtlicher sei, wenn der Strom im Nerven auf-, als wenn er darin abstieg. Matteucci will sich davon durch Entgegensetzung der beiden Abschnitte im nämlichen Kreise überzeugt haben. Diese Art von Wirkungen schreibt er der Verunreinigung des Nerven mit Ionen zu. Zwischen den dergestalt elektrochemisch wirksamen Endabschnitten des Nerven unterscheidet er, wie es scheint, einen mittleren Abschnitt, von welchem jeder Punkt schon nach sehr kurzer Schliessung negativ secundär-elektromotorisch wirkt.[1]

In einer dritten Mittheilung kommt Matteucci dann wieder auf die extrapolaren Elektrotonusströme zurück, und so hat er, wie er pflegte, seine Angaben über diesen Gegenstand noch viele Mal mit allerlei Varianten wiederholt,[2] in welche ihm zu folgen nutzlos wäre. Auf die Polarisirbarkeit der Nerven aber gründete er seine Auffassung der extrapolaren Elektrotonusströme als Stromschleifen, welche, von der Anode aus der anelektrotonisirten Strecke entlang sich äusserlich verbreiten, durch die Axencylinder zur katelektrotonisirten Strecke gelangen, und dieser entlang äusserlich zur Kathode zurückkehren, was er an einem mit einer feuchten Hülle bekleideten Platindraht nachmachte. Wird solchem Draht ein Elektrodenpaar angelegt, so erhält man extrapolare Stromschleifen nach dem Gesetze des Elektrotonus; mit Zinkdraht in einer mit Zinksulphatlösung getränkten Hülle bleiben sie aus. Das ist bekanntlich die Theorie, welche seitdem Hr. Hermann sich zu eigen machte, zu dessen Versuchen über innere Polarisation der Nerven wir nun kommen.

§. XV. *Hrn. Ludimar Hermann's Versuche über Nervenpolarisation.*

In seiner Schrift vom Jahre 1867, in welcher er seine Absterbehypothese zuerst entwickelte, gab Hr. Hermann vom Elektrotonus eine mit jener Hypothese zusammenhängende naturphilosophische Erklärung,

[1] Comptes rendus etc. t. LII. 1861. 11 Février. p. 231; — 13 Mai. p. 954.

[2] Comptes rendus etc. 16 Septembre 1861. t. LIII. p. 503; — 20 Avril 1863. t. LVI. p. 760; — 22 Juillet 1867. t. LXV. p. 131. 195; — Annales de Chimie et de Physique. 3me Série. t. LIX. p. 385; — Electro-Physiological Researches. Eleventh Series. Philosophical Transactions etc. 1861. p. 363; — Proceedings of the Royal Society. vol. XI. p. 384; — The ... Philosophical Magazine etc. 4th Series. vol. XXIV. October 1862. p. 311; — Corso di Elettro-Fisiologia in sei Lezioni date in Torino ec. Torino 1861. p. 59.

wonach in der intrapolaren Strecke ein dem polarisirenden Strom entgegengesetzter Strom herrschen sollte, vergleichbar dem PELTIER'schen Gegenstrom in einer von einem fremden Strome durchflossenen Thermokette. In diesem vermeintlichen Zusammentreffen sah Hr. HERMANN einen schlagenden Erfolg seiner Speculation, und eine neue Stütze seiner Anschauungen.[1] In meiner 'Widerlegung' begnügte ich mich, einen Fehler in der Reihe von Schlüssen aufzudecken, durch welche Hr. HERMANN geglaubt hatte, seine Construction an das Gesetz von der Erhaltung der Kraft festknüpfen zu können.[2] Ich hatte Gründe, von dem nur mir und einigen Eingeweihten, wie Hrn. PFLÜGER, bekannten Gebiet der secundär-elektromotorischen Wirkungen der Nerven den Schleier noch nicht hinwegzuziehen. Im allgemeinen Interesse wäre es wohl besser gewesen, hätte ich gleich damals Hrn. HERMANN herausgesagt, dass in der intrapolaren Strecke positive Polarisation herrscht. Der Gang der Wissenschaft an dieser Stelle wäre ein anderer, und vielleicht mehr erspriesslicher geworden.

Das Jahr darauf trug Hr. HERMANN, indem er einige in meiner 'Widerlegung' enthaltene Winke benutzte, seine Hypothesen etwas mehr durchgearbeitet von Neuem vor, und diesmal liess er es sich angelegen sein, seine Elektrotonustheorie durch Versuche zu stützen.[3] »Die Kette bestand aus zwei bis sechs ganz kleinen Daniells; der »Nervenstrom wurde vor der Durchströmung stets genau auf Null »compensirt. Die Durchströmung dauerte durchgehends eine Minute.« Unter diesen Umständen bekam Hr. HERMANN in der intrapolaren Strecke natürlich nichts zu sehen, als negative Polarisation. Da dies Ergebniss mit seiner Hypothese von der »durch die Kathode »erhöhten, durch die Anode herabgesetzten Spaltungsgeschwindigkeit »der Nervenmolecüle« zu stimmen, und meine Molecularhypothese zu widerlegen schien, so blieb er befriedigt dabei stehen.

Hrn. HERMANN's Versuche umfassten auch die extrapolaren Strecken, mit welchen sich, nach MATTEUCCI, auch schon Hr. ADOLPH FICK beschäftigt hatte.[4] Er und Hr. HERMANN gelangten schliesslich zum nämlichen Ergebniss, doch ist letzterer in der Priorität, sofern Hrn. FICK's erste Anzeige den Thatbestand nicht ganz richtig wiedergab. Dieser lautet in Hrn. HERMANN's Worten: »Beide extrapolare Strecken wirken

[1] Weitere Untersuchungen zur Physiologie der Muskeln und Nerven. Berlin 1867. S. 40.

[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 341.

[3] Untersuchungen zur Physiologie der Muskeln und Nerven. Drittes Heft. Berlin 1868. S. 71 ff.

[4] Centralblatt für die medicinischen Wissenschaften. 1867. S. 436; — Untersuchungen aus dem physiologischen Laboratorium der Züricher Hochschule. 1. Heft. Wien 1869. S. 129.

»nach der Öffnung für kurze Zeit in einem von der durchflossenen »Strecke weg gerichteten Sinne,« aber der anelektrotonische, dem polarisirenden Strom entgegengerichtete Nachstrom ist der stärkere.[1]

Inzwischen liess Hr. Hermann seine Hypothese von der verschiedenen 'Spaltungsgeschwindigkeit' als Ursache der Elektrotonusströme zu Boden gleiten, und nahm an ihrer Stelle Matteucci's oben erwähnte Erklärung der extrapolaren Elektrotonusströme durch Stromschleifen auf, deren genauere Begründung er sich fortan zu einer Hauptaufgabe machte. Seine Versuche über intrapolare negative Polarisation dienten ihm jetzt zum Beweise für Matteucci's Hypothese,[2] wie früher für die seinige. Vor dieser hat Matteucci's Hypothese unläugbar das voraus, dass sich Etwas dabei denken lässt. Es ist eine gute, discutable Vorstellungsweise, mit welcher zu rechnen ich um so eher bereit bin, als deren Grundgedanke mir gehört.

Schon in meinen Untersuchungen vom Jahre 1849 erwog ich ausdrücklich und prüfte ich mit allen damaligen Hülfsmitteln die Möglichkeit, die extrapolaren Elektrotonusströme durch die zu jener Zeit vielfach beliebte Annahme zu erklären, dass der Axencylinder leite, die Markscheide isolire. Dann würde ein Stromzweig von der Anode dem Perineurium entlang zum nächsten Querschnitt, den Axencylindern entlang zu dem der Anode näheren Querschnitt, und zurück durch das Perineurium zur Kathode fliessen. In dieser Form indess zeigte sich die Hypothese nicht stichhaltig.[3]

Dass sie es in der Form werde, die ihr Hr. Hermann auf Grund der von ihm entdeckten schlechteren Querleitung der Nerven gab, zögere ich einigermaassen ihm auf's Wort zu glauben, und ich hatte noch nicht Zeit, mich davon durch eigene Untersuchung zu überzeugen. Sollte mir dies gelingen, so werde ich es frei bekennen. Sicher ist einstweilen, dass die intrapolare Strecke neben der immerhin mehr physikalischen, negativen Polarisation, von der auch die extrapolaren Ströme abhangen mögen, jene gleichsam mehr physiologische, positive Polarisation besitzt, welche meine Hypothese verlangt. Sicher ist, dass, auch wenn die extrapolaren Elektrotonusströme nur auf Stromschleifen beruhen, das Wesen des Elektrotonus, als in positiver Polarisation bestehend, dadurch nicht berührt würde. Nur der misslichen Verpflichtung, dessen Ausbreitung über die Elektroden hinaus zu erklären, wäre man los. Sicher ist ferner, dass, während ich die positive Polarisation der intrapolaren Strecke zu einer Zeit entdeckte, wo ich noch keines der

[1] Handbuch der Physiologie u. s. w. Bd. II. S. 164.

[2] Pflüger's Archiv für die gesammte Physiologie u. s. w. 1872. Bd. VI. S. 357; — Handbuch der Physiologie. Bd. II. S. 164. 165.

[3] A. a. O. Bd. II. Abth. I S. 229. 275—282 347—350.

heutigen Hülfsmittel besass, Hr. HERMANN, der diese Hülfsmittel bereit fand, seit 1867 bis heute die grundlegende Thatsache des Gebietes übersah, auf dem er als Reformator auftrat. Sicher endlich ist, dass Alles, was er sich über Elektrotonus ausdachte, und mit so grosser Zuversicht vortrug, vor dieser Thatsache vorläufig zu Spreu wird, und dass, von dieser Thatsache ausgehend, die Erforschung des Elektrotonus überhaupt von vorn anzufangen hat.

Hr. HERMANN giebt an, dass ein lebender und ein in heissem Wasserdampf getödteter Nerv keinen scheinbaren Unterschied des Leitvermögens zu Gunsten des ersteren erkennen lassen, wie es sein müsste, wenn der Strom im lebenden Nerven gleichgerichtete elektromotorische Kräfte befreite; und er sieht in diesem, übrigens von mir[1] vorgeschlagenen, aber theoretischer Schwierigkeiten wegen nicht ausgeführten Versuch ein *Experimentum crucis* wider die Moleculartheorie des Elektrotonus.[2]

Gegen Hrn. HERMANN's Berechnung der elektromotorischen Kraft, die in einem Nerven thätig würde, dessen dipolare Molekeln sämmtlich ihre gleichnamigen Pole nach derselben Seite kehren, kann ich im Princip um so weniger Etwas einwenden, als ich durch ähnliche Berechnungen die Leistungen der elektrischen Organe erkläre.[3] Dass keine mit der berechneten vergleichbare Kraft im Nerven auftritt, liesse sich durch die von mir schon in den 'Untersuchungen' gemachte Annahme rechtfertigen, dass die in Bezug auf den polarisirenden Strom falsch gerichteten Molekeln nicht um 180°, sondern nur um einen kleinen Winkel sich drehen.[4]

Was der HERMANN'sche Versuch sonst an Schwierigkeit darzubieten scheint, schwindet vor den nun bekannten Thatsachen der Nervenpolarisation. Bei längerer Schliessungszeit übertrifft die negative Polarisation die positive, und da die Siedhitze beide vernichtet, sollte der lebende Nerv sogar scheinbar schlechter leiten als der todte, nicht besser, wie Hr. HERMANN erwartete. Um den lebenden Nerven besser leitend zu finden als den todten, müsste der Versuch mit sehr kurzer Schliessungszeit angestellt werden. Selbst dann erhält die positive Polarisation die Oberhand über die negative erst bei so ansehnlichen primären Stromstärken, dass wenig Hoffnung ist, den

---

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. I. S. 328.

[2] Untersuchungen zur Physiologie der Muskeln und Nerven. 3. Heft. 1868. S. 67; — PFLÜGER's Archiv u. s. w. 1872. Bd. VI. S. 328; — die Ergebnisse neuerer Untersuchungen auf dem Gebiete der thierischen Elektricität. Sep.-Abdr. aus der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 1878. 1. Heft, S. 17; — Handbuch der Physiologie. Bd. II. 1878. S. 172.

[3] Untersuchungen am Zitteraal u. s. w. S. 275.

[4] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. I. S. 325.

geringen Überschuss der positiven über die negative Polarisation neben der primären Kraft wahrzunehmen. Doch giebt es einen Versuch, den man in diesem Sinne deuten könnte. Schliesst ein Nerv den secundären Kreis eines Inductoriums, dessen abwechselnde Schläge nach bekannten Grundsätzen sich sonst an der Bussole aufheben, so überwiegen nach Hrn. von Fleischl die schnelleren und kürzeren Öffnungsschläge; auch ein einzelner Öffnungsschlag lenkt durch den Nerven hindurch stärker ab als ein Schliessungsschlag.[1] Sofern der Öffnungsschlag stärker erregt als der Schliessungsschlag, sieht Hr. Hermann hierin nichts als einen besonderen Fall seines 'Satzes vom polarisatorischen Increment' (vergl. unten S. 389).[2] Nach dem jetzt von mir über Nervenpolarisation Mitgetheilten muss aber bei dem Fleischl'schen Versuche die positive Polarisation die negative im Falle des Öffnungsschlages um eine beträchtlichere Grösse übertreffen, als im Falle des Schliessungsschlages, und die Möglichkeit, dass dies bei dem Ergebniss mit im Spiele war, ist mindestens im Auge zu behalten.

Wenn die negative Polarisation sich nicht extrapolar ausbreitete, — was ich bis auf Weiteres nicht für bewiesen halte, — während die positive es thäte, — was ich für meine Person nie als ausgemacht ansah, — so wäre sogar denkbar, dass die extrapolare positive Polarisation die gleichnamige intrapolare bedeutend überträfe. Doch es ist meine Absicht nicht, mich hier in die Erörterung dieser dunklen und verwickelten Fragen einzulassen.

Sofern die extrapolaren Elektrotonusströme die Öffnung des polarisirenden Stromes überdauern, die intrapolare Polarisation aber nothwendig auch während des Säulenschlusses vorhanden ist, sieht man jetzt, dass die Grenze zwischen der zweiten und der dritten der oben S. 344. 345 unterschiedenen Classen elektromotorischer Erscheinungen an Muskeln und Nerven sich verwischt, und es wird besser sein, nur zwei Classen, die der selbständigen oder primären, und die der secundären Erscheinungen zu unterscheiden, indem man unter letzteren, ohne Rücksicht auf die Zeit ihres Hervortretens, alle diejenigen versteht, welche ein fremder Strom als Strom, nicht als blosser Reiz, an Muskeln und Nerven erzeugt.

§. XVI. *Hrn. Tigerstedt's Versuche über Nervenpolarisation.*

Im vorigen Jahre beschrieb Hr. Tigerstedt in Stockholm Versuche über innere Polarisation der Nerven. Aus bestimmten Gründen

[1] Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. 1878. III. Abth. Bd. LXXVII. S. 159.

[2] Pflüger's Archiv u. s. w. 1879. Bd. XIX. S. 416.

leitete er den Nachstrom durch dieselben Elektroden ab, welche den polarisirenden Strom zuführten (s. oben S. 348). Er wendete keine stärkere Säule an, als drei Meidinger. Die Schliessungszeit regelte er mit der Hand nach dem Metronom; die kürzeste betrug 1″, die längste 240″. Die Übertragungszeit wurde mittels des Marcel-Deprez'schen elektromagnetischen Signalschreibers bestimmt, und schwankte zwischen 0.″02 und 0.″04. Auch Hr. Tigerstedt erhielt nur negative Polarisation. Seine Ergebnisse formulirt er folgendermaassen: »1. Bei An»wendung von bis zu drei Meidinger'schen Elementen ist die Polarisation »aufs nächste direct proportional der Stärke des polarisirenden Stromes. »2. Wenn der polarisirende Strom während ungleich langer Zeit auf »den Nerven bei übrigens unveränderten Verhältnissen einwirkt, so »nimmt die Polarisation zu; dieselbe steigt im Beginn schneller und »später immer langsamer, schliesslich äusserst langsam ihrem Maximum »sich nähernd. 3. Wenn der polarisirende Strom geöffnet wird, er»reicht die Polarisation augenblicklich ihren höchsten Werth und sinkt »darnach unaufhörlich herab; dieses Herabsinken geschieht im Beginn »sehr schnell, später aber immer langsamer, so dass die Polarisation »noch lange Zeit nach dem Öffnen des polarisirenden Stromes anhält »und nur asymptotisch sich dem Nullpunkte nähert.«[1] Hr. Tigerstedt wäre bei seinen sorgfältig geleiteten Versuchen sicher auf die innere positive Polarisation der Nerven gestossen, wenn er grössere Stromdichte und kürzere Schliessungszeit angewendet hätte. So aber blieb er, gleich seinen Vorgängern, jenseit der kritischen Schliessungszeit stehen.

Weder Hr. Hermann, noch Hr. Fick, noch Hr. Tigerstedt hatten ein Galvanometer im Säulenkreise. Ich glaube nicht, dass dies in ihren Versuchen von Bedeutung war, möchte aber davor warnen, sich ohne diese Maassregel in Versuchsreihen mit grösseren Stromstärken und längeren Schliessungszeiten einzulassen (s. oben S. 352).

§. XVII. *Vom Einflusse der Richtung des primären Stromes auf die secundär-elektromotorischen Wirkungen der Nerven.*

Wunsch und Hoffnung über die Abhängigkeit der inneren positiven Polarisation der Nerven von der Richtung des polarisirenden Stromes etwas Sicheres mittheilen zu können, hielten mich vorzüglich von einer Veröffentlichung meiner Untersuchungen in ihrem gegenwärtigen Zustand ab. Die merkwürdige Thatsache der grösseren Stärke

[1] Mittheilungen vom physiologischen Laboratorium des Carolinischen Medico-chirurgischen Instituts in Stockholm. Herausgegeben von Prof. Dr. Chr. Lovén. Zweites Heft. Stockholm 1882. S. 3 ff.

der positiven Polarisation der Muskeln in der Richtung vom Aequator, wo auch ungefähr der Hilus liegt, nach den Enden zu (s. oben S. 363), liess mich eine Zeit lang vermuthen, dass die intramusculären Nerven dabei im Spiele seien, und dass sie in centrifugaler Richtung stärkere positive Polarisation annehmen. Dies brachte mich auf den Gedanken zu versuchen, wie sich in Bezug auf innere Polarisation die motorischen und sensiblen Wurzeln der Spinalnerven verhalten möchten.

Polarisationsversuche an Wurzeln werden natürlich sehr erschwert durch deren Kürze. Das Erste ist daher, sich möglichst grosse Frösche zu verschaffen. 1857 maass ich eine R. esculenta von 298 und eine von 305^{mm} zwischen Nasenspitze und längster Zehe. Aber auch Wurzelbündeln kleinerer Thiere gelang es mir damals vier mit Eiweisshäutchen überzogene Keilbäusche anzulegen. Wenn auch nicht gerade nöthig, ist es doch sehr wünschenswerth, dass bei diesen Versuchen der Experimentator seine Aufmerksamkeit ungetheilt der Handhabung der Vorrichtungen zuwenden könne, und ihm die Mühe der Praeparation abgenommen werde. Abermals habe ich mich hier Hrn. Pflüger's aufopfernder Hülfleistung mit innigem Danke zu erinnern. Manchen Juli-Nachmittag des tropischen Sommers 1857 praeparirte er, während ich am Nervenmultiplicator Alles bereit hielt, Bündel bald vorderer, bald hinterer Wurzeln; was, wenn es ohne Quetschung, Verlagerung und Verwechselung der Wurzeln möglichst rasch geschehen soll, nicht so leicht ist, wie man sich vielleicht denkt.

Die Säule bestand bei diesen Versuchen aus nur wenigen Grove; die Schliessungszeit betrug ungefähr o″.2. Der etwa vorhandene Nervenstrom war mittels einer primitiven Vorrichtung compensirt, aus der später der runde Compensator ward.[1] Die Wurzeln befanden sich mit den vier Keilbäuschen auf einem kleinen Gestell, dem 'Wurzelträger', das, um eine senkrechte Axe drehbar, sie zwischen den Zuleitungsgefässen umzukehren erlaubte, ohne die Keilbäusche an ihnen zu verrücken. Dies hatte zum Zweck, Ungleichartigkeiten dieser Gefässe und etwaige Irreciprocität der Leitung (s. oben S. 364) möglichst unschädlich zu machen. Alle anderthalb Minuten wurde der Strom abwechselnd in der einen und in der anderen Richtung durch die Wurzeln gesandt. Nach je vier Versuchen wurden sie umgedreht. So entstanden Reihen wie folgende.

Drei Grove. Schliessungszeit ungefähr o″.2.

Motorische Wurzeln.

$$\downarrow \begin{cases} -10° \\ +16° \end{cases} \uparrow \begin{cases} -12 \\ +10.5 \end{cases} \downarrow \begin{cases} -11 \\ +16.5 \end{cases} \uparrow \begin{cases} -13 \\ +10 \end{cases} \|$$

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I S. 176. 177.

Wurzeln umgedreht.

$$\uparrow\left\{\begin{matrix}-12\\+12.5\end{matrix}\right. \downarrow\left\{\begin{matrix}-11\\+11.5\end{matrix}\right. \uparrow\left\{\begin{matrix}-12\\+13\end{matrix}\right. \downarrow\left\{\begin{matrix}-12\\+13\end{matrix}\right.$$

Wurzeln umgedreht.

$$\downarrow\left\{\begin{matrix}-12\\+12\end{matrix}\right. \uparrow\left\{\begin{matrix}-13\\+12.5\end{matrix}\right. \downarrow\left\{\begin{matrix}-14\\+12\end{matrix}\right. \uparrow\left\{\begin{matrix}-12\\+12\end{matrix}\right.$$

Sensible Wurzeln.

$$\uparrow\left\{\begin{matrix}-11\\+14\end{matrix}\right. \downarrow\left\{\begin{matrix}-17\\+12.5\end{matrix}\right. \uparrow\left\{\begin{matrix}-11\\+13\end{matrix}\right. \downarrow\left\{\begin{matrix}-17.5\\+12\end{matrix}\right.$$

Wurzeln umgedreht.

$$\downarrow\left\{\begin{matrix}-34\\+14\end{matrix}\right. \uparrow\left\{\begin{matrix}-16\\+31\end{matrix}\right. \downarrow\left\{\begin{matrix}-41\\+12\end{matrix}\right. \uparrow\left\{\begin{matrix}-19\\+32\end{matrix}\right. \|$$

Wurzeln umgedreht.

$$\uparrow\left\{\begin{matrix}-18\\+16\end{matrix}\right. \downarrow\left\{\begin{matrix}-28\\+16.5\end{matrix}\right. \uparrow\left\{\begin{matrix}-21\\+16.5\end{matrix}\right. \downarrow\left\{\begin{matrix}-27\\+17.\end{matrix}\right.$$

Um diese Zahlen richtig zu beurtheilen, muss man sich erinnern, dass die Ströme noch auf die ältere Art durch Platin in Kochsalzlösung zum Nervenmultiplicator abgeleitet wurden. Nach einem augenblicklichen Stromstoss würde die zurückkehrende Nadel über den Nullpunkt fort in den anderen Quadranten schwingen, und hier durch die Ladungen der Platinplatten vielleicht über ihre Ablenkung im ersten Quadranten hinausgeführt werden. Der Polarisationsstrom der Nerven ist aber nicht solchem augenblicklichen Stromstosse gleich zu stellen. Selbst die negative Polarisation, obschon die flüchtigere, sinkt mehr oder minder allmählich. Der Schwingungsmittelpunkt für die ungedämpfte Nadel wird dadurch zeitweise in den negativen Quadranten (wie wir ihn nennen wollen) verlegt. In ihrem Rückschwunge kann die Nadel wohl den Nullpunkt überschreiten, aber nicht im positiven Quadranten über ihre Ablenkung im negativen hinausgehen. Geschieht dies dennoch, so ist auf doppelsinnige Wirkung zu schliessen.

Wo daher in obigen Tabellen einer kleineren negativen eine grössere positive Zahl folgt, fand doppelsinnige Wirkung statt, d. h. ein negativer Nachstrom schlug alsbald in einen positiven um, und der Unterschied der Zahlen giebt ein ungefähres Maass ab für die vergleichsweise Stärke des letzteren. Danach war in beiden Tabellen bis zum Zeichen || hin der Erfolg der erwartete. Das Eintreten des verkehrten Erfolges von da ab erinnert an das Umschlagen des gesetzlichen Verhaltens in den beiden Hälften eines regelmässigen Muskels (s. oben S. 367). Fast ohne Ausnahme fingen die Reihen an den Wurzeln richtig an, aber öfter erfolgte das Umschlagen schon beim zweiten oder dritten Stromstoss. Besonders an den motorischen Wurzeln war dies der Fall, wie denn auch in den angeführten Bei-

spielen die sensiblen länger als die motorischen Wurzeln das in Rede stehende Verhalten zeigen. Erwägt man jedoch, dass in diesen Versuchen beiderseits abgeschnittene Wurzeln mit Hühnereiweiss berührt und mit elektrischen Schlägen misshandelt wurden, so wird man kaum sich des Eindruckes erwehren, dass sie, bei aller Unvollkommenheit, den Satz wahrscheinlich machen: In den motorischen Wurzeln überwiegt die positive Polarisation in absteigender, in den sensiblen in aufsteigender Richtung, beidemal im Sinne der physiologischen Innervationswelle. Freilich gilt dabei, bis auf Weiteres, dieselbe Bemerkung, wie bei den beiden Muskelhälften. An Stelle stärkerer positiver kann man auch schwächere negative Polarisation setzen, und sagen, in den motorischen Wurzeln überwiege die aufsteigende negative Polarisation, in den sensiblen die absteigende. Schon bei den Muskeln wurde auf einen später anzugebenden Grund für die dort wie hier vorangestellte Auffassung verwiesen.

Verschiedene Umstände, unter anderen die Ankunft der westafrikanischen Zitterwelse, zwangen mich damals, diese Versuche abzubrechen, und erst zweiundzwanzig Jahre später, im Herbst 1879, kam ich dazu, sie wieder aufzunehmen: ausgerüstet mit allen seitdem erfundenen Hülfsmitteln, und diesmal freundlich unterstützt durch Hrn. Prof. Gustav Fritsch, dessen anatomische Geschicklichkeit um so willkommener war, als auch unter einer Sendung ungarischer Frösche, welche ich Hrn. Prof. Jendrássik in Pest verdankte, keine solche Riesen sich befanden, wie vordem die märkischen Gewässer sie zuweilen lieferten. Auch diese Versuchsreihe gedieh noch nicht zur Reife. Sie in den Winter hinein fortzusetzen, nachdem die grösseren Frösche verbraucht waren, schien nicht räthlich. Dazu trat die Nothwendigkeit, mich der Bearbeitung der Sachs'schen Ergebnisse zu widmen. Immerhin lässt sich diesen neueren Erfahrungen manches Wichtige entnehmen.

Zunächst prüfte ich jetzt das Verhalten eines gemischten Nervenstammes bei der Versuchsweise, welcher die Wurzeln unterworfen werden sollten. Hier zeigte sich kein sicherer Unterschied zwischen den Wirkungen bei auf- und bei absteigender Richtung des Stromes, wie sich aus folgenden Beispielen ergiebt.

Fünf Grove. Schliessungszeit 0″.037.

Stück des Ischiadnerven zwischen Wirbelsäule und Abgang der Oberschenkelmuskeläste.

$$\downarrow \begin{cases} -5^{sc} \\ +33^{sc} \end{cases} \uparrow \begin{cases} -2 \\ +36.5 \end{cases} \downarrow \begin{cases} -7 \\ +23 \end{cases} \uparrow \begin{cases} -4 \\ +26 \end{cases} \downarrow \begin{cases} -3 \\ +20 \end{cases} \text{ u. s. w.}$$

Schliessungszeit 0″.031. Anderes ähnliches Stück.

$$\downarrow \begin{cases} -0.5 \\ +23 \end{cases} \uparrow \begin{cases} -0.5 \\ +15 \end{cases} \downarrow \begin{cases} -0.5 \\ +21 \end{cases} \uparrow \begin{cases} -1 \\ +17 \end{cases} \downarrow \begin{cases} -0.5 \\ +17 \end{cases} \uparrow \begin{cases} -1 \\ +17 \end{cases} \downarrow \begin{cases} -0.5 \\ +21 \end{cases} \text{ u. s. w.}$$

Mittleres Stück des Nerven.

$$\uparrow\left\{\begin{matrix}-5\\+18\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-6\\+16\end{matrix}\right.\uparrow\left\{\begin{matrix}-6\\+19.5\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-8\\+15.5\end{matrix}\right.\uparrow\left\{\begin{matrix}-5\\+18.5\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-10\\+8\end{matrix}\right.$$ u. s. w.

Schliessungszeit o″.076.

Unteres Stück, mit den Nn. peronaeus und tibialis.

$$\downarrow\left\{\begin{matrix}-4\\+6\end{matrix}\right.\uparrow\left\{\begin{matrix}-3\\+15\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-2\\+21.5\end{matrix}\right.\uparrow\left\{\begin{matrix}-3\\+14.5\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-2.5\\+14\end{matrix}\right.\uparrow\left\{\begin{matrix}-2.5\\+15\end{matrix}\right.$$ u. s. w.

Die Wirkungen sind stets doppelsinnig, was an der Bussole ohne Weiteres einleuchtet, doch beschränkt sich der negative Vorschlag zuweilen auf einen kaum bemerkbaren Zuck. Die Ungleichmässigkeiten in den einzelnen Reihen rühren unstreitig von Unvollkommenheit der die Schliessungs- und Übertragungszeit regelnden Vorrichtung her. In der Gesammtheit meiner bisherigen Versuche an gemischten Nerven zeigt sich ein leises Übergewicht der aufsteigenden positiven Polarisation; nach unten zu scheint es abzunehmen, ja in das Gegentheil sich zu verkehren. Doch sind die Versuche zu unvollständig, um schon solche Verallgemeinerung, vollends eine Erörterung der Frage zu gestatten, ob dies mit dem Verhältniss zusammenhänge, in welchem die beiden Fasergattungen im Nervenquerschnitt enthalten sind.

Vergleicht man mit den vorigen Reihen den Erfolg an sensiblen Wurzeln, so zeigt sich ein schlagender Unterschied zu Gunsten des vermutheten Gesetzes.

Drei Grove. Schliessungszeit o″.037.

Sensible Wurzeln.

$$\uparrow\left\{\begin{matrix}-2\\+45\end{matrix}\right.\downarrow -7\uparrow\left\{\begin{matrix}-1\\+9\end{matrix}\right.\downarrow -7\uparrow\left\{\begin{matrix}-2\\+6\end{matrix}\right.\downarrow -8\uparrow\left\{\begin{matrix}-1\\+9\end{matrix}\right.$$

Wurzeln umgedreht.

$$\uparrow\left\{\begin{matrix}-5\\+13\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-8\\+7\end{matrix}\right.\uparrow\left\{\begin{matrix}-5\\+13\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-9\\+9\end{matrix}\right.\uparrow\left\{\begin{matrix}-6\\+11\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-9\\+6\end{matrix}\right.\uparrow\left\{\begin{matrix}-5\\+13.\end{matrix}\right.$$

Auffallend ist nun aber, dass auch jetzt wieder die motorischen Wurzeln ein minder günstiges Ergebniss lieferten.

Fünf Grove. Schliessungszeit o″.015.

Motorische Wurzeln.

$$\downarrow\left\{\begin{matrix}-3\\+23\end{matrix}\right.\uparrow\left\{\begin{matrix}-2\\+17\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-3\\+22\end{matrix}\right.\uparrow\left\{\begin{matrix}-2\\+20.5\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-3\\+17\end{matrix}\right.\uparrow\left\{\begin{matrix}-3\\+12\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-4\\+16\end{matrix}\right.\Vert\uparrow\left\{\begin{matrix}-2.5\\+17\end{matrix}\right.\downarrow\left\{\begin{matrix}-3.8\\+18.\end{matrix}\right.$$

Bis zum Zeichen || spricht sich das vermuthete Gesetz ziemlich deutlich aus; aber meist war dies nicht einmal in diesem Grade der Fall. Auch mit den Oberschenkelmuskelnerven war ich nicht glücklicher.

Wenn somit das Gesetz noch nicht für bewiesen gelten kann, so ist andererseits auch noch nicht ausgemacht, dass es keine Gel-

tung habe. Möglicherweise verlangt es, um an den motorischen Wurzeln klar hervorzutreten, eine Combination von Stromdichte und Schliessungszeit, die ich zufällig nicht traf. Um hier aus der Stelle zu kommen, bedürfte es einer Sendung *Bullfrogs* (R. mugiens, auch Catesbyana) aus Nordamerika. Meine Bemühungen, eine solche zu erhalten, blieben bisher vergeblich. Für die physiologisch centripetal leitenden Fasern müsste der Sehnerv eines grossen Knochenfisches ein vortreffliches Object sein. Ich fand noch nicht Zeit, dies zu erproben. Für die physiologisch centrifugal thätigen Fasern scheint es kaum etwas Besseres geben zu können, als die elektrischen Nerven von Torpedo.

Von einer Fülle anderer Versuche, auf die man hier geleitet wird, schweige ich. Aber schon die mitgetheilten Erfahrungen scheinen in hohem Grade die Aufmerksamkeit der Physiologen zu verdienen. Sie bieten das erste Beispiel eines elektromotorischen Unterschiedes zwischen centrifugal und centripetal thätigen Fasern dar. Man dürfte wohl auf diesen Fall den Ausdruck anwenden, dessen Paul Erman sich in Bezug auf das Gesetz der Zuckungen bediente: »Die blosse Ahnung eines solchen Unterschiedes flösst Ehrfurcht ein«.[1] Um so vorsichtiger gilt es zu sein. Selbst wenn das vermuthete Gesetz erwiesen wäre, bliebe zu erwägen, ob man darin eine Wirkung der physiologischen Innervationswelle zu sehen habe, oder eine Einrichtung, um ihren Fortschritt in einem bestimmten Sinne zu fördern, wie ich deren Dasein, ja Möglichkeit, einst aus theoretischen Gründen bezweifelte.[2]

§. XVIII. *Vom Einflusse verschiedener Umstände auf die Polarisation der Nerven.*

Über die Frage nach den Umständen, welche die Polarisirbarkeit der Nerven beeinflussen, habe ich erst sehr wenige, und noch fast keine methodisch gesammelten Erfahrungen. Dass Nerven, die der Siedhitze ausgesetzt waren, keinen negativen Nachstrom mehr zeigen, wusste schon Matteucci (s. oben S. 376). Lässt man aber Nerven vor Trockniss geschützt bei niederer Temperatur allmählich absterben, so bleiben sie sehr lange mit abnehmender Stärke secundär-elektromotorisch wirksam. Von der positiven Polarisation kann man noch nach einundzwanzig Stunden eine Spur sehen. Beispielsweise gaben

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. I. S. 334.
[2] Ebenda. Bd. II. Abth. I. S. 574. 575.

nach dieser Zeit sensible Wurzeln, welche unverrückt in der feuchten Kammer gelegen hatten, mit zwei Grove und 0.″031 Schliessungszeit:

$$\uparrow\left\{\begin{matrix}-10\\+3\end{matrix}\right\}\downarrow -12 \uparrow\left\{\begin{matrix}-11\\+3.5\end{matrix}\right\}\downarrow -14 \uparrow\left\{\begin{matrix}-12\\+2\end{matrix}\right\}.$$

Die Versuche gehören zur selben Reihe wie die zuletzt mitgetheilten. Nach siebenundzwanzig Stunden aber erfolgte nur noch rein negative Polarisation:

$$\uparrow -9 \downarrow -9 \uparrow -9 \downarrow -9$$

und jeder Unterschied zwischen auf- und absteigender Polarisation war verschwunden. Von der negativen Polarisation war noch nach $55\frac{1}{2}$ Stunden eine Spur, im Betrage von etwa einem Scalentheile, zu erkennen.

Wenn sie allein übrig bleibt, ist also die negative Polarisation in den sensiblen Wurzeln nach beiden Richtungen gleich. Folglich ist der Unterschied, den lebende Wurzeln hinsichtlich der Polarisation durch den auf- und durch den absteigenden Strom bieten, der positiven Polarisation zuzuschreiben; in beiden Fasergattungen, wenn auch minder ausgesprochen in den motorischen Fasern, ist nicht die negative Polarisation schwächer, sondern die positive Polarisation stärker im Sinne der physiologischen Innervationswelle. Damit ist für die Nerven, versprochenermaassen, die oben S. 367. 385 aufgeworfene Frage entschieden, und die von mir gewählte Art der Darstellung gerechtfertigt.

Ohne den Versuch an den beiden Muskelhälften angestellt zu haben, zweifle ich nicht, dass sich daran dem Beweise dieselbe Gestalt geben lasse. Ein weiterer, im gleichen Sinne sprechender Grund wird uns noch begegnen.

Von Interesse wird es sein, Polarisationsversuche mit einem Bündel Nervenfasern ohne Perineurium anzustellen, wie man es auf die von Emil Harless angegebene Art gewinnt.[1]

§. XIX. *Die positive innere Polarisation der Nerven im Conflict mit Tetanus.*

Der Gedanke lag nahe, den oben S. 371 an den Muskeln angestellten Versuch auf die Nerven zu übertragen, und zu untersuchen, welchen Einfluss der Thätigkeitszustand der Nerven auf ihre positive

[1] Moleculäre Vorgänge in der Nervensubstanz. II. Abhandlung. Voruntersuchungen. Aus den Abhandlungen der K. bayer. Akademie d. W. II. Cl. VIII. Bd. II. Abth. München 1858. 4. S. 538 ff. — Vergl. Charles E. Morgan im Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w. 1863. S. 340; — Electro-Physiology and Therapeutics etc. New York 1868. p. 464.

innere Polarisation haben würde. Obwohl dieser Versuchsplan seit 1857 unter meinen *Agendis* sich befand, war ich nicht dazu gekommen, ihn zu verwirklichen. Mittlerweile wurde von anderer Seite her eine Thatsache bekannt, welche zwar die hier gestellte Frage nicht unmittelbar beantwortet, aber doch erlaubt, die Antwort mit ziemlicher Gewissheit vorauszusehen. Es ist die von Hrn. Grünhagen gefundene Thatsache, dass die Stärke eines durch den Nerven geleiteten Stromes beim Tetanisiren des Nerven wächst. Hr. Grünhagen deutet diese Zunahme auf Verminderung des Widerstandes des Nerven.[1] Es giebt ein Maass der Vervollkommnung unserer Versuchsweisen, dass Hrn. Grünhagen ein Nachweis gelang, um welchen ich mich im October 1844 vergeblich bemühte, obschon nach unseren damaligen Einsichten meine Anordnung tadellos war.[2] Hr. Hermann, der den Grünhagen-schen Versuch mehrere Jahre später selbständig fand, zeigte, dass es sich dabei nicht um Widerstandsabnahme, sondern um eine in der intrapolaren Strecke rege werdende elektromotorische Kraft handelt, welche er das 'polarisatorische Increment' nennt.[3]

Hrn. Hermann's Theorie der Erscheinung zu prüfen, dürfte kaum an der Zeit sein, da die positive Polarisation der intrapolaren Strecke ihn voraussichtlich zu einigen Änderungen seiner Constructionen zwingen wird. Die Thatsache an sich hat für uns die Bedeutung, dass, wenn der positive Polarisationsstrom während der Dauer des polarisirenden Stromes durch Tetanus des Nerven verstärkt wird, dies wahrscheinlich auch mit dem positiven Nachstrome der Fall sein wird. Dann bestände zwischen den secundär-elektromotorischen Wirkungen der Muskeln und denen der Nerven der Unterschied, dass der Thätigkeitszustand den positiven Nachstrom in den Muskeln schwächt, in den Nerven stärkt.

§. XX. *Von den secundär-elektromotorischen Erscheinungen der elektrischen Organe.*

Über die secundär-elektromotorischen Erscheinungen am elektrischen Organe des Zitterwelses habe ich schon in meiner 'Experi-

[1] Henle's und Pfeufer's Zeitschrift für rationelle Medicin. 3. R. 1869. Bd. XXXVI. S. 140.

[2] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. II. Abth. I. 1849. S. 444.

[3] Pflüger's Archiv u. s. w. 1872. Bd. VI. S. 561; — 1873. Bd. VII. S. 323 ff.; — 1874. Bd. VIII. S. 264; — 1875. Bd. X. S. 215; — 1876. Bd. XII. S. 151; — 1879. Bd. XIX. S. 416; — 1881. Bd. XXIV. S. 246; — Handbuch der Physiologie u. s. w. Bd. II. 1878. S. 165; — Die Ergebnisse neuerer Untersuchungen u. s. w. Sep.-Abdr. aus der Züricher Vierteljahrsschrift u. s. w. 1878. Heft 1. S. 32.

mentalkritik der Entladungshypothese' berichtet.[1] Aus dem Vorigen erhellt, wie ich zu diesen Versuchen geführt wurde. Man erkennt jetzt zwischen den Polarisationsströmen der Muskeln und Nerven, und denen des Zitterwels-Organes die Übereinstimmung, auf welche ich in meinem Vortrag über die westafrikanischen Zitterwelse im Januar 1858 hinwies.[2]

Ein der Länge des Fisches nach geschnittener Streif verhält sich secundär-elektromotorisch wie ein Muskel oder ein Nerv. Bei mässiger Dichte, und bei grosser Dichte aber langer Schliessungszeit, erfolgt in beiden Richtungen negative Wirkung, jedoch schwächer in der Richtung des Schlages. Bei grösserer Dichte und kurzer Schliessungszeit tritt positive Wirkung hervor, aber stärker in der Richtung des Schlages. Da der Schlag im Zitterwels-Organe vom Kopf nach dem Schwanze gerichtet ist, können wir den ihm gleichgerichteten polarisirenden als absteigend, den entgegengerichteten als aufsteigend bezeichnen. Einem aufsteigenden Stromstoss also folgt oft ein rein negativer Nachstrom, während schon der absteigende einen starken positiven Nachstrom erzeugt. Von einem etwa ausgelösten Schlage des Organs unterscheidet sich letzterer durch längere Dauer. Während der Schlag die Nadel nach Art eines voltaëlektrischen Stromstosses ablenkt, hält sie der positive Nachstrom förmlich eine Zeit lang an die Hemmung gedrückt. Dabei fällt auch der primäre Strom in der Richtung des Schlages stärker aus, als in der anderen. Bei der grossen elektromotorischen Kraft, welche dem primären Strom zu Grunde liegen muss, um positive Polarisation zu erhalten, folgt hieraus verhältnissmässig bedeutende Kraft dieser Polarisation. Da es wohl noch lange dauern wird, bis Jemand wieder Gelegenheit zu solchen Versuchen findet, will ich noch einige Einzelheiten, und damit man sehe, um welche Grössen es sich handelt, einige Zahlen mittheilen.

Schon an dem am 23. November 1857 getödteten kleinsten der drei mir von Goodsir übergebenen Fische hatte ich Polarisationsversuche angestellt, bei welchen aber der primäre Strom nicht beobachtet wurde. Doch überzeugte ich mich schon dabei von der Übereinstimmung des secundär-elektromotorischen Verhaltens des Organes mit dem der Muskeln und Nerven. Zu den weiteren Versuchen dienten Streife des Organes des grössten, 233^{mm} langen Fisches. Dieser wurde am Morgen des 12. Januars 1858 todt gefunden, doch schlug das Organ noch reflectorisch bei Reizung der Haut mit einer Pinzette, so dass ein Froschschenkel zuckte, dessen Nerv dem Fisch anlag. Da der

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 718.
[2] Monatsberichte u. s. w. 1858. S. 106.

Tod des Fisches unerwartet kam, waren die nöthigen galvanometrischen Vorrichtungen leider nicht bei der Hand. Die einzige verfügbare Bussole musste dem primären Strome vorbehalten werden. Für die secundären Wirkungen wurde der Nervenmultiplicator genommen, der sich bald als viel zu empfindlich erwies, nachdem aber die Versuche damit angefangen waren, nicht mit einem anderen Instrumente vertauscht werden konnte, ohne die Vergleichbarkeit der Ergebnisse preiszugeben.[1] Hätte ich schon damals die erstaunliche Lebenszähigkeit des Organes gekannt, die sich mir vielmehr erst bei dieser Gelegenheit kundgab,[2] so hätte ich mich nicht davon abhalten lassen, eine neue Versuchsreihe wenigstens am Muskelmultiplicator zu beginnen. Da ich nicht wusste, ob nicht jede beobachtete Wirkung die letzte sei, konnte natürlich nichts geschehen, als ein Bild der Erscheinung in grossen, wenn auch noch so rohen Zügen sich zu verschaffen; an systematische Ausfüllung einer Tabelle mit doppeltem Eingange, wie ich sie für Muskeln und Nerven schon besass (s. oben S. 355. 374), war nicht zu denken.

Die aus dem Organ mit der Scheere geschnittenen Streife waren etwa 30^{mm} lang und $5—8^{mm}$ breit; die Dicke des Organs mag 5^{mm} betragen haben, so dass, unter der Voraussetzung gleicher Leitungsgüte, die Streife ungefähr denselben Widerstand hatten, wie unser Muskelpaar.

Die Versuchsweise war die nämliche, wie für die Muskeln, nur dass, da das Organ nicht zuckt, der Spanner und die Keilbäusche zum Zuleiten des polarisirenden Stromes entbehrlich waren. Den beiden Enden des Streifes wurden gewöhnliche, mit Kupfersulphatlösung getränkte und mit Eiweisshäutchen bekleidete Zuleitungsbäusche angelegt;[3] die ableitenden Keilbäusche waren mit Kochsalzlösung getränkt, gleichfalls mit Eiweisshäutchen bekleidet, und bildeten die Fortsetzung der gewöhnlichen alten Zuleitungsgefässe mit Platinplatten in Kochsalzlösung. Endlich die abwechselnde Schliessung des primären und des secundären Kreises, die Isolirung beider Kreise von einander, die Beherrschung der Schliessungszeit u. s. w., geschahen mittels derselben Vorrichtung, deren ich mich für Muskeln und Nerven noch heute bediene. Abgesehen davon, dass sich die äussere Hautfläche gegen alle anderen Begrenzungen eines Streifes Organ schwach positiv verhielt, war am ruhenden Organe von elektromotorischer Wirkung nichts zu spüren.[4]

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 718.

[2] Vergl. Untersuchungen am Zitteraal u. s. w. S. 188.

[3] In der 'Experimentalkritik' steht durch ein Versehen, dass auch die zuleitenden Bäusche Keilbäusche waren (a. a. O. S. 717).

[4] Ebenda S. 718; — Untersuchungen am Zitteraal u. s. w. S. 172.

Die folgenden Angaben werden, nach allem Vorigen, ohne Weiteres verständlich sein. Die römischen Zahlen sind Grove, die Zeiten die Schliessungszeiten. $90° + x$ bedeutet Anschlagen an die Hemmung. Die Ablenkungen an der Bussole sind nur innerhalb eines Versuchspaares mit auf- und absteigendem Strome sicher vergleichbar, da der Abstand der Rolle mehrfach geändert wurde, um die Ablesung des Ausschlages zu erleichtern.

		X	XX	XXX		
				frisch	ermüdet	erschöpft
0″.2	S	−90°	−90	−90	−90	−90
	P	15sc	25	118	44	57
	S	−90	−90	+90+x	+70	−50
	P	15	25	132	44	52
10″	S	—	−90			
	P	—	80.5 (beständige Ablenkung)			
	S	—	−90			
	P	—	81 (beständige Ablenkung)			
20″	S	−90				
	P	—				
	S	−90				
	P	—				

Wie man sieht, liegt die Schwelle für das Hervortreten der positiven Polarisation sehr hoch, zwischen zwanzig und dreissig Grove, und der primäre absteigende Strom erscheint gegen den aufsteigenden verstärkt im Verhältniss von 112 : 100. Die Tabelle zeigt auch sogleich, dass am nämlichen Streif, in dem Maasse, wie durch wiederholte Versuche seine Leistungsfähigkeit erschöpft wird, die positive Polarisation wieder zurück-, die negative wieder hervortritt. In demselben Maasse verschwindet der Unterschied in der Stärke des auf- und absteigenden polarisirenden Stromes.

Schneller und vollständiger wird die Polarisirbarkeit des Organes bis auf einen kleinen Rest vernichtet durch die Siedhitze, welche zugleich, wie beim Muskel, den Widerstand des Organes bedeutend herabsetzt, — so in einem nicht auf Beobachtung der Polarisation gerichteten Versuche im Verhältniss von 100 : 42.

			XXX	
			frisch	gesotten
0″.2	↑	S	− 90° *(bis)*	− 24; − 20
		P	45; 48^{sc}	176; 176
	↓	S	+ 90 + *x (bis)*	− 34; − 26.5
		P	61; 80	186; 186.

Da zugleich stärkere negative Polarisation erfolgte, hatte die grössere Stärke des absteigenden primären Stromes am gesottenen Stücke nichts zu schaffen mit dem Übergewicht, welches sich an frischen Stücken im gleichen Sinne zeigt, sondern es fand aus irgend einem Grunde eine Störung der Reciprocität statt (s. oben S. 364). Dass jenes Übergewicht von der positiven Polarisation herrührt, und dass das Überwiegen dieser in Richtung des Schlages kein bedeutungsloser Zufall ist, folgt ferner daraus, dass bei querer Durchströmung Nichts der Art sich kundgiebt.

Quer geschnittener Streif vom Rücken. Zwanzig Grove.

		l ← *r*	*l* → *r*
0″.2	S	+ 90°	+ 90
	P	76^{sc}	76
10″	S	− 90	− 90
	P	92; 104	98

r, *l* bedeuten rechts und links. Durch die Dicke des Organs hindurch, von der äusseren Haut zur inneren Sehnenhaut gaben selbst vierzig Grove bei 0.″2 Schliessungszeit nur etwa 25° in beiden Richtungen. Die sogenannte Hautschwarte gab mit dreissig Grove bei derselben Schliessungszeit nur − 2° nach beiden Richtungen. Von einem Stück Organ praeparirte ich Haut und Sehnenhaut ab; es fuhr fort secundäre Wirkungen, wenn auch in ziemlich regelloser Art zu geben, nicht zu verwundern, da es jede Regelmässigkeit des Baues eingebüsst hatte. Der Fettflosse liess sich weder mit dreissig Grove bei 0.″2, noch mit dreissig Grove bei 20″, noch mit zwanzig Grove bei 15″ Schliessungszeit secundär-elektromotorische Wirkung entlocken. Freilich war dies schon am Tage nach dem, an welchem der Fisch todt gefunden worden war. Doch konnte nicht hierin der Grund der Unwirksamkeit der Fettflosse liegen, wenn sie polarisirbar wäre wie das Organ, da dies um dieselbe Zeit noch kräftige secundär-elektromotorische Wirkungen gab. In der That, bei einer Temperatur von wenig über 0° in der feuchten Kammer aufbewahrt behält das Organ, gleich einem absterbenden Nerven (s. oben S. 387), erstaunlich lange ein geringes Maass von

Polarisirbarkeit, wie folgende Tabelle zeigt, in welcher die primäre Wirkung nur ausnahmsweise vorkommt, da ein zweiter Beobachter nicht immer zur Hand war.

XXX.

Jan.		13.	14.	15.	16.	17.	18. 1858.
	S	$-90°$	$-90+r$	—	-90	-45	-8
	P	—	—	—	—	—	41^{sec}
0."2	S	$+90$	$+60$	—	-14 / $+48$	-6 / $+12$	-3 / $+6$
	P	—	—	—	—	—	38

Ein auf die Seitenlinie senkrechter quer durchströmter Streif gab am 16. Januar in der einen Richtung -55, in der anderen $-59°$.

Noch am sechsten Tag also nach dem Tode des Fisches ist spurweise Polarisation nach demselben Gesetze wie am frischen Organe vorhanden. Schliesslich ging sie mit den Lebenseigenschaften verloren: das Organ fing an, eigenthümlich fade zu riechen. Von einem gewissen Zeitpunkt an werden die durch den absteigenden Strom erzeugten Wirkungen doppelsinnig. Dies ist wichtig, denn es lehrt, dass auch am Organ diese Wirkungen die algebraïsche Summe sind zweier Polarisationen, einer negativen flüchtigeren, und einer positiven langsamer absinkenden Polarisation.

Über die Polarisirbarkeit des Zitteraal-Organes stellte der verstorbene Dr. Sachs in Venezuela auf meine Veranlassung Versuche an, deren Ergebnisse ich schon so vollständig nach seinen Tagebüchern mittheilte, und auch discutirte, dass ich zu dem in den 'Untersuchungen am Zitteraal'[1] Gesagten Nichts hinzuzufügen habe. Dort zeigte ich, dass diese Ergebnisse sich befriedigend herleiten lassen unter der Voraussetzung, dass im Organ des Zitteraales, wie in dem des Zitterwelses, zwei Polarisationen, eine positive und eine negative, nebeneinander bestehen, deren algebraïsche Summe in jedem Augenblick man zu sehen bekommt; dass auch dort die positive Polarisationscurve bezogen auf die Öffnungszeit die minder steile, die negative die steilere ist. Wenn Dr. Sachs nie rein positive Ausschläge sah, so erklärt sich dies nur zu sicher aus einem Mangel in seiner Ausrüstung und Anleitung, an dem ich selber Schuld bin. Er hatte nur zwanzig kleine Grove bei sich, von denen drei zerbrochen ankamen, ein Unfall, auf den ich hätte rechnen sollen. Dann hatte ich ihm nicht hinlänglich eingeprägt, weil ich es mir selber nicht genügend vergegenwärtigt hatte, dass er zu diesen Versuchen die kleinsten Thiere nehmen,

[1] A. a. O. S. 205—221. — Die Curven auf Taf. II des Werkes sind, wie man leicht erkennt, in unserer jetzigen Redeweise, Polarisationscurven bezogen auf die Öffnungszeit.

und vom Organ die dünnsten Streifen schneiden müsse. Bei der ausnehmend hohen 'Schwelle', welche das elektrische Organ für die positive Polarisation besitzt, und welche beim Zitteraal möglicherweise noch höher liegt als beim Zitterwels, ist es kein Wunder, wenn Dr. Sachs mit siebzehn Grove an Organstücken von $6-7^{cm}$ Querschnitt keine rein positiven Ausschläge erhielt.

Inzwischen ersetzt die Discussion der Sachs'schen 'empirisch resultirenden' Curven einigermaassen die verfehlte unmittelbare Beobachtung, indem sie an der Coëxistenz der beiden Polarisationen auch im Zitteraal-Organ keinen vernünftigen Zweifel lässt. Auch überzeugte sich Dr. Sachs, dass Siedhitze die Polarisirbarkeit des Organs vernichtet. Es scheint also Alles wie beim Zitterwelse vor sich zu gehen. Leider besteht aber zwischen Dr. Sachs' und meinen Versuchen in einem anderen Punkte ein bedenklicher Unterschied. Nach ihm wäre nämlich am Zitteraal-Organ die negative Polarisation stärker im Sinne des Schlages, während es am Zitterwels-Organ die positive Polarisation ist. Man könnte dabei an die bei beiden Fischen verschiedene Beziehung der Nervenendigung zur Richtung des Schlages denken.[1] Aber schon in den 'Untersuchungen am Zitteraal'[2] entwickelte ich die Gründe, aus welchen ich Dr. Sachs' Beweise für seine Angabe nicht für ausreichend erachte. Dr. Sachs selber hatte sichtlich keine Ahnung von dem tiefen Widerspruch, in welchen er hier zu mir gerieth, und er begnügte sich auf diesem schwierigen Gebiete mit einer einzigen Versuchsreihe, bei welcher er nicht einmal den primären Strom beobachtete, also ohne jede Sicherung gegen etwaige Irreciprocität der Leitung blieb. Unter diesen Umständen muss ich die Frage, welche Polarisation im Zitteraal-Organ die stärkere in der Richtung des Schlages sei, ob, wie im Zitterwels-Organ, die positive, oder ob, wie Dr. Sachs berichtet hat, die negative, für eine noch offene erklären.

Über die Polarisirbarkeit des Zitterrochen-Organs ist noch Nichts bekannt, nur dass ich einen Versuch Configliachi's aus dem Jahr 1805 auffand, in welchem, wie es scheint, mehrere auf einander geschichtete Organe von Zitterrochen nach Art einer Ritter'schen secundären Säule geladen, also negativ polarisirt wurden.[3]

Dass es bei den secundär-elektromotorischen Wirkungen der elektrischen Organe um die Summe der Wirkungen der einzelnen elektrischen Platten sich handelt, braucht nicht gesagt zu werden. Man könnte auf die Vorstellung gerathen, dass beim Polarisiren des

---

[1] Vergl. Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 618.
[2] A. a. O. S. 218. 219.
[3] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 719. Anm.

Organes nur die elektrischen Nerven im Organ der Sitz der Polarisation würden. Gerade beim Zitterwelse tritt die Masse dieser Nerven so zurück gegen die des elektrischen Gewebes, dass diese Vorstellung ganz unhaltbar erscheint.

Von der Teleologie der Polarisation der elektrischen Organe, d. h. von der Rolle, welche sie möglicherweise im Mechanismus des Zitterfisch-Schlages spiele, habe ich schon wiederholt gehandelt.[1]

§. XXI. *Theoretisches. Schlussbemerkungen.*

Aus der Gesammtheit der mitgetheilten Erfahrungen ergiebt sich, dass Muskeln, Nerven und elektrische Organe nach einem gemeinsamen, bisher nur bei ihnen beobachteten Gesetze polarisirbar sind. Neben innerer negativer Polarisation, welche sich beim ersten Anblick nicht von der anderer feuchter poröser Körper unterscheidet, jedoch an die Lebenseigenschaften der Gewebe geknüpft ist, nehmen sie auch innere positive Polarisation an, welche bisher sonst nirgend wahrgenommen wurde; und bei allen dreien zeigt sich die positive Polarisation nachhaltiger, die negative flüchtiger, woraus doppelsinnige, erst negative, dann positive Wirkungen entspringen.

Freilich versuchte ich noch nicht bei vielen, und nicht bei den wichtigsten Objecten, wie den Drüsen, ob sie bei grosser Stromdichte und kleiner Schliessungszeit vielleicht positive Polarisation zeigen. Die Untersuchung der secundär-elektromotorischen Wirkungen ist eben noch in einem ganz unfertigen Zustande, in welchem ich sonst nicht gewohnt bin, Ergebnisse zu veröffentlichen. Doch glaube ich kaum, dass ich bei längerer Fortsetzung dieser Arbeiten in der Verborgenheit ihnen die erstrebte Vollendung ertheilt hätte. Wer der obigen Darlegung folgte, wird einsehen, dass hier eine überwältigende Masse neuer Thatsachen und Beziehungen vorliegt, zu deren erschöpfender Behandlung selbst jetzt, nach Eröffnung der vornehmsten Gesichtspunkte und Auffindung der richtigen Versuchsweisen, fast ein neues Forscherleben gehört.

Sollte sich aber auch noch bei anderen feuchten porösen Körpern positive innere Polarisation finden, so bliebe doch die an den Muskeln, Nerven und elektrischen Organen hervortretende ausgezeichnet durch ihre besondere Beziehung zu den Lebensthätigkeiten der Gewebe. In den regelmässigen monomeren Muskeln[2] ist die positive Polarisation

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. S. 722; — Untersuchungen am Zitteraal u. s. w. S. 220.

[2] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 570.

in der Richtung vom Aequator nach den beiden Enden stärker als in der entgegengesetzten. Leider fehlt es, um Schlüsse aus dieser Thatsache zu ziehen, an einer wesentlichen Grundlage, der sicheren Kenntniss nämlich, wie in solchen Muskeln die Nervenendigungen vertheilt sind. Ich will diese schon einmal von mir erörterte[1] Frage hier nicht wieder aufnehmen, sondern begnüge mich mit der Bemerkung, dass, gleichviel ob jede Muskelfaser, wie Hr. W. Krause behauptet, nur an einer einzigen oder, wie Hr. Kühne will, an mehreren Stellen innervirt wird,[2] im Ganzen doch immer eine Contractionswelle von der Mitte des Muskels nach seinen Enden laufen werde. In den sensiblen, weniger sicher in den motorischen Nervenfasern überwiegt die positive Polarisation im Sinne der physiologischen Innervation. In der elektrischen Platte des Zitterwelses überwiegt sie im Sinne des Schlages.

Auch hier ist beiläufig kein Zweifel, dass die positive Polarisation die stärkere ist, nicht die negative Polarisation die schwächere. Wenn die polarisirende Stromdichte nur klein ist, erscheint die dann allein vorhandene negative Polarisation in beiden Richtungen gleich. Ebenso wenn die Siedhitze dem Organe von beiden Polarisationen nur ein geringes Maass negativer Polarisation übrig lässt, ist dies, wie an absterbenden sensiblen Wurzeln, in beiden Richtungen das nämliche. Da es somit für die elektrische Platte und für die Nervenwurzeln für erwiesen gelten darf, dass es die positive Polarisation ist, welche in der einen Richtung stärker auftritt, nicht die negative, welche zurücktritt, können wir dieselbe Deutung, durch einen Analogie-Schluss, wohl getrost auf das Verhalten der beiden Polarisationen in der oberen und unteren Hälfte regelmässiger monomerer Muskeln übertragen, wo es an einem unmittelbaren Beweise für diese Deutung noch fehlt.

In allen drei Gebilden also, Muskeln, Nerven und elektrischer Platte,

---

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. S. 568 ff.

[2] Ich weiss nicht recht, was Hrn. Kühne's neuere Ansichten über diesen Punkt sind. Seine Angabe von sechs bis acht Nervenendigungen an Sartoriusfasern, (Über die peripherischen Endorgane der motorischen Nerven. Leipzig 1862. 4°. Taf. III. Fig. XIV. F), weist er, als auf unvollkommene Untersuchung gegründet, jetzt von der Hand, und als Beweis für die Innervation der Muskelfaser an mehreren Stellen bildet er einzelne Nervenendigungen von Amphibien ab, in welchen die Nervenfaser sich in mehrere parallele Terminaläste auflöst, die aber in seiner eigenen Theorie doch zusammen nur Eine Innervationsstelle ausmachen (Untersuchungen aus dem physiologischen Institute der Universität Heidelberg. Sonderabdruck. Heidelberg 1879. S. 115. 129; — Untersuchungen am Zitteraal u. s. w. S. 416. 417). Man begreift nicht, was dies mit der Frage zu thun habe, ob jede Muskelfaser an mehreren, makroskopisch auseinandergelegenen Stellen, oder ob sie nur an einer einzigen Stelle innervirt werde.

stellt sich die positive Polarisation stärker dar in der Richtung, in welcher der diesen Gebilden eigenthümliche physiologische Vorgang — Contractionswelle, Innervationswelle, elektrischer Schlag — in ihnen vorschreitet. Ein Einblick, dessen Bedeutung, wenn er sich ferner bewährt, wohl kaum eine kleine sein kann. Denn die oben S. 387 erwogene Möglichkeit, dass das Überwiegen der aufsteigenden positiven Polarisation in den sensiblen Wurzeln nur eine Wirkung der physiologischen Innervationswelle sei, die sich häufig in diesem Sinne fortpflanzt, wird dadurch unwahrscheinlich, dass man dann drei ganz verschiedenen Vorgängen, der Contractionswelle, der Innervationswelle, dem elektrischen Schlage, dieselbe Wirkung zuschreiben müsste.

Versucht man nunmehr, sich ein Bild von dem zu machen, was in einem jener drei Gebilde bei der Polarisirung vor sich gehe, so ist man, was die negative Polarisation anlangt, zunächst natürlich geneigt, sie mit der inneren Polarisation der porösen feuchten Körper auf eine Linie zu stellen. Es liegt nahe, die Vernichtung der inneren Polarisirbarkeit der Muskeln und des elektrischen Organes durch die Siedhitze mit dem verminderten Widerstand der Binnenflüssigkeit[1] in Verbindung zu bringen (s. oben S. 346); deren allmähliches Schwinden im Verlaufe des Absterbens mit der Säuerung,[2] welche nach Hrn. Ranke den Widerstand der Muskeln noch 2·4 Mal stärker herabsetzt, als die Siedhitze.[3] Damit würde stimmen, dass, gleichfalls nach Hrn. Ranke, die Bindesubstanzen, welche durch die Siedhitze ihre innere Polarisirbarkeit nicht einbüssen (s. oben S. 368), dadurch auch keine Verminderung ihres Widerstandes erfahren. Dunkel dagegen bleibt, dass die Siedhitze der Polarisirbarkeit mehr schadet, als das Absterben, da doch letzteres den Widerstand bedeutend mehr verringert, als die Siedhitze; und es fragt sich überhaupt, ob eine so geringe Verminderung des Widerstandes der Binnenflüssigkeit, wie sie beim Kochen des Muskels stattfindet, einer Wirkung fähig sei, zu welcher bei anderen porösen Körpern, beispielsweise Fliesspapier, die Leitungsgüte von Essigsäure, Ammoniak, Kupfer- und Zinksulphatlösung nicht ausreicht.[4]

[1] Diesen Namen hat Hr. Munk für die interstitielle Flüssigkeit der feuchten porösen Körper vorgeschlagen, sofern sie secundären Widerstand zeigen; er passt auch sehr gut auf dieselben Körper als Polarisations-Objecte (Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w. 1873. S. 254).

[2] Hinsichtlich der Säuerung des gesottenen und des absterbenden elektrischen Organes s. die Gesammelten Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 646; — Untersuchungen am Zitteraal u. s. w. S. 70.

[3] Tetanus. Eine physiologische Studie. Leipzig 1865. S. 35 ff.

[4] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 25. 26; — Bd. II. S. 190.

Unter den Geweben, welche durch die Siedhitze und beim Absterben ihren Widerstand nicht ändern, führt Hr. Ranke auch die Nerven auf.[1] Daraus erwachsen weitere Schwierigkeiten. Nach Analogie mit der weissen Hirnsubstanz werden allem Ermessen nach die Nervenstämme durch die Siedhitze sauer.[2] Das würde die Vernichtung der inneren Polarisirbarkeit durch die Siedhitze erklären, nur dass man nicht verstände, weshalb die gesottenen Nerven nicht auch an Widerstand abnehmen, und weshalb absterbende Nerven, welche sich nicht säuern, ihre Polarisirbarkeit einbüssen.

Noch ein Hinderniss scheint sich der Auffassung der negativen Polarisation der Muskeln und Nerven als eines einfach physikalischen Vorganges, ähnlich der inneren Polarisation von Holz, Leder u. d. m. zu widersetzen. Die Abhängigkeit jener negativen Polarisation von Stromdichte und Schliessungszeit stimmt zwar beim ersten Anblick gut mit solcher Auffassung. Die negative Polarisation wächst dem Product aus diesen Variablen anfangs, wie es scheint, einigermaassen proportional. Sie nähert sich dann langsam einer Grenze. Dies ist ganz das Verhalten, welches wir an Polarisationsströmen überhaupt gewöhnt sind, und welches sich aus dem Wesen der Polarisation leicht erklärt. An den Muskeln aber, und, wenn ich meinen älteren Beobachtungen trauen darf, auch an den Nerven, tritt mit wachsender Schliessungszeit ein Maximum der negativen Polarisation ein. Dies passt schlecht zur Vorstellung, dass es um gewöhnliche innere Polarisation sich handele. Die Deutung des Maximums auf ein um diese Zeit eintretendes Wachsthum der positiven Polarisation (s. oben S. 362) leuchtet um so weniger ein, als das Maximum vielmehr mit der Vernichtung der Polarisirbarkeit durch längere Einwirkung sehr starker Ströme zusammenzuhängen scheint (s. oben S. 369).

Hat es demgemäss sogar für die negative Polarisation der Muskeln, Nerven und elektrischen Organe seine Schwierigkeit, sie mit der gewöhnlichen inneren Polarisation zu identificiren, so fehlt es vollends an solchem Anhalt für Erklärung der positiven Polarisation. Angenommen, die negative sei gewöhnliche innere Polarisation, so würde sie sich mit dem physikalischen Vorgang an den oben S. 346 fingirten Zwischenplättchen decken. Dafür, dass an denselben Elektroden negative und positive Polarisation stattfinde, giebt es nur ein einziges, von mir beobachtetes Beispiel, nämlich bei Eisen und eisen-

---

[1] A. a. O. S. 33. 38.

[2] Gscheidlen in Pflüger's Archiv u. s. w. 1874. Bd. VIII. S. 171. — Über die Reaction der gesottenen Nervenstämme selber scheint es seltsamerweise keine Versuche zu geben. Vergl. Hermann in seinem Handbuch, a. a. O. S. 139.

haltigem Zink in Zinksulphatlösung.[1] Obschon diese Doppelpolarisation von Schliessungs- und Öffnungszeit ähnlich abhängt, wie die welche uns beschäftigt, wird man sich zur Erklärung letzterer schwerlich darauf berufen wollen. Um die Polarisation der Muskeln, Nerven, elektrischen Organe auf bekannte physikalische Thatsachen zurückzuführen, müsste man also in der Richtung des Stromes noch eine andere häufig wiederkehrende Discontinuität annehmen, welche, wie die Grenze gewisser Elektrolyte,[2] der Sitz einer positiven Polarisation würde. Wenn man auch in den Muskeln, zur Noth in den Nerven, solche Discontinuitäten namhaft machen könnte, so würde es doch daran in der elektrischen Zitterwels-Platte fehlen. Auch wäre es sehr bedenklich, in allen drei so verschiedenen Gebilden einerlei Abwechselung von Stoffen, oder eine Abwechselung von Stoffen vorauszusetzen, welche einerlei secundär-elektromotorische Wirkungen hervorbrächte. Ohnehin ist die positive Polarisation des elektrischen Organes wohl zu stark, um sie auf diese Weise zu erklären.

Dazu kommt die besondere Art, wie die positive Polarisation von Stromdichte, Schliessungszeit und Öffnungszeit abhängt. Abgesehen von dem Maximum bei längerer Schliessungszeit hat für die negative Polarisation diese Abhängigkeit doch wenigstens ähnliche Form wie für die innere Polarisation der feuchten porösen Körper. Nicht so für die positive Polarisation. Für diese giebt es eine Schwelle der Stromdichte, unterhalb welcher sie nicht erscheint. Sie tritt dann plötzlich mit einer zwar noch mit der Stromdichte, aber mit der Schliessungszeit vergleichsweise wenig, wenn überhaupt noch wachsenden Stärke auf. Die Schwelle liegt für die elektrische Platte höher als für Muskeln und Nerven. Während die negative Polarisation nach Art der inneren Polarisation der porösen Körper mit wachsender Öffnungszeit schnell schwindet, zeigt die positive Polarisation eine Nachhaltigkeit, welche auf eine andere Art von Mechanismus deutet. Doch soll nicht unerwähnt bleiben, dass auch die negative Polarisation an der Grenze gesättigter Zinksulphat- und physiologischer Kochsalzlösung sehr lange nachhält.[3]

Obschon sodann die positive Polarisation sich an den in der Kälte absterbenden Nerven und elektrischen Platten lange spurweise nachweisen lässt, ist sie doch vom Lebenszustand der Gewebe abhängiger, als die negative Polarisation. Die Siedhitze macht ihr sofort und unbedingt ein Ende, wenn sie von der negativen Pola-

[1] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 57—60.
[2] Ebenda. Bd. I. S. 6.
[3] Ebenda. Bd. II. S. 190.

risation noch einen Rest bestehen lässt; und die verderbliche Wirkung starker Ströme auf die Polarisirbarkeit überhaupt trifft in erster Linie die positive Polarisation. Zu dem Allen kommt noch, um letztere als Phaenomen besonderer Würde und Tragweite zu kennzeichnen, die schon erwogene Beziehung zur Richtung der Contraction, der Innervation und des Fischschlages, endlich die nicht minder wichtige Beziehung zum Thätigkeitszustand der Gewebe.

Ich glaube nicht, dass ein physikalisch geschulter Kopf, der sich die Gesammtheit dieser Thatsachen heute unbefangen vor Augen hält, zu einem anderen Schlusse gelangen wird, als dem, zu welchem ich mich schon vor langen Jahren gedrängt sah. Es ist der Schluss, dass in den positiv-polarisirbaren Gebilden nicht dem primären Strome gleichgerichtete elektromotorische Kräfte erzeugt, sondern dass die Träger schon vorhandener elektromotorischer Kräfte dem primären Strome gleichgerichtet werden. Fügt man hinzu, dass im natürlichen Zustand der Gebilde die Träger durch gewisse Kräfte in anderer Lage festgehalten werden, aus welcher sie immerhin durch beliebig schwache Ströme abgelenkt, jedoch erst durch Ströme von einer bestimmten Dichte dauernd entfernt werden können, so versöhnt diese einfache und naturgemässe Annahme die für die positive Polarisation erkannte Schwelle mit dem elektrotonisirenden Vermögen auch der schwächsten Ströme. Dass die grosse Nachhaltigkeit der positiven Polarisation gleichfalls zu dieser Anschauung passe, bedarf nicht der Erwähnung.

Da ich mit der positiven Polarisation der Muskeln kurz nach der Veröffentlichung meines 'vorläufigen Abrisses' (1843), und lange vor der Herausgabe des ersten Bandes meiner 'Untersuchungen' (1848) bekannt wurde, so sieht man jetzt, wie ich zu meiner Auffassung der elektromotorischen Erscheinungen der Muskeln und Nerven in jenem Werke kam. Die Verallgemeinerung, wodurch ich von der positiven Polarisation der Muskeln auf die der intrapolaren Nervenstrecke schloss, war vielleicht jugendlich kühn, allein die Natur gab mir Recht, als ich, wenige Jahre später, in dem positiven Nachstrom der Nerven das Zeichen der während des primären Stromes herrschenden positiven Polarisation entdeckte. Sofern es keine andere vernünftige Erklärung der positiven Polarisation geben dürfte, als die durch das Richten schon vorhandener Kräfte, leistet der Nachweis dieser Polarisation zugleich noch einen anderen Dienst. In meinen Augen wurde und wird dadurch der in Ermangelung eines natürlichen Nervenquerschnittes fehlende Beweis für das Vorhandensein elektromotorischer Kräfte im unversehrten Nerven geliefert. Der aus umsichtiger Prüfung des natürlichen Muskelquerschnittes sich ergebende Beweis des Daseins solcher Kräfte im Muskel wird ebendadurch verstärkt. Auf dem-

selben Wege hoffte ich die elektromotorischen Kräfte der ruhenden Muskeln im lebenden Menschen nachzuweisen, deren Wahrnehmung durch die Hautströme, die Parelektronomie und die Nebenschliessung durch die Haut unmöglich gemacht wird. Bei den oben S. 369—371 erzählten Versuchen hatte ich dies im Auge, und in diesem Sinne sollten die secundär-elektromotorischen Erscheinungen den Schluss des achten Capitels meiner 'Untersuchungen' bilden, welches 'Von dem Muskelstrome und seinen Bewegungserscheinungen am lebenden unversehrten Thiere' handelt.[1]

Da ich nun ferner die Möglichkeit einsah, durch physiologische Polarisation von Trägern elektromotorischer Kräfte den Schlag der elektrischen Organe zu erklären; da ich das Glück hatte, auch hier positive Polarisation im grössten Maassstabe, und in unzweifelhafter Beziehung zum Schlage der Organe darzuthun; endlich da DELLE CHIAIE's und Hrn. BABUCHIN's Satz von der Praeformation der elektrischen Elemente in den Organen der Zitterfische an säulenartiger Verstärkung des Schlages in der Platte keinen Zweifel lässt: so wird man es erklärlich finden, dass ich noch immer auf dem rechten Wege zu sein glaube, und dass ich der von Hrn. HERMANN seit sechszehn Jahren gegen meine Anschauungen geführten Polemik, welche mehr neue Kunstausdrücke als Thatsachen zu Tage förderte, bis auf Weiteres ruhig zusehe. Wiederholt, und von zwei ganz verschiedenen Grundhypothesen aus, hat Hr. HERMANN demonstrirt, dass in der intrapolaren Strecke ein dem polarisirenden Strom entgegengesetzter Polarisationsstrom herrschen müsse (s. oben S. 379). Ich bin neugierig, durch welche Hülfshypothese er jetzt mit dem wirklich darin herrschenden gleichgerichteten Polarisationsstrom fertig werden wird.

Jene richtbaren Träger elektromotorischer Kräfte in den Muskeln, Nerven und elektrischen Organen nannte ich bekanntlich elektromotorische Molekeln, und ohne zunächst etwas über ihre Natur auszusagen, schematisirte ich sie in einfachster Weise.[2] Die Entdeckung der Neigungsströme setzte mich später in den Stand, über die Anordnung der in den Muskeln praeexistirenden elektromotorischen Kräfte Bestimmteres anzugeben. An Stelle der halb elektropositiven, halb elektronegativen Kugeln traten elektromotorische Flächenelemente,[3] während ich zugleich die unvollständig gebliebene Darstellung in den 'Untersuchungen' dahin ergänzte, dass ich mir diese Elemente als Herde eines chemischen Processes denke, desselben etwa, welcher die Athmung der Gewebe ausmacht.

[1] A. a. O. Bd. I. S. 240; — Bd. II. Abthl. I. S. 331; — Abth. II. S. 1. 377.
[2] Ebenda. Bd. II. Abth. I. S. 323.
[3] Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. II. S. 122. 291. 671. 672.

Die diesen Vorstellungen entgegenstehenden Schwierigkeiten kenne ich so gut wie irgendwer. Hier ist die Frage, wie man sich das Richten der elektromotorischen Molekeln durch den Strom zu denken habe. Um es zu erläutern, hatte ich an die Grothuss'sche Theorie der Elektrolyse erinnert. Hr. Hermann schrieb mir fälschlich die Meinung zu, dass der Strom die Molekeln elektrodynamisch drehe, und er suchte diese Drehung aus dem Ampère'schen Grundgesetze herzuleiten, indem er der zu richtenden Molekel ein drehbares Stromelement, und dem Gesammtstrom einen durch die Mitte des Elementes gehenden Stromfaden substituirte.[1] Später bemerkte wohl Hr. Hermann, dass er mich mit einer mir fremden Theorie beschenke, aber er glaubt doch meine Elektrotonus-Hypothese in dieser Form vortragen zu sollen, in der er sie schlechthin die 'elektrodynamische Theorie' nennt, weil er meint, dass auf die durch eine Zwischenflüssigkeit getrennten elektromotorischen Molekeln die Grothuss'sche Anschauung nicht übertragbar sei.[2]

Ich hatte gute Gründe, keine elektrodynamische Theorie der Art zu versuchen. Hrn. Hermann's Betrachtung ist ganz unzulänglich. Die Aufgabe, die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einer elektrischen Strömung und einer elektromotorischen Molekel zu bestimmen, führt zwar auf mehrere haikle Punkte, allein so weit die elektrodynamischen Kräfte sicher bekannt sind, lässt sich schon jetzt behaupten, dass durch solche Kräfte keine Drehung der Molekel möglich sei.

Sofern in ihrer ursprünglichen Gestalt die Grothuss'sche Theorie voraussetzt, dass Sauerstoff- und Wasserstoffatome durch den in elektrochemischer Zerlegung begriffenen Leiter zweiter Classe eine Art molecularer Kette bilden, passt freilich dies Bild nicht strenge auf die Polarisation der Muskeln, Nerven und elektrischen Organe durch den Strom. Um indess das sich Richten der Molekeln so plausibel zu machen, wie es mit dergleichen Molecularvorgängen überhaupt gelingt, scheint mir meine Auseinandersetzung in den 'Untersuchungen' noch heute genügend. Sie hat sogar seitdem noch eine Stütze gewonnen an der Entdeckung der anaphorischen Wirkungen des Stromes durch Hrn. Jürgensen[3] und deren Erklärung durch Hrn. Quincke.[4] Wenn in einer Flüssigkeit schwebende, durch Berührung damit negativ elektrisirte Theilchen vor unseren Augen zur Anode wandern, scheint der Schluss

---

[1] Untersuchungen zur Physiologie der Muskeln und Nerven. 3. Heft. Berlin 1866. S. 66.

[2] Pflüger's Archiv u. s. w. 1874. Bd. VIII. S. 268; — Handbuch der Physiologie. 1878. A. a. O. S. 171. 172.

[3] Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w. 1860. S. 673.

[4] Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. 1861. Bd. CXIII. S. 565.

nicht allzu gewagt, dass eine halb elektropositive, halb elektronegative, nicht verschiebbare, aber frei drehbare Molekel ihren positiven Pol der Kathode, ihren negativen der Anode zuwenden würde.

Doch ich lege auf solche Speculationen geringen Werth. Mir genügt es vor der Hand, zu wissen, dass in Muskeln, Nerven und elektrischen Organen Träger elektromotorischer Kräfte vorhanden sind, welche der Strom irgendwie richtet, welche zu den Lebensthätigkeiten dieser Gewebe in Beziehung stehen, beim elektrischen Organe sogar dessen räthselhafte Wirkung erklären. Gegenüber der Fülle thatsächlicher Fragen, welche hier noch der Antwort harren, halte ich es für verlorene Mühe, sich weiter in Vermuthungen zu ergehen. Erst nachdem das Gebiet der secundär-elektromotorischen Erscheinungen nach jeder Richtung ergründet sein wird, kann man hoffen, in den Molecularmechanismus der elektromotorischen Gewebe etwas tiefer einzudringen.

16. Bestimmung magnetischer Momente mit der Waage.

Von H. von Helmholtz.

(Vorgelegt am 5. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XVI]; — ausgegeben am 12. April.)

Die zu beschreibenden Versuche sind bisher von mir nur mit einer guten chemischen Waage ausgeführt worden, die aber nicht frei von Eisentheilen war. Der Einfluss dauernder Magnetisirung der vorhandenen Stahlstücke konnte durch mehrfache Wägungen bei umgekehrter Richtung der Magnete eliminirt werden, aber der Verdacht, dass temporäre Magnetisirung durch Influenz der angewendeten Magnete mitwirke, konnte nicht ganz beseitigt werden. Ich hoffe demnächst diese Messungen mit einer eisenfrei gebauten und für Spiegelablesung eingerichteten Waage wiederholen zu können. Aber schon die bisherigen Versuche zeigen, dass man auf diesem Wege sehr constante und mindestens bis auf $^1/_4$ Procent genaue Werthe erreichen kann, bei denen man von den durch die unablässigen Veränderungen des Erdmagnetismus verursachten Störungen vollständig frei ist. Das letztere erachte ich als den wesentlichsten Vortheil der Methode.

Die Controlle darüber, ob Magnetstäbe von geeigneter Grösse unverändertes Moment behalten haben, eine Frage, die bei vielen magnetischen Messungen in Betracht kommt, kann nach der zu beschreibenden Methode auch mit jeder hinreichend feinen, wenn auch nicht eisenfreien Waage ausgeführt werden.

Zu einer vollständigen Bestimmung braucht man drei nahehin gleiche Magnetstäbe. Die von mir gebrauchten waren hohle Röhren von Stahl 10^{cm} lang und 1.3^{cm} im Durchmesser. Die Röhrenform ist bequem, weil sie sich gut aufhängen lassen und verhältnissmässig starken Magnetismus halten. Zur Ausführung der Messung werden zwei von den Stäben auf passende Träger geschoben und an Häkchen aufgehängt, welche in der oberen Biegung der Bügel, die die Schaalen tragen, angebracht sind. Der eine von den Magneten V hängt vertical, der andere H horizontal, und zwar so, dass seine Axe verlängert die Mitte von V trifft. Wenn H seinen Nordpol gegen V wendet und letzterer den seinigen nach oben, so drängt der Nordpol

von H den von V abstossend nach oben, während er den Südpol von V in die Höhe zieht. Umgekehrt wird der Nordpol von H und mit ihm die zweite Schaale der Waage nach unten gedrängt. Bei gleicher Belastung beider Schaalen steigt also V und sinkt H. Umgekehrt, wenn man einen von beiden Magneten umkehrt. Die Differenz der Belastung, welche man anwenden muss bei ungeänderter Lage von H, um die Waage in Gleichgewicht zu setzen erst bei Wendung des Nordpols von H nach oben, dann nach unten, misst die vierfache Verticalkraft, mit der die beiden Magnete auf einander wirken. Durch Umkehren von H und Wiederholung der Wägung kann man die Wirkungen des permanenten Magnetismus von Stahltheilen der Waage eliminiren. Endlich kann man zur Controlle noch den bisher horizontalen Magneten vertical hängen, und umgekehrt; man muss dann dasselbe Resultat erhalten, wenn nicht die mittlere Poldistanz der beiden Magnete (s. unten) erheblich verschieden ist.

Wenn m und μ die Momente der beiden Magnete sind, a die Entfernung ihrer Mittelpunkte, die gleich dem Abstand der seitlichen Schneiden der Waage von einander ist (30^{cm} bei der bisher von mir gebrauchten Waage), so ist die Gewichtsdifferenz G, auf absolute Krafteinheiten reducirt, bei Umkehr eines der Magnete der Hauptsache nach gegeben durch den Ausdruck:

$$G = \frac{12 \cdot m \cdot \mu}{a^4}.$$

Der Werth von G war für die stärksten der bisher von mir gebrauchten Magnete 0.0219^{grm}, wobei die Einheiten der letzten Ziffer bei vorsichtigem Wägen sicher herauskommen. Natürlich dürfen die Magnete beim Umhängen nur mit Zangen oder reinen Handschuhen angefasst werden. Mit der besonders für diesen Zweck construirten Waage hoffe ich noch eine Stelle mehr zu erreichen.

Hat man drei ähnliche Magnete und bestimmt die drei Grössen $m_1 m_2$, $m_1 m_3$ und $m_2 m_3$, so ergiebt sich

$$m_1 = \sqrt{\frac{(m_1 m_2) \cdot (m_1 m_3)}{m_2 m_3}}.$$

Das Verhältniss $m_1 : m_2$ wurde auch mit einem Bifilarmagnetometer nach F. Kohlrausch bestimmt. Der durch Wägung gefundene Werth stimmte gut mit dem Mittel der magnetometrischen Werthe, aber letztere schwankten viel mehr als der erstere.

Bei den angegebenen Dimensionen der Waage und der Magnete sind die höheren Glieder der Entwickelung nicht ganz zu vernachlässigen. Man lege die x Axe an die Axe des horizontalen Magneten.

die y Axe vertical, bezeichne mit H und V die Momente der betreffenden Magnete und setze

$$h = \Sigma(\mu x^3) \text{ und } v = \Sigma(\mu y^3),$$

so ist der vollständigere Werth der Glieder, die nach Combination der vier oben erwähnten Wägungen übrig bleiben,

$$G = \frac{12 \cdot H \cdot V}{a^4} + \frac{40 H \cdot v - 30 V \cdot h}{a^6}.$$

Die Grössen

$$\frac{v}{V} = \mathfrak{y}^2 \text{ und } \frac{h}{H} = \mathfrak{x}^2$$

kann man, da es sich nur um Correctionsglieder handelt, durch magnetometrische Messungen bestimmen, oder auch mit der Waage, indem man die Wägung bei höherer oder tieferer Aufhängung eines der Magnete wiederholt. Setzt man

$$H = 2\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{x} \text{ und } V = 2\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{y}$$

so ist

$$h = 2\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{x}^3 \text{ und } v = 2\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{y}^3$$

d. h. diese ersten Glieder der Fernwirkung sind dieselben, wie sie zwei einzelne punktförmige magnetische Quanta $+\mathfrak{h}$ und $-\mathfrak{h}$ in der Entfernung $2\mathfrak{x}$ von einander, beziehlich $+\mathfrak{v}$ und $-\mathfrak{v}$ in der Entfernung $2\mathfrak{y}$ hervorbringen würden. Diese Grössen sind es, die ich oben als mittlere Entfernung der Pole bezeichnet habe. Hr. Kohlrausch hat schon bemerkt, dass sie bei den Röhrenmagneten meist $^5/_6$ ihrer Länge betragen. Ich habe bei den beiden oben erwähnten Magneten 0.84 und 0.86 gefunden. Es wird bei Anwendung dieser Bezeichnung

$$G = \frac{12 H \cdot V}{a^4} \cdot \left\{1 + \frac{20 \cdot \mathfrak{y}^2 - 15 \cdot \mathfrak{x}^2}{6a^2}\right\}.$$

Sind diese Grössen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bestimmt, so ist die Berechnung der Kraft am besten unter der Fiction auszuführen, dass aller Magnetismus in den betreffenden beiden Punkten concentrirt sei, und macht sich dann sehr einfach.

Wenn das magnetische Moment eines Magneten nach seinem absoluten Werthe genau bestimmt ist, und jeden Augenblick genau controllirt werden kann: so sind mittels magnetometrischer Methoden alle anderen magnetischen Momente und alle Stromintensitäten leicht auf jenes eine zurückzuführen. Magnetische Momente ändern sich freilich auch; aber bei nicht ganz neu magnetisirten und gut gehärteten Stahlstücken gehen in Wochen und Monaten Veränderungen vor sich, wie

sie der Erdmagnetismus zuweilen in fünf Minuten erleidet. Es lässt sich daher offenbar eine viel sicherere absolute Bestimmung der Stromstärken erreichen, wenn man ihre magnetische Kraft mit dem jederzeit controllirbaren Moment eines gut gehärteten Stahlstabes oder Magnetsteins vergleicht, als wenn man sie mittels der Tangentenbussole auf den Erdmagnetismus bezieht, der in unseren mit verborgenem Eisen durchwebten Gebäuden ausserdem wenige Fuss entfernt von einer ersten Beobachtungsstelle ganz andere Werthe zeigen kann.

17. Über die Änderung des Volumens und des Brechungsexponenten von Flüssigkeiten durch hydrostatischen Druck.

Von G. Quincke
in Heidelberg.

(Vorgelegt von Hrn. G. Kirchhoff am 5. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XVI]; — ausgegeben am 12. April.)

Um die Compressibilität der Flüssigkeiten zu bestimmen, wurde die scheinbare Abnahme der Volumeneinheit gemessen, welche Flüssigkeiten in mit Capillarröhren versehenen Glasgefässen unter der Glocke der Luftpumpe zeigten bei 0° und bei mittlerer Temperatur $t°$, wenn der Druck auf die Flüssigkeiten um eine mit dem Quecksilber-Manometer gemessene Grösse zunahm. Durch besondere Versuche wurde die Volumenänderung der Glashülle bestimmt, diese zu der scheinbaren Volumenänderung der Flüssigkeit addirt und so die wirkliche Volumenabnahme der Flüssigkeit gefunden. Beide zeigten sich nahezu proportional der Zunahme des Drucks. Daraus ergab sich die wirkliche Abnahme der Volumeneinheit für die Zunahme des Drucks um eine Atmosphäre oder die Compressibilität der Flüssigkeit bei 0° und $t°$.

Compressibilität oder Volumenabnahme von Flüssigkeiten durch hydrostatischen Druck von einer Atmosphäre in Milliontel des ursprünglichen Volumens.

Flüssigkeit	$\mu \cdot 10^6$ bei 0°	$\mu \cdot 10^6$ bei $t°$	Temp. $t°$
	vol.	vol.	°
Glycerin	25.24	25.10	19.00
Rüböl	48.02	58.18	17.80
Mandelöl	48.21	56.30	19.68
Olivenöl	48.59	61.74	18.3
Wasser	50 30	45.63	22.93
Schwefelkohlenstoff	53.92	63.78	17.00
Terpentinöl	58.17	77.93	18.56
Benzol aus Benzolsäure	—	66.10	16.78
Benzol	—	62.84	16.08
Steinöl	64.99	74.50	19.23
Alkohol	82.82	95.95	17.51
Äther	115.57	147.72	21.36

Für dieselben Flüssigkeiten wurde bei der Temperatur $\tau°$ die Änderung des Brechungsexponenten bestimmt, wenn der Druck auf

die Flüssigkeit um eine mit dem Quecksilber-Manometer gemessene Grösse zunahm.

Die Flüssigkeiten wurden in Glas- oder Metallröhren von 230^{mm} Länge in einen Interferenz-Apparat eingeschaltet, wie ich ihn schon früher[1] benutzt und beschrieben habe. Die Flüssigkeit, welche das eine der beiden interferirenden Strahlenbündel zu durchlaufen hatte, wurde comprimirt und die Anzahl der Interferenzstreifen gemessen, welche dabei eine bestimmte Fraunhofer'sche Linie in einem reinen Spectrum passirten. Die Druckänderungen wurden mit einer Luftpumpe hervorgebracht.

Aus diesen optischen Versuchen lässt sich dann unter gewissen Annahmen über die Constanz des sogenannten specifischen Brechungsvermögens oder der Refractions-Constante die Compressibilität der Flüssigkeit berechnen.

Nennt man

y die Anzahl Interferenzstreifen, welche bei der Druckzunahme von p^{mm} Quecksilber und bei einer Flüssigkeitsschicht von D^{mm} Länge durch die betreffende Spectrallinie wandern,

Y die Anzahl Interferenzstreifen, welche bei einer Atmosphäre Druckzunahme und einer Flüssigkeitsschicht von 1000^{mm} Länge durch dieselbe Spectrallinie gehen.

n n_1 den Brechungsexponenten } der Flüssigkeit vor und nach

σ σ_1 das specifische Gewicht } der Compression,

λ die Wellenlänge des Lichtes in Luft für die betreffende Spectrallinie,

μ die Compressibilität der Flüssigkeit,

so ist, da die Volumenänderung proportional der Zunahme des Drucks ist,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = 1 + \mu \frac{p}{760} \qquad 1.$$

$$y = Y \cdot \frac{p}{760} \cdot \frac{D}{1000} = \frac{D}{\lambda}(n_1 - n) \qquad 2.$$

Der Unterschied der Brechungsexponenten lässt sich mit Hülfe der Gleichung 1. in verschiedener Weise berechnen, je nach der Annahme, die man über das sogenannte Brechungsvermögen oder eine diesem analoge Grösse macht.

Nimmt man mit den HH. Dale und Gladstone,[2] Landolt[3] u. A. an, dass die sogenannte specifische Brechung constant sei, so ist

$$\frac{n-1}{\sigma} = \frac{n_1 - 1}{\sigma_1} = \text{const.} \qquad 3a.$$

[1] G. Quincke. Pogg. Ann. 132. S. 53 u. Taf. II. Fig. 13. 1867.

[2] Dale and Gladstone. Philosoph. Transactions 1863. p. 377.

[3] Landolt. Pogg. Ann. 123. S. 596. 1864; Berl. Sitzungsber. 9. 1. 1882. S. 64.

Während für diese Hypothese kein theoretischer Grund vorliegt, haben die Theorien des Lichtes[1] dazu geführt, das specifische Brechungsvermögen constant zu setzen, oder

$$\frac{n^2-1}{\sigma} = \frac{n_1^2-1}{\sigma_1} = \text{const.} \qquad 3\text{b.}$$

In neuester Zeit haben Hr. H. A. LORENTZ[2] in Amsterdam und Hr. L. LORENZ[3] in Kopenhagen aus verschiedenen theoretischen Gründen auf die Constanz einer anderen Grösse, der sogenannten Refractions-Constante geschlossen, wonach

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{\sigma} = \frac{n_1^2-1}{n_1^2+2}\cdot\frac{1}{\sigma_1} = \text{const.} \qquad 3\text{c.}$$

sein soll.

Aus den drei Gleichungen 3a, 3b, 3c folgt das Verhältniss der specifischen Gewichte, wenn man berücksichtigt, dass $n_1 - n$ eine sehr kleine Grösse ist,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = 1 + \frac{n_1 - n}{n-1} \qquad 4\text{a.}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = 1 + \frac{2n(n_1-n)}{n^2-1} \qquad 4\text{b.}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = 1 + \frac{6n(n_1-n)}{(n^2-1)(n^2+2)} \qquad 4\text{c.}$$

Setzt man in diesen Gleichungen für $n_1 - n$ seinen Werth aus Gleichung 2 und für $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ den Werth aus Gleichung 1, so ist

$$\mu_a = Y\cdot\frac{\lambda}{1000}\cdot\frac{1}{n-1} \qquad 5\text{a.}$$

$$\mu_b = Y\cdot\frac{\lambda}{1000}\cdot\frac{2n}{n^2-1} \qquad 5\text{b.}$$

$$\mu_c = Y\cdot\frac{\lambda}{1000}\cdot\frac{6n}{(n^2-1)(n^2+2)} \qquad 5\text{c.}$$

wo μ den unteren Index a, b, c erhalten hat, je nachdem zu seiner Berechnung die Formel 3a, 3b, 3c benutzt wurde.

Die nach diesen Gleichungen 5. berechneten Werthe der Compressibilität des Wassers finden sich mit den direct beobachteten und den Streifenverschiebungen Y für die einzelnen FRAUNHOFER'schen Linien zusammengestellt.

---

[1] LAPLACE, Mécanique céleste. IV. livr. X. p. 264. — HOEK, Pogg. Ann. 112 S. 350. 1861.

[2] H. A. LORENTZ, Wiedem. Ann. 9. S. 642. 1880.

[3] L. LORENZ, Wiedem. Ann. 11. S. 77. 1880.

Fraunhofer'sche Linie	Streifenverschiebung Y	Temp. τ°C.	Compressibilität des Wassers berechnet		
			$\mu_a \cdot 10^6$	$\mu_b \cdot 10^6$	$\mu_c \cdot 10^6$
	φ	°	vol.	vol.	vol.
C	22.55	20.40	44.69	50.12	40.60
D	25.72	20.42	45.51	52.00	41.31
E	28.92	19.60	45.43	51.95	41.22
F	31.59	18.12	45.52	52.08	41.26
G	35.32	19.41	44.66	51.16	40.40

vol.
direct beobachtet $\mu \cdot 10^6 = 46.15$ bei 18° Grassi[1]
45.63 bei 22.9 Quincke.

Ähnliche Messungen bei verschiedenen Flüssigkeiten für die Fraunhofer'sche Linie *D* geben folgende Resultate.

Flüssigkeit	Streifenverschiebung für Lin. *D.* Y	Temp. τ°	Brechungsexpon. n	Compressibilität beob.	Compressibilität mit Streifenverschiebung berechnet		
				$\mu \cdot 10^6$	$\mu_a \cdot 10^6$	$\mu_b \cdot 10^6$	$\mu_c \cdot 10^6$
	φ	°		vol.	vol.	vol.	vol.
Glycerin	18.17	20.53	1.4689	25.09	22.81	27.14	19.60
Rüböl	46.24	20.3	1.4753	59.61	57.30	68.30	49.08
Mandelöl	45.42	17.0	1.4720	55.19	56.67	67.46	48.59
Olivenöl	46.47	20.5	1.4690	63.32	58.34	69.42	50.09
Wasser	26.02	20.42	1.3330	46.14	46.04	52.60	41.78
Schwefelkohlenstoff .	73.89	15.0	1.6710	62.62	64.88	81.17	50.80
Terpentinöl	66.56	19.7	1.4712	79.14	77.76	92.56	66.68
Steinöl	61.07	19.4	1.4484	74.58	74.96	88.72	64.94
Alkohol	61.53	20.18	1.3616	101.41	100.2	115.4	89.84
Äther	86.96	18.0	1.3537	142.65	144.83	166.6	130.4

Bei allen diesen Flüssigkeiten findet eine Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den aus den optischen Versuchen mit Hülfe von Gleichung 5a. berechneten Werthen der Compressibilität statt, während die mit Gleichung 5b. und 5c. berechneten Werthe so grosse Abweichungen zeigen, dass sie durch Beobachtungsfehler nicht erklärt werden können.

Daraus würde folgen, dass bei constanter Temperatur und verschiedenem hydrostatischen Druck für die von mir untersuchten Flüssigkeiten die specifische Brechung

$$\frac{n-1}{\sigma} = \text{const.}$$

ist, oder dass die Decimalen des Brechungsexponenten proportional der Dichtigkeit zunehmen.

[1] Grassi Ann. d. Chim. (3) XXXI. p. 477. 1851.

18. Über die Dielektricitäts-Constante und die elektrische Doppelbrechung isolirender Flüssigkeiten.

Von G. Quincke
in Heidelberg.

(Vorgelegt von Hrn. G. Kirchhoff am 5. April: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XVI]: — ausgegeben am 12. April.)

Nach den Anschauungen von Faraday[1] ist in jedem Punkte einer isolirenden Flüssigkeit, die wie das Glas einer Leidener Flasche elektrisirt wird, eine Zugkraft in der Richtung der elektrischen Kraftlinien und eine Druckkraft senkrecht zu diesen Kraftlinien anzunehmen. Nach Maxwell[2] sind diese Druckkräfte durch die Gleichung gegeben

$$p = \frac{K_1}{8\pi} \cdot \frac{P^2}{a^2} \qquad 1.$$

wenn P die elektrische Potentialdifferenz, a den Abstand der ebenen Metallbelegungen oder Elektroden bedeutet, zwischen denen die Flüssigkeit sich befindet. K_1 hätte für die Kräfte $\fdiagup$ und $\perp$ zu den elektrischen Kraftlinien denselben Werth und wäre gleich der Dielektricitätsconstante K oder der Zahl, um welche die Capacität eines Condensators grösser erscheint, wenn man die Belegungen statt durch Luft durch eine andere isolirende Substanz von einander trennt. Nach den neuesten theoretischen Untersuchungen[3] von Hrn. von Helmholtz kann das Verhältniss zwischen den Grössen der Drucke und Spannungen $\perp$ und $\fdiagup$ den elektrischen Kraftlinien je nach der Art der isolirenden Substanz verschieden sein.

Ich habe für eine Reihe isolirender Flüssigkeiten den Werth von K und K_1 gemessen für die Zug- und Druckkräfte $\fdiagup$ und $\perp$ zu den elektrischen Kraftlinien. K_1 werde ich, je nachdem die Kräfte $\fdiagup$ oder $\perp$ zu den elektrischen Kraftlinien wirken, mit K_p und K_t bezeichnen.

Dabei wurde eine elektrische Wage mit ebenen horizontalen Condensatorplatten aus vernickeltem Messing von 8.530^{cm} Durchmesser und 0.1597^{cm} Abstand benutzt, die in einem grösseren Glasgefäss stand, das mit Luft oder der isolirenden Flüssigkeit gefüllt war. Die untere Condensatorplatte stand mit der inneren Belegung einer grossen

[1] Faraday, Experimental researches. §. 1224 u. 1297.
[2] Maxwell, Electricity and magnetism. I. §. 111. 124.
[3] Helmholtz, Berl. Monatsber. 17. 2. 1881.

Leidener Batterie von acht Flaschen aus Flintglas in Verbindung, deren äussere Belegung wie die obere Condensatorplatte zur Erde abgeleitet war.

Die Condensatorplatten und die Belegungen der Leidener Batterie wurden mit einer HOLTZ'schen Maschine geladen und auf constanter Potentialdifferenz erhalten. Die letztere konnte durch ein von Hrn. RIGHI[1] angegebenes Reflexions-Elektrometer controlirt, oder durch ein Schraubenelektrometer (long range electrometer) von Sir WILLIAM THOMSON[2] gemessen werden.

Eine Vergleichung der Angaben des Schraubenelektrometers mit den Messungen an einer elektrischen Wage in Luft mit Condensatorplatten von 85^{mm} Durchmesser und 1 bis 2^{mm} Abstand ergab, dass einem Schraubenumgang des Schraubenelektrometers (von denen noch 0.001^{rev} durch Schätzung bestimmt werden konnte) einer Änderung des elektrischen Potentials um 1.1415 C. G. S. oder um die elektromotorische Kraft einer 305 gliedrigen DANIELL'schen Kette entsprach.

Ich bestimmte mit dem Schraubenelektrometer die elektrische Potentialdifferenz, bei welcher die Condensatorplatten in Luft sich mit einer Kraft G_1 von 20^{gr} oder 10^{gr} anzogen.

Darauf wurden die Gewichte gesucht, welche bei gleicher elektrischer Potentialdifferenz der elektrischen Anziehung der Condensatorplatten (∓ den elektrischen Kraftlinien) gerade das Gleichgewicht hielten, wenn die Platten statt von Luft, ganz von der isolirenden Flüssigkeit umgeben waren. Diese Gewichte G_{11} schwankten zwischen 21^{gr} und 100^{gr} und liessen sich bis auf 0.01^{gr} genau mit einer empfindlichen Wage messen. Das Verhältniss der bei gleicher elektrischer Potentialdifferenz für Flüssigkeit und Luft gefundenen Gewichte G_{11} und G_1 giebt K_p.

Wurden die Condensatorplatten der elektrischen Wage bis zu derselben elektrischen Potentialdifferenz geladen und durch einen empfindlichen Multiplicator entladen, während sie sich in der isolirenden Flüssigkeit oder in Luft befanden, so gab das Verhältniss der Multiplicator-Ausschläge das Verhältniss der Capacitäten des Condensators oder die Dielektricitäts-Constante K.

Schliesslich wurde die obere Condensatorplatte entfernt und durch eine gleich grosse Platte mit einem kurzen verticalen Metallrohr in der Mitte ersetzt, welches mit einem Schwefelkohlenstoff-Manometer und einem langen Kautschukschlauch mit Hahn in Verbindung stand.

Während beide Condensatorplatten zur Erde abgeleitet waren, wurde durch den Kautschuckschlauch trockene Luft in den Raum

---

[1] RIGHI, Memorie dell' accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. (3.) VII. 2. pag. 193. 1876.

[2] Sir WILLIAM THOMSON, Papers on electrostatics and magnetism. pag. 306; Pl. II. Fig. 15.

zwischen den Condensatorplatten geblasen und eine flache Luftblase erzeugt, welche beide Platten in zwei gleich grossen Flächen von 2 bis 5^{cm} Durchmesser berührte. Die Sperrflüssigkeit zeigte dann bei geschlossenem Hahn in beiden Manometerschenkeln eine Höhendifferenz, die stets kleiner als 1^{cm} war und von dem hydrostatischen und capillaren Druck der Flüssigkeit auf die Luftblase abhing.

Wurden beide Platten jetzt auf dieselbe elektrische Potentialdifferenz gebracht, für welche die Gewichte G_1 und G_{11} bestimmt worden waren, so wirkte der durch Gleichung 1. bestimmte elektrische Querdruck im Innern der Flüssigkeit dem elektrischen Querdruck im Innern der Luftblase entgegen und die Höhendifferenz der Sperrflüssigkeit im Manometer nahm zu um eine Grösse h. Diese Zunahme war unabhängig vom Durchmesser der Luftblase und proportional dem Quadrate der elektrischen Potentialdifferenz. Sie schwankte bei den verschiedenen Flüssigkeiten zwischen 0.15^{cm} und 1^{cm}.

Bezeichnet man das specifische Gewicht der Sperrflüssigkeit mit σ, so ist die Differenz des elektrischen Querdrucks auf die Flächeneinheit im Innern der Flüssigkeit und der Luftblase

$$h\sigma = \frac{K_s - 1}{8\pi} \cdot \frac{P^2}{a^2} \qquad 2.$$

Für dieselbe Potentialdifferenz P und denselben Abstand a der Condensatorplatten von der Oberfläche O war früher die Zugkraft $\pm$ den elektrischen Kraftlinien im Innern der Flüssigkeit für die Flächeneinheit gefunden worden

$$\frac{G_{11}}{O} = \frac{K_p}{8\pi} \cdot \frac{P^2}{a^2} \qquad 3.$$

oder durch Division beider Gleichungen

$$K_s = 1 + \frac{h\sigma \cdot O}{G_{11}} \cdot K_p. \qquad 4.$$

Dadurch ist K_s bestimmt, da K_p durch die Wägungen an der elektrischen Wage bekannt ist.

Besondere Versuche zeigten, dass die Grösse der Oberflächenspannung der isolirenden Flüssigkeiten bei längerer Einwirkung elektrischer Kräfte nicht geändert wurde.

Bei derselben Flüssigkeit und derselben Temperatur wurde der Brechungsexponent für die FRAUNHOFER'sche Linie D mit einem STEINHEIL'schen Hohlprisma und einem OERTLING'schen Kreise gemessen, der noch Ablesungen von 2″ gestattete.

Nach MAXWELL[1] sollte die Constante K gleich dem Quadrate des Brechungsexponenten für unendlich lange Lichtwellen sein.

[1] MAXWELL Electricity and magnetism. II. §. 788.

Durch meine im Folgenden zusammengestellten Beobachtungen wird diese Beziehung nicht bestätigt.

Dagegen ist K_p nahezu gleich K_s und stets grösser als K. Eine Ausnahme bildet nur Rapsöl.

No.	Flüssigkeit	Spec. Gew.	bei °C.	Brechungs-exponent n_D	Temp. τ°	Dielektricitäts-Constante bestimmt mit: Condensator-Capacität K	Längs-Druck K_p	Quer-Druck K_s
1.	Äther	1.7205	14.90	1.3605	6.60	3.364	4.851	4.672
2.	Äther (über gebr. Marmor gestanden)	-	-	1.3594	8.37	3.323	4.623	4.660
3.	5 vol. Äther + 1 vol. Schwefelkohlenstoff.	0.8134	16.40	1.4044	8.50	2.871	4.136	4.392
4.	1 vol. Äther + 1 vol. Schwefelkohlenstoff.	0.9966	16.60	1.4955	10.50	2.458	3.539	3.392
5.	1 vol. Äther + 3 vol. Schwefelkohlenstoff.	1.1360	17.40	1.5677	5.30	2.396	3.132	3.061
6.	Schwefel in Schwefelkohlenstoff (19.5 Proc.)	1.3623	12.60	1.6797	8.68	2.113	2.870	2.895
7.	Schwefelkohlenstoff (Kahlbaum)	1.2760	12.20	1.6386	7.50	2.217	2.669	2.743
8.	Schwefelkohlenstoff (Heidelberg)	1.2796	10.20	1.6342	12.98	1.970	2.692	2.752
9.	1 vol. Schwefelkohlenstoff + 1 vol. Terpentinöl	1.0620	17.80	1.5442	10.92	1.962	2.453	2.540
10.	Schweres Benzol (aus Steinkohlentheer)	0.8825	15.91	1.5035	13.20	1.928	2.389	2.370
11.	Reines Benzol (aus Benzoesäure)	0.8822	17.64	1.5050	14.40	2.050	2.325	2.375
12.	Leichtes Benzol	0.7994	17.20	1.4535	11.60	1.775	2.155	2.172
13.	Rapsöl	0.9159	16.40	1.4743	16.41	2.443	2.385	3.296
14.	Terpentinöl	0.8645	17.10	1.4695	16.71	1.940	2.259	2.356
15.	Steinöl	0.8028	17.00	1.4483	16.62	1.705	2.138	2.149

Alle Flüssigkeiten waren so rein, so wenig wasserhaltig und so staubfrei wie möglich und isolirten vortrefflich. Da aber die Beobachtungen einige Zeit in Anspruch nahmen, so verdampfte ein Theil der Flüssigkeit, die Temperatur sank und es condensirte sich beim Öffnen des Wagekastens etwas Wasser auf der Oberfläche der Flüssigkeit, wodurch die Dielektricitäts-Constanten zu gross gefunden wurden. Diese Fehlerquelle war besonders gross bei Äther.

Vier auf einander folgende Bestimmungen bei Äther, der lange Zeit über gebranntem Marmor gestanden hatte und durch ein Fächerfilter möglichst schnell in das Glasgefäss der elektrischen Wage filtrirt wurde, gaben

$$K_p = 4.399 \quad 4.516 \quad 4.739 \quad 4.891.$$

Die in Tabelle IV aufgeführten Zahlen beziehen sich also auf Äther, der schon eine Spur Wasser angezogen hatte.

Um die Änderung der optischen Eigenschaften der Flüssigkeiten durch elektrische Kräfte zu untersuchen, benutzte ich Flüssigkeits-Condensatoren mit ebenen Elektroden oder mit Elektroden, welche

aus zwei concentrischen Cylindern bestanden. Die Elektroden oder Belegungen aus vernickeltem Messing waren durch Flintglasstäbchen von einander und von den durch planparallele Glasplatten geschlossenen weiteren Glasröhren isolirt, welche die möglichst reine und möglichst staubfreie Flüssigkeit enthielten. Durch zwei Seitenröhren gingen die mit Flintglas isolirten Drähte, welche die Elektroden mit der Erde oder mit der inneren Belegung einer grossen Leidener Batterie von acht Flaschen aus Flintglas verbanden. Die Belegungen des Flüssigkeits-Condensators und der Leidener Batterie wurden, wie bei den Versuchen mit der elektrischen Wage mit einer HOLTZ'schen Maschine geladen und auf constanter Potentialdifferenz erhalten, welche mit dem Reflexionselektrometer controlirt und dem Schraubenelektrometer gemessen wurde.

Diese Flüssigkeits-Condensatoren allein oder mit einem von mir bei früheren Untersuchungen benutzten BABINET'schen Compensator[1] zwischen NICOL'sche Prismen gebracht, gestatten die von Hrn. KERR[2] gefundene elektrische Doppelbrechung zu messen.

Nennt man

d den in Wellenlängen gemessenen Gangunterschied, um welchen das $\mp$ der elektrischen Kraftlinie polarisirte Licht gegen das $\perp$ zu der elektrischen Kraftlinie polarisirte Licht beschleunigt ist,

P die elektrische Potentialdifferenz
l die Länge
a den Abstand

} der ebenen Elektroden im C. G. S. System,

so ist nahezu

$$d = B \cdot \frac{l}{100} \cdot \frac{P^2}{a^2} \qquad 7.$$

Die Grösse B nimmt mit wachsender Wellenlänge ab und wird im Allgemeinen um so kleiner gefunden, je grösser die Länge der elektrisirten Flüssigkeit ist. Geringe Beimengungen fremder Substanzen, auch aus der Luft condensirtes Wasser, haben einen bedeutenden Einfluss auf B.

Als Mittel einer grösseren Anzahl von Versuchsreihen mit ebenen Nickelelektroden von 10^{cm}, 20^{cm}, 46^{cm} Länge und 0.1615^{cm} bis 0.3230^{cm} Abstand fand ich für Licht, der FRAUNHOFER'schen Linie D entsprechend, folgende Werthe der Constante B.

---

[1] QUINCKE, Pogg. Ann. 127. S. 206; Taf. I. Fig. 4—5. 1866.

[2] KERR, Phil. Mag. (4) L. p. 337, 446. 1877; (5) VIII. p. 85. 229. 1879; (5) IX. p. 159. 1880.

Grösse der elektrischen Doppelbrechung für verschiedene Flüssigkeiten zwischen ebenen Nickelelektroden mit BABINET'schem Compensator gemessen. (FRAUNHOFER'sche Linie *D*.)

	$B \cdot 10^6$
	λ
Schwefelkohlenstoff (Kahlbaum)	32.798
Schwefelkohlenstoff (Heidelberg)	31.948
3 vol. Schwefelkohlenstoff + 1 vol. Äther	27.252
1 vol. Schwefelkohlenstoff + 1 vol. Äther	19.476
1 vol. Schwefelkohlenstoff + 5 vol. Äther	4.422
Schweres Benzol (aus Stienkohlentheer)	4.460
Reines Benzol (aus Benzoesäure)	3.842
Leichtes Benzol	2.970
Terpentinöl	0.109
Rapsöl	— 2.273
Äther (frisch destillirt)	— 6.400
Äther (über gebranntem Marmor gestanden)	— 6.685
Schwefel in Schwefelkohlenstoff gelöst (19.5 proc.)	32.67

Bei Schwefelkohlenstoff blieb die elektrische Doppelbrechung dieselbe, wenn die Temperatur sich um 10° änderte.

Untersucht man die isolirenden Flüssigkeiten zwischen zwei concentrischen Cylindern mit dem BABINET'schen Compensator, so dass der dunkle Streifen im Compensator ∓ der elektrischen Kraftlinie erscheint, so wird der dunkle Streifen bei dem Elektrisiren der Flüssigkeit um so mehr verschoben, je näher er dem inneren Cylinder liegt. Sehr häufig bildet er dabei eine Curve mit Wendepunkt, die nach verschiedenen Seiten verläuft, je nachdem die Flüssigkeit positive oder negative Doppelbrechung besitzt.

Zuweilen habe ich diesen Wendepunkt auch bei starken elektrischen Kräften zwischen ebenen Elektroden beobachten können.

An der Oberfläche zweier Cylinder mit dem inneren Radius R_1, dem äusseren Radius R_2 und der Länge l ist der Gangunterschied des Lichtes ∓ und ⊥ zu den elektrischen Kraftlinien polarisirt nahezu durch die Gleichungen gegeben

$$d_1 = B_1 \frac{l}{100} \cdot \frac{P^2}{\left(R_1 \log \text{nat.} \frac{R_2}{R_1}\right)^2}$$

$$d_2 = B_2 \frac{l}{100} \cdot \frac{P^2}{\left(R_2 \log \text{nat.} \frac{R_2}{R_1}\right)^2} \qquad 8.$$

B_1 wird meist kleiner, B_2 meist grösser gefunden als die Constante B für ebene Elektroden unter sonst gleichen Verhältnissen. B_1 und B_2

werden im Allgemeinen ebenfalls um so kleiner gefunden, je grösser die Länge der durchstrahlten Flüssigkeitsschicht ist.

Für eine Reihe Flüssigkeiten mit cylindrischen Elektroden von 10 bis 47^{cm} Länge und 0.3^{cm} bis 0.5^{cm} innerem, 0.7^{cm} äusserem Radius erhielt ich als Mittel aus mehreren Versuchsreihen folgende Resultate.

Elektrische Doppelbrechung
verschiedener Flüssigkeiten zwischen cylindrischen Elektroden
mit BABINET'schem Compensator gemessen.
(FRAUNHOFER'sche Linie *D*.)

	$B_1 \cdot 10^6$	$B_2 \cdot 10^6$
	λ	λ
Jod und Schwefelkohlenstoff	53.69	—
1 Th. Schwefel + 4 Th. Schwefelkohlenstoff	28.55	43.05
Schwefelkohlenstoff	22.50	33.65
Schweres Benzol	4.21	6.49
Terpentinöl	3.15	4.55
Steinöl	0.6	—
Rapsöl	— 2.81	— 7.00
Rüböl	— 2.07	—
Äther	— 4.17	— 6.82

Steinöl und Rüböl zeigen je nach der Sorte Öl, welche untersucht wird, starke Schwankungen der elektrischen Doppelbrechung.

Bei einer bestimmten Sorte Steinöl nahm d_1 zuerst zu mit wachsendem P und blieb dann constant, wenn P von 55 C. G. S. bis 72 C. G. S. gesteigert wurde.

Bei Rüböl war der Phasenunterschied des Lichtes $\parallel$ und $\perp$ zu den elektrischen Kraftlinien polarisirt im ersten Augenblick nach dem plötzlichen Auftreten der elektrischen Kräfte grösser, als später. Dabei erschien das Gesichtsfeld längere Zeit, die bis 30 Secunden betragen konnte, verdunkelt.

Der Phasenunterschied besteht also aus einem veränderlichen und einem bei dauernder Einwirkung elektrischer Kräfte constanten Theile. Der erstere scheint von einer ungleichen elektrischen Ausdehnung des Rüböls herzurühren, ähnlich wie ungleichmässige Erwärmung eines Körpers diesen doppelt brechend macht.

Sehr auffallend sind die Erscheinungen der elektrischen Doppelbrechung, wenn aus irgend einem Grunde die elektrischen Kräfte im Innern der isolirenden Flüssigkeit periodischen Schwankungen unterworfen sind und gleichzeitig der dunkle Streifen im BABINET'schen Compensator sich um kleine Strecken verschiebt, oder zuckt. Diese Zuckungen oder Pulsationen erfolgten um so häufiger, je grösser die elektrische Potentialdifferenz der Elektroden war. Bei cylindrischen

Elektroden erschien dann der dunkle Streifen im BABINET'schen Compensator an der inneren und äusseren Cylinderfläche um dieselbe Grösse verschoben. Die Constanten B_1 und B_2 nahmen mit steigender Potentialdifferenz zu und erreichten erst bei hohen Potentialdifferenzen den Werth, den man für gewöhnliche ohne Pulsationen findet.

Dabei entwickeln sich zahlreiche Luftblasen aus der Flüssigkeit und man hört von dem Apparat einen Klirrton, dessen Tonhöhe mit sinkender Potentialdifferenz abnimmt.

Um zu untersuchen, ob der mittlere Brechungsexponent isolirender Flüssigkeiten durch elektrische Kräfte geändert wird, wurden die Flüssigkeits-Condensatoren in einen Interferenzapparat[1] eingeschaltet, bei welchem zwei von zwei gleich dicken Planparallelgläsern reflectirte Strahlenbündel interferiren und ein reines Spectrum mit FRAUNHOFER'chen Linien bilden, das von dunklen Interferenzstreifen durchzogen ist. Das eine Strahlenbündel durchlief die Flüssigkeit innerhalb, das andere ausserhalb der Elektroden.

Bei dem Elektrisiren derselben Flüssigkeit beobachtet man eine Verschiebung der Interferenzstreifen bald im Sinne einer Vergrösserung, bald im Sinne einer Verkleinerung des Brechungsexponenten durch die elektrischen Kräfte. Es laufen gleichsam Ausbiegungen oder Wellen über die Interferenzstreifen fort.

Diese wellenartigen Verschiebungen scheinen auf periodische Entladungen oder auf einen periodischen Wechsel der elektrischen Kräfte im Innern der isolirenden Flüssigkeit zwischen den Elektroden hinzudeuten.

Die Verschiebung im Sinne einer Verkleinerung des Brechungsexponenten entspricht einer Temperaturerhöhung der isolirenden Flüssigkeit um $0°.0001$ bis $0°.1$ C., nimmt mit der elektrischen Potentialdifferenz der Elektroden und der Zähigkeit der Flüssigkeit zu und kann von einer Erwärmung der Flüssigkeit durch Reibung herrühren, indem die Flüssigkeitstheilchen von den elektrischen Kräften zwischen den Elektroden hin- und herbewegt und umgerührt werden.

Die Zunahme des Brechungsexponenten tritt bei einigen Flüssigkeiten nur bei Beginn der elektrischen Einwirkung auf, bei anderen wechselt sie während der ganzen Dauer der elektrischen Einwirkung in kurzen Perioden mit einer Abnahme.

[1] QUINCKE, Pogg. Ann. 132. S. 53 u. Taf II. Fig. 11. 1867.

19. Über eine einfache Methode zur Untersuchung der Thermo-Elektricität und Piezo-Elektricität der Krystalle.

Von A. Kundt
in Strassburg.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 8. März: — gedruckt im Bericht vom 5. April [St. XVI]; — ausgegeben am 12. April.)

Hierzu Taf. IV.

Die genaue Untersuchung der thermo-elektrischen Eigenschaften der Krystalle ist, wie insbesondere die umfassenden Arbeiten Hankel's zeigen, eine sehr mühsame und schwierige Arbeit. Die Ermittelung der Elektricität jedes einzelnen Punktes der Oberfläche mit Hülfe des Elektrometers, um die Vertheilung der Elektricität auf der Gesammtoberfläche zu erhalten, erfordert nicht nur viel Zeit, sondern auch eine Menge von Vorsichtsmassregeln. Von der Thermo-Elektricität der Krystalle unterscheidet Hr. Hankel noch eine Elektricitätserregung, welche durch Strahlen, und zwar hauptsächlich solche geringer Brechbarkeit, hervorgebracht wird, von ihm Actino-Elektricität genannt. Endlich bedingt nach der Entdeckung der HH. Curie bei hemimorphen Krystallen der Druck eine Elektricitätserregung, die Piezo-Elektricität. Die genaue elektrometrische Untersuchung der Actino- und der Piezo-Elektricität bietet im Wesentlichen die gleichen Schwierigkeiten, wie die der Thermo-Elektricität.

Für eine möglichst allseitige Erforschung der Krystalle wäre es sehr erwünscht, eine Methode zu besitzen, welche auf einmal die elektrische Vertheilung auf der ganzen Oberfläche eines Krystalls zur Anschauung brächte, selbst dann, wenn die Methode quantitative Messungen nicht zuliesse. Ich habe eine solche gefunden, die an Einfachheit und Bequemlichkeit der Handhabung Nichts zu wünschen lässt. Die Methode ist die gleiche, welche schon Lichtenberg anwandte, um die Anordnung der positiven und negativen Elektricität auf einem Isolator, auf welchen Elektricität übergeströmt ist, sichtbar zu machen.

In dem Moment, in welchem die durch Temperaturänderung oder durch Druck auf einem Krystall hervorgerufene elektrische Vertheilung

bestimmt werden soll, bestäubt man denselben mit einem Gemenge von Schwefel und Mennige, welches durch ein engmaschiges Sieb von Baumwolle hindurchgesiebt wird. Bekanntlich wird bei diesem Vorgang das Schwefelpulver negativ, die Mennige positiv elektrisch, und ebenso wie bei den LICHTENBERG'schen Figuren setzt sich nun der negative Schwefel auf diejenigen Theile der Krystalloberfläche, welche positiv sind, die Mennige auf die negativen. Die Anordnung der beiden Pulver giebt dann ein sehr anschauliches Bild von der elektrischen Anordnung auf der Oberfläche.

Das angegebene Verfahren ist so einfach und eigentlich so nahe liegend, dass es mir unwahrscheinlich war, dass dasselbe nicht schon angewendet sein sollte. Ich konnte indess in der einschlägigen Literatur keine Andeutung desselben finden. Ich habe zunächst die Methode nur auf eine kleine Zahl von Substanzen anwenden können, nämlich Quarz, Turmalin und Aragonit. Ob auch die Thermo-Elektricität von Krystallen, welche diese nur in sehr geringem Grade zeigen, mit derselben untersucht werden kann, muss ich dahingestellt sein lassen. Die Versuche an den genannten zeigen die grosse Verwendbarkeit derselben für gewisse Substanzen. [Auch Boracit, Zucker und Weinsäure lassen sich, wie inzwischen gefunden wurde, mit der beschriebenen Methode sehr gut untersuchen.]

Zum Belege theile ich einige Versuche mit.

Elektricität durch Druck (Piezo-Elektricität).

Die Elektricitätserregung durch Druck kann sehr bequem am Turmalin und am Quarz beobachtet werden. Prismatische Stücke von Turmalin oder Quarz, in einem Schraubstocke in geeigneter Weise gepresst und nach dem Pressen mit dem Pulvergemenge bestäubt, zeigen deutlich die Vertheilung der Elektricität. Als Beispiel diene eine sechseckige Quarzplatte, die, wie die thermo-elektrische Untersuchung ergab, aus einem durchaus einfachen Quarz senkrecht zur Axe geschnitten ist. Die Verbindungslinien der Ecken fallen sehr nahe mit den drei Nebenaxen des Quarzes zusammen. Presst man die Platte im Schraubstocke in der Richtung *a b*, und bestäubt, so erhält man die Anordnung des Pulvers, wie sie in Fig. 1 gezeichnet ist.

War der Krystall, aus dem die Platte geschnitten wurde, nicht einfach, sondern verwachsen, so erhält man nicht die einfache Anordnung des Pulvers wie in Fig. 1, sondern complicirte, verzerrte Figuren.

Thermo- und Actino-Elektricität.

Bezüglich der Thermo-Elektricität des Quarzes bedarf es einer Vorbemerkung. Hr. HANKEL unterscheidet, wie schon bemerkt, von

der thermo-elektrischen Erregung des Quarzes die actino-elektrische. Letztere soll hervorgebracht werden durch Strahlen geringer Brechbarkeit (Wärmestrahlen), welche den Quarz treffen. Die Unterscheidung ist nach HANKEL nöthig, da eine Stelle des Quarzes, welche beim Erwärmen positiv wird, dann, wenn sie von Strahlen getroffen wird, negative Elektricität zeigt. Da meine Erfahrung in dem fraglichen Gebiet nicht ausreicht, um in jedem Fall zu entscheiden, welcher Theil der Elektricitätserregung, die ein Krystall zeigt, durch Temperaturänderung, welcher durch Bestrahlung (nach HANKEL) bedingt ist, so will ich einfach die Versuche beschreiben und dabei ganz unentschieden lassen, ob die Elektricität, welche die Pulver geben, als Thermo- oder Actino-Elektricität zu bezeichnen ist.

Setzt man auf die Mitte der Quarzplatte, welche bei Druck die Fig. 1 giebt, einen runden Messingcylinder, der bis etwa 150° erhitzt ist, so erhält man beim Bestäuben Fig. 2. Die entgegengesetzte Elektricität der auf einander folgenden Enden der hemimorphen Axen tritt sehr deutlich hervor, und zwar zeigt ein Ende, welches bei Druck positiv wird, bei Erwärmen durch den Messingcylinder negative Elektricität. Nach HANKEL würde in Folge dessen die durch den aufgesetzten Messingcylinder erzeugte Elektricität nicht als Thermo-, sondern als Actino-Elektricität aufzufassen sein.

Verfährt man in gleicher Weise mit einer Quarzplatte, welche aus einem nicht einfachen, sondern verwachsenen Krystall geschnitten ist, so erhält man verzerrte Figuren, welche bis zu einem gewissen Grade die Verwachsungen erkennen lassen, Fig. 3 zeigt eine solche Figur. Die benutzte Platte erwies sich optisch als völlig homogen. Die Methode giebt also ein ganz bequemes Mittel, zu untersuchen, ob eine Quarzplatte aus einem einfachen Krystall stammt oder nicht. [Statt den Messingcylinder auf die Platte zu setzen, ist es, wie sich nachträglich zeigte, vortheilhafter, letztere auf die Endfläche des Cylinders zu legen und die obere Seite zu bestäuben, da alsdann die Staubfigur die ganze Platte bedeckt.] Will man die Vertheilung der Elektricität auf einem ganzen Quarzkrystall untersuchen, so geschieht dies am besten, indem man den auf etwa 100° erwärmten Krystall in einem Raum von möglichst niederer Temperatur abkühlen lässt. Zu dem Zwecke wurde in ein grösseres Gefäss, welches mit einer Kältemischung aus Eis und Kochsalz gefüllt war, ein kleines Metallgefäss gesetzt. Der erwärmte Krystall wird in dieses Metallgefäss gelegt oder gestellt und dann wird bestäubt.

Bei einfachen Quarzkrystallen häuft sich die Mennige und der Schwefel abwechselnd auf den Prismenkanten an; die meisten Quarze zeigen aber ein ausserordentlich complicirtes Verhalten. Die Pulver

ordnen sich in vielfachen, geraden oder gekrümmten Streifen an, entsprechend den Verwachsungen des Quarzes.

Die Pulverfiguren, die man erhält, sind oft ausserordentlich verwickelt und zierlich.

Die Turmaline, die ich untersuchte, hatten meistens nur ein ausgebildetes Ende. Diejenigen von Snarum in Norwegen zeigten sich wenig elektrisch beim Abkühlen: Krystalle von Mursinsk in Sibirien gaben beim Bestäuben in geringem Maasse an einem Ende Anhäufung der Mennige, an anderen des Schwefels: zwei dunkle Turmaline aus Brasilien zeigten beim Bestäuben während des Abkühlens in der Luft sehr schön den analogen und antilogen Pol. Ausserdem setzten sich die Pulver auch zuweilen auf den Prismenflächen in mehr oder minder regelmässiger Weise ab.

Das verschiedene Verhalten der Turmaline führte mich dazu, einige Krystalle senkrecht zur Axe zu durchschneiden und die Schnittflächen zu untersuchen.

Zwei Krystalle von Snarum gaben auf den Schnittflächen keine bestimmte Anordnung des Pulvers. Krystalle von Mursinsk zeigten aber auf den Schnittflächen senkrecht zur Axe ein sehr complicirtes Verhalten. Ein Stück eines solchen Krystalls mit einer Schnittfläche einen kurzen Moment in der Flamme erwärmt, gab die in Fig. 4 gezeichnete Anordnung des Pulvers. Man sieht, dass in die im allgemeinen negativ rothe Fläche ein feines Geäder positiver Stellen eingefügt ist. Man muss daraus wohl auf eine sehr complicirte Verwachsung des Krystalls schliessen, indem eine sehr grosse Zahl einzelner Krystalle mit entgegengesetzt gerichteten Polen durch einander gewachsen sind.

Andere Schnitte senkrecht zur Axe von anderen Krystallen verhielten sich ähnlich. Einfacher erwies sich ein brasilianischer Turmalin, der beim Abkühlen sehr starke Elektricität an den Enden gab. Senkrecht zur Axe durchschnitten zeigten die beiden Schnittflächen die in Fig. 5 gezeichneten Pulveranordnungen. Man sieht, dass in den homogenen Krystall nur einige kleine Stellen mit umgekehrten Polen eingesprengt sind.

Die beschriebenen Versuche legen die Vermuthung nahe, dass nur solche Turmaline an den Enden starke Thermo-Elektricität zeigen, welche möglichst wenig durchwachsen sind; doch bedarf es zum Beweise hierfür eines grösseren Beobachtungsmaterials. Ich lasse zur Zeit in meinem Laboratorium eine grössere Zahl Turmaline möglichst genau untersuchen.

Die durch das Pulvergemisch an einigen Krystallen von brasilianischem Topas gefundene Elektricitätsanordnung stimmte im Wesent-

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Lith. von Laue.

Kundt: Untersuchung der Thermo- und Piezo-Electricität der Krystalle

lichen gut mit der von Hrn. HANKEL für dies Mineral gefundenen überein.

Die Pulverfiguren, die man auf den Krystallen erhält, lassen sich, selbst wenn die Anordnung der Pulver sehr complicirt ist, leicht auf ein mit etwas Gummi bestrichenes Papier abziehen. Die Figuren 1 bis 5 sind nach solchen Abklatschen gefertigt.[1]

Ich glaube, die mitgetheilten Resultate zeigen zur Genüge, dass die neue Methode bei weiterer Benutzung und eventueller Verbesserung in den Händen des Physikers, wie des Mineralogen und Krystallographen noch manche Aufschlüsse über das elektrische Verhalten der Krystalle geben kann.

Ich werde später ausführliche Versuche wenigstens bezüglich einiger krystallisirter Substanzen veröffentlichen.

[1] Eine Reihe anderer Abdrücke wurden zur weiteren Erläuterung des oben Gesagten in der Sitzung am 8. März vorgelegt.

20. Über ein Verfahren elektrische Widerstände unabhängig von Zuleitungswiderständen zu vergleichen.

Von F. Kohlrausch
in Würzburg.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 29. März: — gedruckt im Bericht vom 12. April [St. XVIII]; — ausgegeben am 19. April.)

Wenn die Bedeutung der obigen Aufgabe im Allgemeinen schon nicht näher begründet zu werden braucht, so erscheint dies um so weniger nöthig in einem Augenblicke, in welchem die Copirung von Quecksilberwiderständen von erhöhter Bedeutung ist. Diese Arbeit würde durch eine von Übergangswiderständen ganz unabhängige Vergleichsmethode in mehrfacher Hinsicht erleichtert werden, sowohl was die Gestalt und die Dimensionen der Quecksilbersäule als was das Material der Elektroden betrifft.

Ausser den elektrostatischen Methoden, welche für die feinsten Widerstandsmessungen nicht empfindlich genug sind, arbeitet meines Wissens nur das von Matthiessen und Hockin auf kurze Drähte angewandte sinnreiche Verfahren von Übergangswiderständen ganz unabhängig. Aber auch hier dürfte die für fundamentale Aichungen geforderte Genauigkeit kaum zu erreichen sein, da zur Messung Hülfsgrössen eingeschoben werden und da die Beobachtungen aus mehreren Theilen bestehen, welche verschiedene Manipulationen und Zeit beanspruchen.

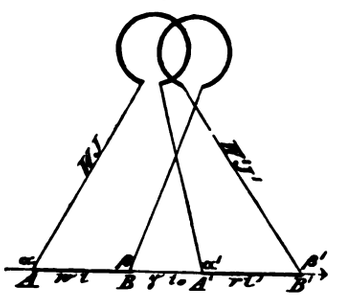
Die von W. Thomson gegebene werthvolle Modification der Wheatstone'schen Brücke für kleine Widerstände lässt den Einfluss von Zuleitungswiderständen bekanntlich sehr klein werden. Dieselben Dienste kann, wie Hr. Kirchhoff gezeigt hat, in einfacherer Weise das Differentialgalvanometer leisten, wenn man die Multiplicatoren gegen- und hintereinander schaltet. Hr. Kirchhoff hat dabei ein Verfahren entwickelt und angewandt, welches mit einfachen Mitteln sogar ungleiche sehr kleine Widerstände mit einander scharf vergleichen lässt.[1]

[1] G. Kirchhoff, Monatsber. d. Berl. Akad. 1880, S. 601 und Wied. Ann. 13, S. 410. Vergl. auch Dieterici, Wied. Ann. 16, S. 234, 1882. Auf die Hintereinanderschaltung hat unter anderen Gesichtspuncten zuerst Heaviside hingewiesen, Phil. Mag. (4) 45 p. 245, 1873.

Die vorliegende Mittheilung betrifft eine äusserlich geringfügige Abänderung der Hintereinanderschaltung des Doppelmultiplicators, welche man den übergreifenden Nebenschluss nennen kann und durch welche nun die Zuleitungswiderstände vollkommen eliminirt werden. Das Verfahren arbeitet sehr rasch und genau. Man wird unten ein Beispiel finden, in welchem sehr kleine Widerstände mit einer Genauigkeit bis auf Hunderttausendtel ihres Betrages, nämlich bis auf Zehnmilliontel der Siemens'schen Einheit verglichen werden.

I. Widerstandsvergleichung mittels übereinandergreifender Abzweigungen durch das Differentialgalvanometer.

Fig. 1.



Wir schalten die zu vergleichenden Widerstände w und r zwischen A und B bez. A' und B' in dieselbe Stromleitung ein. Abzweigungen dieses Hauptstromes werden in entgegengesetzter Richtung durch die beiden Hälften eines Differentialmultiplicators von grossem Widerstande geführt, aber so, dass die Anfangspuncte A und A' des Stromes in beiden Widerständen mit dem einen, die Endpuncte B und B' mit dem anderen Multiplicator verbunden seien, so dass also das Verbindungsstück BA' auf beiden Seiten mit gemessen wird.

Der Widerstand dieses Mittelstückes heisse γ, derjenige der Multiplicatorhälften bez. W und W'; $\alpha\,\beta\,\alpha'\,\beta'$ seien die unbekannten Übergangswiderstände. Die Stromstärken in w, γ und r mögen i, i_0 und i' heissen, diejenigen in den Multiplicatoren J und J'.

Setzen wir zunächst die beiden Multiplicatoren bezüglich ihres Widerstandes $W = W'$ und ihrer Lage gegen die Nadel als ganz gleich voraus; dann sagt die Ruhe der Nadel bei dem Stromschluss aus:

$$J = J' \quad \text{also auch} \quad i = i'; \quad \text{ferner:}$$

$$wi + \gamma i_0 = (W + \alpha + \alpha')\,J; \quad ri + \gamma i_0 = (W + \beta + \beta')\,J$$

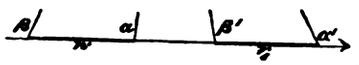
worin $$i_0 = i - J.$$

Hieraus findet sich

$$\frac{w+\gamma}{r+\gamma} = \frac{W+\gamma+\alpha+\alpha'}{W+\gamma+\beta+\beta'}. \qquad \text{I.}$$

Nun werden die Verbindungen so vertauscht aber ohne an den Zuleitungen zu den Multiplicatoren etwas zu ändern, dass die Puncte,

Fig. 2.



welche vorher die inneren bildeten, die äusseren werden und umgekehrt, so dass jetzt auch die Übergangswiderstände α und β' von ihrer äusseren Lage nach innen kommen und umgekehrt. Wir nehmen an, dass wir einen der Widerstände, z. B. r um kleine bestimmte Beträge abändern können (vergl. unter 4). Es sei jetzt derjenige Widerstand, welcher mit w zusammen den Ausschlag Null der Nadel ergibt, gleich r_1. Dann ist wie oben

$$\frac{w+\gamma}{r_1+\gamma} = \frac{W+\gamma+\beta+\beta'}{W+\gamma+\alpha+\alpha'}. \qquad \text{II.}$$

Aus I. und II. folgt unter Wegfall aller Übergangswiderstände

$$w+\gamma = \sqrt{(r+\gamma)(r_1+\gamma)}.$$

Sind nun r und r_1 nur wenig verschieden, so kann man anstatt des geometrischen Mittels das arithmetische nehmen und hat

$$w = \frac{1}{2}(r+r_1).$$

(Der dabei begangene relative Fehler beträgt $\frac{1}{2}\left(\frac{r-r_1}{r+r_1}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{r-r_1}{w}\right)^2$ und ist, wenn $r-r_1$ etwa $= 0.01\,w$, was ziemlich hoch gegriffen ist, practisch zu vernachlässigen.)

Man hat also in einfachster Weise zwei Bestimmungen mit ausgewechselten Verbindungen vorzunehmen und das arithmetische Mittel gleich dem gesuchten Widerstande zu setzen.

II. Herstellung des Differentialmultiplicators.

Für lange feine Drähte einen constanten Querschnitt zu erzielen, scheint sehr schwierig zu sein, wahrscheinlich weil die Ziehlöcher sich abnutzen. Selbst bei Draht (von OBERMAIER in Nürnberg) der angeblich durch Diamantlöcher gezogen war, fanden sich Differenzen des Widerstandes beider Hälften bis gegen 10 Procent.

Eine Schwierigkeit erwächst hieraus nicht, denn nach der Herstellung des Doppelmultiplicators verbindet man mit dem einen Theile constant einen ausgleichenden Widerstand in Gestalt einer bifilar gewickelten Rolle aus derselben Drahtsorte (vergl. noch unten).

Was zweitens die Gleichheit der Wirkungen desselben Stromes in beiden Hälften auf die Nadel betrifft, so ist diese genügend nahe zu erreichen, wenn man in bekannter Weise die beiden Drähte mit einander auf den Rahmen auflaufen lässt. Weil bei raschem Wickeln

die Drähte gern etwas aus einander laufen, wodurch also zwei Multiplicatoren entstehen würden, welche gegen einander verschoben sind. so gebraucht man die Vorsicht, in regelmässigen Intervallen, d. h. nach je einigen hundert Umwindungen, die Drahtrollen, von denen man abwindet, in Bezug auf links und rechts auszuwechseln.

Hr. Dr. Strecker hat so ohne Mühe einen Doppelmultiplicator aus 0.15^{mm} dickem doppelt besponnenen Kupferdraht von zweimal 3000 Windungen hergestellt, der keinen merklichen Contact zwischen beiden Theilen besass und dessen eine Hälfte nur etwa um $^1/_{200}$ stärker auf die Nadel wirkte als die andere. Rahmen und Nadel sind angeordnet, wie ich vor kurzem beschrieben habe.[1]

Nimmt man sich zu dem Aufwinden Zeit, so kann man die Gleichheit noch weiter treiben. Es ist dies aber nicht nöthig, denn man kann die Ausgleichung durch den Widerstand vornehmen. Hierin zeigt sich ein fernerer Vortheil der Anordnung des Differentialgalvanometers von grossem Widerstande als Nebenschliessung.

Denn unsere Aufgabe ist, dass der Doppelmultiplicator keinen Ausschlag gebe, wenn die Potentialdifferenz an beiden Paaren von Endpuncten gleich gross ist. Um dem Instrument diese Eigenschaft zu geben, verzweigen wir also den Strom einer Säule direct durch beide Hälften in entgegengesetztem Sinne und fügen der einen Hälfte so viel Widerstand hinzu, dass der Ausschlag Null wird.

Streng genommen darf man die Angaben eines so justirten Differentialmultiplicators nur dann als richtig ansehen, wenn die zu vergleichenden Widerstände gegen diejenigen der Multiplicatoren verschwinden. Betragen die letzteren übrigens, wie bei uns, etwa 700 Q. E., so würden bei dem oben genannten Unterschied beider Multiplicatorfunctionen um $^1/_{200}$ selbst Stücke von je 10 Q. E. bis auf weniger als 0.001 Q. E. genau bestimmt werden.

Im folgenden soll nun noch nachgewiesen werden, wie man die Fehler, welche von beliebigen aber kleinen Ungleichheiten der Multiplicatoren herrühren, einfach durch den Versuch selbst eliminirt.

III. Elimination von Ungleichheiten des Differentialgalvanometers.

Bei jeder Widerstandsvergleichung lassen sich bekanntlich Ungleichheiten der Anordnung dadurch eliminiren, dass man die zu vergleichenden Widerstände auswechselt, so wie bei einer Doppelwägung

[1] Wied. Ann. 15 S. 554. 1882.

die Gewichte. Die ausgewechselten Widerstände sind gleich, wenn die Einstellung des Galvanometers ungeändert bleibt.

So einfach dieses Verfahren im Princip ist, bieten sich doch bei der Ausführung einige Übelstände. Denn da die Umlegung des Commutators nicht ohne Zeitverlust, nicht ohne Unterbrechung oder einseitige Schlüsse geschehen kann, so handelt es sich thatsächlich nicht nur um eine plötzliche Beobachtung, ob keine Änderung eintritt, sondern man muss zwei Einstellungen beobachten und sehen, ob dieselben gleich sind. Das langweilige Probiren, welches aus der wörtlichen Befolgung dieser Vorschrift entspringt, lässt sich allerdings durch ein Interpolationsverfahren vermeiden. Aber es bleibt ein anderer Übelstand, nämlich der mit diesen Beobachtungen verbundene längere Stromschluss mit seinen Fehlerquellen der Erwärmung. Um diese zu vermeiden habe ich deswegen früher kurze Inductionsstösse constanter Wirkung im Differentialgalvanometer angewandt,[1] was aber zu einer längeren Beobachtungsreihe und Rechnung führte.

Es gewährt daher grossen Vortheil, dass die Nullmethode beibehalten werden kann. Die kleinen Ungleichheiten eliminiren sich nämlich von selbst, indem wir ja bei unserem Verfahren (S. 466, 467 Fig. 1 und 2) nicht nur die Eintritts- und Austrittspuncte des Stromes in die beiden Widerstände w und r, sondern zugleich w und r gegen die beiden Galvanometerzweige auswechseln. Einer der beiden Widerstände, etwa r, möge wie oben kleine bekannte Änderungen gestatten. Über die Anordnung vergl. No. 4.

Bleibt dann die Nadel in Ruhe, wenn neben w das eine Mal r, das andere Mal r_1 eingeschaltet ist, so ist wieder[2]

$$w = \frac{1}{2}(r + r_1).$$

---

[1] Pogg. Annalen 142, S. 418. 1871.

[2] Dies ist für sehr kleine Änderungen ohne weiteres klar; um den zulässigen Betrag der letzteren zu erkennen, wollen wir den vollständigen Ausdruck ableiten.

Die beiden Galvanometerzweige (Fig. 1 S. 466) mögen den Widerstand W bez. $W' = W + \delta$ haben. Die beiden Galvanometerfunctionen mögen im Verhältnisse $1 : 1 + \sigma$ stehen, so dass die Ruhe der Nadel die beiden Stromstärken J und $J(1 + \sigma)$ anzeigt. $\alpha\beta\alpha'\beta'$ seien wieder die zu eliminirenden Übergangswiderstände.

Dann ist also bei der ersten Verbindung

$$(W + \alpha + \alpha')J = wi + \gamma i_0;\ (W + \delta + \beta + \beta')J(1 + \sigma) = ri' + \gamma i_0.$$

$$\text{wo} \quad i_0 = i - J(1 + \sigma) = i' - J.$$

Hieraus findet man

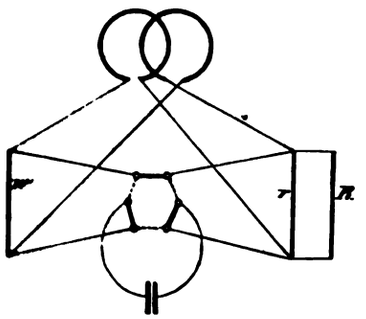
$$\frac{w + \gamma}{r + \gamma} = \frac{W + \alpha + \alpha' + \gamma(1 + \sigma)}{(W + \delta + \beta + \beta' + \gamma)(1 + \sigma) + r\sigma}. \qquad \text{I.}$$

Nach dem Umschalten wird ebenso erhalten

$$\frac{w + \gamma_1}{r_1 + \gamma_1} = \frac{(W + \delta + \beta + \beta')(1 + \sigma) + \gamma_1}{W + \alpha + \alpha' + \gamma_1 - r_1\sigma}. \qquad \text{II.}$$

IV. Ausführung.

Fig. 3.



1. Commutator. Um die Verbindungen bequem und sicher zu wechseln, dienen sechs Quecksilbernäpfe, von denen man je drei Paare überbrücken kann. Die in der Figur ausgezeichnete Überbrückung lässt die unteren Abzweigungspuncte der Widerstände als äussere auftreten, die punctirte macht dieselben zu inneren. Die beiden Paare von Zuleitungsdrähten zum Commutator hat man von gleichem Widerstande zu nehmen.

2. Die nothwendigen kleinen Abänderungen eines der zu vergleichenden Widerstände bildet man dadurch, dass man an den grösseren von beiden einen gewöhnlichen Stöpsel-Rheostaten R als Nebenschliessung anlegt, so wie z. B. schon Rayleigh gethan hat,[1] wobei vorausgesetzt ist, dass der Betrag von r genähert bekannt sei. Bei der Copirung von Quecksilberwiderständen werden höchstens Stücke von wenigen Einheiten gebraucht werden. Überhaupt wird die Methode vorwiegend auf kleine Widerstände angewandt werden. In diesem Falle reicht die gebräuchliche Form der Stöpsel-Rheostaten bis zu 10000 unter allen Umständen aus; denn wenn durch Zufall eine Ungleichheit von weniger als einigen Zehntausendteln vorläge, so kann

Wir haben hier γ_1 statt früher γ gesetzt, also angenommen, dass der Widerstand des Verbindungsstückes sich bei dem Umschalten ändere, um zu untersuchen, wie weit man hierauf Rücksicht nehmen muss.

Multipliciren wir I mit II, so erhält das Product rechts die Form

$$\frac{W+x}{W+x_1}\,\frac{W+y}{W+y_1} \text{ oder } 1+\frac{x-x_1+y-y_1}{W},$$

insofern $x\ldots$ gegen W klein sind. So bekommen wir einfach

$$\frac{(w+\gamma)(w+\gamma_1)}{(r+\gamma)(r_1+\gamma_1)}=1+\frac{r_1-r}{W}\sigma.$$

Das Correctionsglied, dessen Zähler das Product aus zwei sehr kleinen Grössen und dessen Nenner gross ist, wird gegen Eins vernachlässigt und man hat

$$(w+\gamma)(w+\gamma_1)=(r+\gamma)(r_1+\gamma_1).$$

Hieraus findet man unter Vernachlässigung höherer Glieder

$$w=\frac{r+r_1}{2}\left[1-\frac{(r-r_1)(\gamma-\gamma_1)+\frac{1}{2}(r-r_1)^2}{(r+r_1)^2+(r+r_1)(\gamma+\gamma_1)}\right].$$

Setzt man z. B. $r-r_1=0.01$, $\gamma-\gamma_1=0.01$, $w=1$, so beträgt das Correctionsglied weniger als [illegible]

[1] Phil. Trans. Roy. Soc. 1882 II, p. 679.

man durch eine kleine Temperaturänderung von einem der Vergleichsstücke nachhelfen.

3. Anwendung auf Quecksilberwiderstände. Wenn es gelingt in die Glasröhre, ohne Beeinträchtigung ihrer Gestalt, seitlich einen Platindraht oder eine sonstige Zuleitung einzuführen, so kann einfach die mit Quecksilber gefüllte Röhre gebraucht werden, indem man ausserhalb der Platindrähte den Hauptstrom zu- und ableitet. Nimmt man die gewöhnlich gebrauchte SIEMENS'sche Form, nämlich die Röhre, welche beiderseitig mit den Endpuncten in Gefässe hineinragt, so müssen die Abzweigepuncte nach dem Differentialgalvanometer so weit von der Röhrenmündung abstehen, dass einige Millimeter Unsicherheit in der Stellung keinen Einfluss haben. Es hat keine Schwierigkeit, den Widerstand, welcher zwischen der Rohrmündung und der Äquipotentialfläche der Ableitung liegt, hinreichend genau zu schätzen. Haben aber die Hauptelektroden eine Oberfläche von einigen Quadratcentimetern, so kann man ohne merklichen Fehler einfach den Ausbreitungswiderstand des Stromes in das Quecksilbergefäss zu dem Widerstand der Röhre zurechnen.[1] Da Übergangswiderstände herausfallen, so kann man alle Elektroden aus Platin herstellen.

4. Thermoströme. In Bezug auf Fehler durch thermoelektromotorische Kräfte ist die obige Anordnung so günstig wie sie nur sein kann; denn in den zu vergleichenden Widerständen werden die Ströme bei der Umschaltung gewendet, in den Galvanometerzweigen aber behalten sie ihre Richtung bei.

5. Extraströme dagegen würden, wenn man mit momentanem Stromschluss arbeiten will, Schwierigkeiten bieten. Wollte man die Methode also z. B. gebrauchen, um die Spulen, welche zur absoluten Widerstandsbestimmung gedient haben, unmittelbar mit Quecksilber zu vergleichen (was übrigens kaum rathsam wäre), so gibt es kein anderes Mittel, als entweder mit längerem Stromschluss zu arbeiten oder die Spulen aus zwei miteinander gewundenen Drähten bestehen zu lassen, die man dann gegeneinander einschaltet. Diese Trennung des Spulendrahtes empfiehlt sich, wie ich an einem anderen Orte bemerkt habe, allerdings auch aus sonstigen Gründen.[2]

V. Versuche mit Quecksilber.

In der eben beschriebenen Weise wurde der Widerstand w einer Quecksilbersäule mit einem Neusilberdrahte verglichen, welcher selbst

[1] KIRCHHOFF l.c.; MAXWELL, Lehrb. d. Elektr., übers. von WEINSTEIN. I S. 447. 1883.
[2] WIED. Annalen 18 S. 514. 1883.

1.4 Q.E. besass und ein wenig grösser war als der Widerstand der Quecksilbersäule. Die Ausgleichung geschah mit Hülfe eines Stöpsel-Rheostaten, der dem Neusilberdraht als Nebenschluss beigegeben wurde.

Die Beträge dieses Rheostaten, bei denen die Galvanometernadel bei momentanem Stromschluss in Ruhe blieb, sollen mit R bezeichnet werden, dann ist

$$r = \frac{1.4 \cdot R}{1.4 + R}.$$

Um die Übereinstimmung zu prüfen, wurden mehrere Abwechslungen eingeführt:

1. gab ein zweiter Commutator von zwei mal vier Quecksilbernäpfen mit vier überbrückenden Drähten von der Anordnung XII die Möglichkeit, die Galvanometerhälften gegenüber den Widerständen w und 1.4 auszuwechseln. Die beiden Stellungen des letzteren Commutators werden mit A und B bezeichnet, während I und II die beiden Stellungen des Umschalters der Widerstände gegen das Element (1 Smee) bedeuten. Man erhielt so

Temperatur Quecksilber	Temperatur Neusilber	Commutatoren	R	$\frac{1.4 \cdot R}{1.4 + R}$	$w = \frac{r + r_1}{2}$
17°18	18°00	A I	104.9 Q.E.	$r = 1.38156$	1.38324
		A II	128.7 »	$r_1 = 1.38493$	
		B I	128.4 »	$r = 1.38490$	1.38327
		B II	105.4 »	$r_1 = 1.38164$	

2. Man schaltete in die eine Ableitung vom Quecksilber einen Übergangswiderstand von etwa 2 Q.E. ein.

17°13	17°96	A I	128.5 Q.E.	$r = 1.38491$	1.38323
		A II	104.9 »	$r_1 = 1.38156$	
		B I	167.4 »	$r = 1.38839$	1.38328
		B II	88.4 »	$r_1 = 1.37818$	

Die Übereinstimmung ist eine vollständige zu nennen.

3. Im Vorigen fanden die Abzweigungen vom Quecksilber nach dem Differentialgalvanometer mittels Platinblechstreifen von 5^{mm} Breite statt, welche in die Quecksilbergefässe eintauchten. An denselben Ort (etwa mitten zwischen die 4^{qcm} grossen Elektroden und die von diesen letzteren etwa 15^{mm} weit abstehenden Mündungen der Röhren in die Gefässe) wurden statt der Blechstreifen Drahtspitzen gebracht, die aus Glasröhrchen hervorragten. Die hiermit erhaltenen Resultate sind unten mit einem × bezeichnet.

4. Es wurden auch die Stromstärken gewechselt, was ausser auf die Grösse der Ausschläge keinen merklichen Einfluss hatte.

So wurden, theilweise an verschiedenen Tagen, mehrere Versuchsreihen angestellt. ×× bedeutet, dass der künstliche Übergangswiderstand eingeschaltet worden war.

Um der unmittelbaren Vergleichbarkeit willen sollen die gefundenen Resultate mit dem von Hrn. STRECKER bestimmten Temperaturcoefficienten 0.00064 des betreffenden Neusilberdrahtes auf gleiche Temperatur (16°) des letzteren reducirt angegeben werden. w_{16} gibt dann die Widerstände der Quecksilbersäule auch bei 16° reducirt mit dem von RINK angegebenen[1] Temperaturcoefficienten 0.00094.

	Temp. des *Hg*	w_t	w_{16}
	$t = 18°.20$	1.3865	1.3837
	18.19	1.3866	1.3837
	17.20	1.3850	1.3834
××	17.20	1.3851	1.3835
	17.18	1.3851	1.3835
××	17.13	1.3850	1.3835
××	14.18	1.3813	1.3836
	14.19	1.3813	1.3836
×	14.18	1.3812	1.3835
×	14.19	1.3811	1.3835
×	14.06	1.3810	1.3835

Die grössten Abweichungen vom Mittel betragen etwa $^1/_{10000}$ des Ganzen und würden vielleicht noch kleiner ausfallen, wenn die Verhältnisse mit aller Sorgfalt vorbereitet werden.

VI. Vergleichung sehr kleiner Widerstände.

Ich habe endlich noch den Versuch gemacht, die Methode auf sehr kleine Widerstände anzuwenden. Dazu dienten drei gleiche Stücke Neusilberdraht von 0.19^m Länge, 1.4^{mm} Durchmesser, welche je nahe 0.01 Q. E. darstellten. Diese Drähte waren in je zwei 3.5^{mm} dicke Kupferdrähte von 5^{cm} Länge eingelöthet. Endklemmen führten den Strom in die Kupferdrähte ein; die zu vergleichenden Widerstände waren abgegrenzt durch kleine an die dicken Kupferdrähte seitlich angelöthete dünnere Drähte, von denen aus die Abzweigungen nach

[1] Beiblätter 2 S. 277, 1878.

sein muss. Bedeuten nun ferner σ, τ beliebige complexe Grössen, w_1, w_2 aber solche, für die der reelle Theil von $w_1 i$ und $w_2 i$ negativ wird, und setzt man zur Abkürzung:

$$(4\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2 (w_1 + w_2)\pi i} \cdot \frac{\vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2)}{\left(\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{1}{3}}}$$

gleich

$$\Delta(\sigma, \tau, w_1, w_2),$$

so wird:

$$\Delta(\sigma, \tau, w_1, w_2) = e^{\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)(w_1 + w_2)\pi i} \prod_{\alpha, \varepsilon, n} \left(1 - e^{2(n w_\alpha + \varepsilon\tau w_\alpha \pm \varepsilon\sigma)\pi i}\right).$$

Die Multiplication ist hier auf die Werthe $\alpha = 1, 2$ und $\varepsilon = +1, -1$ und für $\varepsilon = +1$ auf die Werthe $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, für $\varepsilon = -1$ aber nur auf die Werthe $n = 1, 2, 3, \ldots$ zu erstrecken; das obere oder untere Zeichen bei $\pm \varepsilon\sigma$ gilt, je nachdem $\alpha = 1$ oder $\alpha = 2$ ist. Geht man zu den Logarithmen über, so kommt:

$$\log \Delta(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)(w_1 + w_2)\pi i + \sum_{\alpha, \varepsilon, n} \log\left(1 - e^{2(n w_\alpha + \varepsilon\tau w_\alpha \pm \varepsilon\sigma)\pi i}\right),$$

und die Summation ist hier auf die Werthe

$$\alpha = 1, 2;\ \varepsilon = 1;\quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$\alpha = 1, 2;\ \varepsilon = -1;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

zu erstrecken.

Beschränkt man jetzt die Grössen σ, τ durch die Bedingung, dass der reelle Theil von $(n w_\alpha + \varepsilon\tau w_\alpha \pm \varepsilon\sigma) i$ für beide Werthe $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ negativ sein soll, so ist die Reihenentwickelung

$$\log\left(1 - e^{2(n w_\alpha + \varepsilon\tau w_\alpha \pm \varepsilon\sigma)\pi i}\right) = -\sum_m \frac{1}{m} e^{2m(n w_\alpha + \varepsilon\tau w_\alpha \pm \varepsilon\sigma)\pi i} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

zulässig, und für den Logarithmus links ist derjenige zu nehmen, dessen absoluter Betrag möglichst klein ist. Da für $\varepsilon = +1$ der kleinste Werth von n gleich Null, für $\varepsilon = -1$ aber gleich Eins ist, so ist die einschränkende Bedingung für σ, τ dahin zu formuliren, dass die reellen Theile der vier Grössen

$$(\tau w_1 + \sigma) i\ ,\ w_1 i - (\tau w_1 + \sigma) i\ ,\ (\tau w_2 - \sigma) i\ ,\ w_2 i - (\tau w_2 - \sigma) i$$

negativ sein müssen. Wird nun noch die Bedingung hinzugenommen, dass τ reell, nicht negativ und kleiner als Eins sei, so ist

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_n \frac{e^{2n\tau\pi i}}{n^2} = \tau^2 - \tau + \frac{1}{6} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

und man erhält für $\log \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ folgenden Ausdruck:

$$\frac{(w_1+w_2)i}{2\pi}\sum_{n_0}{}'\frac{e^{2n_0\tau\pi i}}{n_0^2} - \lim_{k=\infty,h=\infty}\lim\sum_{\alpha,\varepsilon,m,n}{}'\frac{1}{m}e^{2m(nw_\alpha+\varepsilon\tau w_\alpha\pm\varepsilon\sigma)\pi i}.$$

($n_0 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; $\alpha = 1, 2$; $\varepsilon = +1, -1$; $m = 1, 2, \ldots h$; $n = 1, 2, \ldots k$ und $n = 0$ für $\varepsilon = +1$)

Führt man in dem zweiten Theile dieses Ausdrucks zuerst die Summation in Beziehung auf n aus, so geht derselbe in folgenden über:

$$-\lim_{k=\infty,h=\infty}\lim\sum_{\alpha,\varepsilon,m}{}'\frac{e^{2\varepsilon m(\tau w_\alpha\pm\sigma)\pi i}}{\varepsilon m}\cdot\frac{1-e^{2kmw_\alpha\pi i}}{1-e^{2\varepsilon mw_\alpha\pi i}}.$$

Hierin ist unter dem Summenzeichen die Grösse $e^{2kmw_\alpha\pi i}$ mit dem Ausdrucke

$$\frac{e^{2m(\tau w_\alpha\pm\sigma)\pi i}+e^{2m(w_\alpha-\tau w_\alpha\mp\sigma)\pi i}}{m(1-e^{2mw_\alpha\pi i})}$$

multiplicirt; da nun die auf alle Werthe von $m = 1, 2, 3, \ldots$ erstreckte Summe dieser Ausdrücke vermöge der Bedingung, dass die reellen Theile von

$$w_\alpha i, (\tau w_\alpha \pm \sigma)i, (w_\alpha - \tau w_\alpha \mp \sigma)i$$

negativ sein sollen, einen endlichen Werth hat, der Factor $e^{2kmw_\alpha\pi i}$ aber für wachsende Werthe von k sich der Null nähert, so fallen die mit eben diesem Factor multiplicirten Glieder weg, und es bleibt nur

$$-\lim_{k=\infty}\sum_{\alpha,2,m}{}'\frac{1}{\varepsilon m}\cdot\frac{e^{2\varepsilon m(\tau w_\alpha\pm\sigma)\pi i}}{1-e^{2\varepsilon mw_\alpha\pi i}}$$

übrig. Wird hierin m an Stelle von εm gesetzt, so ist die Summation auf die Werthe $m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm h$ zu erstrecken, und es kommt daher:

$$\log\Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2) = \frac{(w_1+w_2)i}{2\pi}\sum_{n_0}{}'\frac{e^{2n_0\tau\pi i}}{n_0^2} - \lim_{k=\infty}\sum_{\alpha,m}{}'\frac{1}{m}\cdot\frac{e^{2m(\tau w_\alpha\pm\sigma)\pi i}}{1-e^{2mw_\alpha\pi i}}.$$

($n_0 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; $\alpha = 1, 2$; $m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm h$)

Zur weiteren Umformung des Summenausdrucks rechts bediene ich mich der Formel

$$\frac{e^{2mw\tau\pi i}}{1-e^{2mw\pi i}} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{k=\infty}\sum_{n}{}'\frac{e^{2n\tau\pi i}}{n-mw} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k),$$

welche für beliebige complexe Grössen w und unter der Bedingung, dass τ reell, nicht negativ und kleiner als Eins sei, gültig ist, und welche unmittelbar aus der Entwickelung von $\cos 2mw\tau\pi$ und $\sin 2mw\tau\pi$ nach den cosinus und sinus der Vielfachen von $\tau\pi$ hervorgeht. Mit Hülfe der angegebenen Formel wird

$$2\pi i \sum_{\alpha,m}{}' \frac{1}{m} \cdot \frac{e^{2m(\tau w_\alpha \pm \sigma)\pi i}}{1 - e^{2m w_\alpha \pi i}} = \lim_{k=\infty} \sum_{\alpha,m,n}{}' \frac{e^{(\pm 2m\sigma + 2n\tau)\pi i}}{m(n - m w_\alpha)} \quad ,$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite geht, wenn für $\alpha = 2$ der Summationsbuchstabe m mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen wird, in folgenden über:

$$\lim_{k=\infty} \sum_{m,n}{}' \left(\frac{1}{m(n - m w_1)} - \frac{1}{m(n + m w_2)} \right) e^{2(m\sigma + n\tau)\pi i}$$

oder

$$-(w_1 + w_2) \lim_{k=\infty} \sum_{m,n}{}' \frac{e^{2(m\sigma + n\tau)\pi i}}{m^2 w_1 w_2 + mn(w_1 - w_2) - n^2} \cdot$$

$(m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm h;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k)$

Setzt man zur Vereinfachung

$$\frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} = a_0 i \ , \quad \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2} = b_0 i \ , \quad \frac{-1}{w_1 + w_2} = c_0 i \, ,$$

so sind w_1 und $-w_2$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0 \, ,$$

und der zweite Theil des obigen Ausdrucks für $\log \Delta(\sigma, \tau, w_1, w_2)$, nämlich:

$$-\lim_{h=\infty} \sum_{\alpha,m}{}' \frac{1}{m} \cdot \frac{e^{2m(\tau w_\alpha \pm \sigma)\pi i}}{1 - e^{2m w_\alpha \pi i}}$$

erhält gemäss vorstehender Entwickelung die Form:

$$-\frac{1}{2\pi} \lim_{h=\infty, k=\infty} \lim \sum_{m,n}{}' \frac{e^{2(m\sigma + n\tau)\pi i}}{a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2} \quad \begin{pmatrix} m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm h \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k \end{pmatrix},$$

während der erste Theil, nämlich

$$\frac{(w_1 + w_2)\, i}{2\pi} \sum_{n}{}' \frac{e^{2n\tau\pi i}}{n^2} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

gleich

$$-\frac{1}{2\pi} \lim_{k=\infty} \sum_{n}{}' \frac{e^{2n\tau\pi i}}{c_0 n^2} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k)$$

wird. Es resultirt daher die Hauptgleichung:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \log \Delta(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{-1}{2\pi} \lim_{h=\infty, k=\infty} \lim \sum_{m,n}{}' \frac{e^{2(m\sigma + n\tau)\pi i}}{a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2} \, ;$$

die Summation ist hierbei auf alle ganzen Zahlen m von $-h$ bis $+h$ und auf alle ganzen Zahlen n von $-k$ bis $+k$ auszudehnen, jedoch mit Ausschluss des Werthsystems $m = 0$, $n = 0$; die Grössen w_1, w_2

sind complex und zwar so, dass die reellen Theile von $w_1 i$ und $w_2 i$ negativ werden; die Grössen a_0, b_0, c_0 sind hieraus so zu bestimmen, dass w_1 und $-w_2$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0$$

werden und dass

$$4 a_0 c_0 - b_0^2 = 1$$

wird; endlich sind σ und τ den Bedingungen unterworfen, dass τ reell sein und der Ungleichheit

$$0 \leqq \tau < 1$$

genügen muss, während für

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma' i \ , \ w_1 = w_1^0 + w_1' i \ , \ w_2 = w_2^0 + w_2' i$$

die Werthe der beiden Quotienten $\frac{\sigma'}{w_1'}$ und $\frac{-\sigma'}{w_2'}$ zwischen $-\tau$ und $1-\tau$ liegen müssen. Für das Werthsystem $\sigma = 0$, $\tau = 0$ werden in der Gleichung (𝔄) beide Seiten negativ unendlich, und die Gleichung selbst verliert also in diesem Falle ihre concrete Bedeutung.

II.

Für die Function $\vartheta(\zeta, w)$ bestehen die Relationen:

$$\vartheta(\zeta, w) = -\vartheta(-\zeta, w) = -\vartheta(\zeta + 1, w),$$
$$\vartheta(\zeta, w) = e^{(w+2\zeta)\pi i}\vartheta(\zeta + w, w) = e^{(w-2\zeta)\pi i}\vartheta(\zeta - w, w),$$

deren Anwendung auf den mit $\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ bezeichneten Ausdruck

$$(4\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i} \cdot \frac{\vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2)}{\left(\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{1}{3}}}$$

unmittelbar die Relationen:

(𝔅°) $\quad \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \Lambda(\sigma + 1, \tau, w_1, w_2) = \Lambda(\sigma, \tau + 1, w_1, w_2)$

ergiebt. Ebenso führt die Transformationsgleichung:

$$\vartheta(\zeta, w + 1) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\vartheta(\zeta, w)$$

zu der Relation:

(𝔅′) $\quad \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \Lambda(\sigma + \tau, \tau, w_1 - 1, w_2 + 1),$

während die Transformationsgleichung:

$$\vartheta\left(\zeta, \frac{-1}{w}\right) = -i(V - wi)\, e^{\zeta^2 w\pi i}\vartheta(\zeta w, w)$$

und die durch Differentiation daraus entstehende:

$$\vartheta'\left(0, \frac{-1}{w}\right) = (\sqrt{-wi})^3\, \vartheta'(0, w)$$

die Relation:

$$(\mathfrak{B}'') \qquad A(\sigma, \tau, w_1, w_2) = A\left(-\tau, \sigma, \frac{-1}{w_1}, \frac{-1}{w_2}\right)$$

liefert. — Die eingeklammerte Quadratwurzel $(\sqrt{-wi})$ bedeutet hier, wie in meinem Aufsatz im Monatsbericht vom Juli 1880 S. 692 denjenigen der beiden Werthe der Quadratwurzel, für welchen der reelle Theil positiv ist, aber im Falle, wo wi reell und also der reelle Theil von $\sqrt{-wi}$ gleich Null ist, denjenigen Werth, bei welchem der Coefficient von i positiv genommen wird. Diese Werthbestimmung der Quadratwurzel aus einer complexen Grösse re^{2vi} habe ich a. a. O. einfach durch die Gleichung:

$$(\sqrt{re^{2vi}}) = |\sqrt{r}| \cdot e^{vi} \text{ mit der Bedingung } -\pi < 2v \leq \pi$$

charakterisirt. Ich bemerke jedoch, dass dort bei der Ungleichheitsbedingung für v der Factor 2, wie hier geschehen, hinzuzufügen ist, und dass die in dem citirten Aufsatz auf S. 696 und 697 gegebene Herleitung der ϑ-Transformation noch in einem Punkte einer Vervollständigung bedarf, die ich nächstens in einer für das Journal für Mathematik bestimmten, in allen Einzelheiten ausgeführten Bearbeitung jenes Aufsatzes näher darlegen werde. Hier will ich nur kurz erwähnen, dass es der Nachweis der Endlichkeit und Stetigkeit der a. a. O. mit $\Phi(x)$ bezeichneten Function ist, welcher noch eine andere Begründung als diejenige, die dort angedeutet ist, erfordert, und dass die erforderliche Ergänzung am leichtesten durch den Hinweis auf die im Monatsberichte vom October 1880, S. 858 hergeleitete Gleichung $\Phi(x) = \Phi(x')$ zu geben ist.

Die oben mit $(\mathfrak{B}^0)$ bezeichnete Relation zeigt, dass die Function A ungeändert bleibt, wenn σ und τ um ganze Zahlen vermehrt oder vermindert werden; die Relationen $(\mathfrak{B}')$ und $(\mathfrak{B}'')$ zeigen, dass A bei den »elementaren« Substitutionen

$$\left(\begin{matrix}\sigma & , \tau, & w_1 & , & w_2 \\ \sigma+\tau & , \tau, & w_1-1 & , & w_2+1\end{matrix}\right), \left(\begin{matrix}\sigma & , \tau, & w_1 & , & w_2 \\ -\tau & , \sigma, & \frac{-1}{w_1} & , & \frac{-1}{w_2}\end{matrix}\right)$$

ungeändert bleibt. Da ich nun im Monatsbericht vom October 1866, S. 609 gezeigt habe, dass sich jede Substitution

$$\left(\begin{matrix}\sigma & , & \tau \\ \alpha\sigma+\alpha'\tau & , & \beta\sigma+\beta'\tau\end{matrix}\right)$$

mit ganzzahligen Coefficienten $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, deren Determinante $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ ist, als eine Aufeinanderfolge jener zwei elementaren Substitutionen darstellen lässt, so folgt, dass für die Function Λ die allgemeine Relation:

$$(\mathfrak{B})\quad \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \Lambda\left(\alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'', \frac{\alpha w_1 - \alpha'}{-\beta w_1 + \beta'}, \frac{\alpha w_2 + \alpha'}{\beta w_2 + \beta'}\right),$$

bestehen muss, wenn darin $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ beliebige, nur der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ unterworfene ganze Zahlen bedeuten.

Führt man an Stelle der Grössen w_1, w_2, die Grössen a_0, b_0, c_0 ein, für welche

$$w_1 = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \quad w_2 = \frac{b_0 + i}{2c_0}, \quad 4a_0c_0 - b_0^2 = 1$$

ist, so kann die Relation $(\mathfrak{B})$ in folgender Form dargestellt werden:

$$(\mathfrak{B})\quad \Lambda\left(\sigma, \tau, \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \frac{b_0 + i}{2c_0}\right) = \Lambda\left(\sigma', \tau', \frac{-b_0' + i}{2c_0'}, \frac{b_0' + i}{2c_0'}\right),$$

mit den Bedingungen:

$$\sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'', \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$$

$$(\mathfrak{B}_0)\qquad \begin{aligned} a_0' &= a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \\ b_0' &= 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta', \\ c_0' &= a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2, \end{aligned}$$

in welchen $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ ganze Zahlen bedeuten. Es besteht daher die Relation:

$$(\mathfrak{B}_1)\qquad \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \Lambda(\sigma', \tau', w_1', w_2'),$$

wenn

$$\sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau + \beta''$$

ist, wenn ferner w_1 und $-w_2$ die beiden Wurzeln der Gleichung $a_0 + b_0w + c_0w^2 = 0$ und $w_1', -w_2'$ diejenigen der Gleichung $a_0' + b_0'w' + c_0'w'^2 = 0$ sind, und wenn endlich a_0', b_0', c_0' die Coefficienten der durch die ganzzahlige Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \; y = \alpha' x' + \beta' y' \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$

aus der quadratischen Form $a_0x^2 + b_0xy + c_0y^2$ hervorgehenden transformirten Form $a_0'x'^2 + b_0'x'y' + c_0'y'^2$ bedeuten. Definirt man zwei Systeme

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0), (\sigma', \tau', a_0', b_0', c_0')$$

als äquivalent, wenn ihre Elemente durch die Bedingungsgleichungen $(\mathfrak{B}_0)$ mit einander verbunden sind, so ist dies vermöge der Bedingung, dass die Substitutionscoefficienten $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ ganze Zahlen sein

sollen, eine »arithmetische Äquivalenz«, und es ist auf Grund der Relation $(\mathfrak{B}_1)$

die transcendente Function der Systems-Elemente σ, τ, b_0, c_0

$$\Lambda\left(\sigma, \tau, \frac{-b_0+i}{2c_0}, \frac{b_0+i}{2c_0}\right)$$

als »analytische Invariante« jener arithmetischen Äquivalenz

zu bezeichnen.

Die hier entwickelte Invarianten-Eigenschaft von Λ führt zu der interessanten Aufgabe, die Function Λ so umzuformen, dass eben diese Invarianten-Eigenschaft in Evidenz tritt. Für den Logarithmus von Λ ist diese Aufgabe durch die obige Gleichung $(\mathfrak{A})$ der Hauptsache nach gelöst; für die Function Λ selbst soll aber diese Aufgabe zunächst behandelt werden, und erst dann soll eine weitere Umformung der Gleichung $(\mathfrak{A})$ zur völligen Klarlegung der Invarianten-Eigenschaft gegeben und eine Reihe allgemeiner Erörterungen daran geknüpft werden.

III.

Wird zur Abkürzung das Product

$$e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2)$$

durch $P(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ bezeichnet, so ist auf Grund der Definition der ϑ-Reihen:

$$P(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \sum_{\mu,\nu} e^{\pi i \phi(\mu,\nu)} \qquad (\mu, \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots),$$

wo unter $\phi(\mu, \nu)$ der Ausdruck:

$$\frac{1}{4}(\mu^2 w_1 + \nu^2 w_2) + (\mu+\nu)\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) + (\mu w_1 - \nu w_2)\tau + (w_1+w_2)\tau^2$$

zu verstehen ist. Setzt man hierin $\mu + \nu = 2m$, so kommt:

$$\phi(\mu, \nu) = \frac{1}{4}(w_1+w_2)(\nu-2\tau)^2 - m w_1(\nu-2\tau) + m^2 w_1 + m(2\sigma-1)$$

oder:

$$\phi(\mu, \nu) = \frac{1}{4}(w_1+w_2)\left(2\tau - \nu + \frac{2m w_1}{w_1+w_2}\right)^2 + \frac{m^2 w_1 w_2}{w_1+w_2} + m(2\sigma-1).$$

Die Transformationsgleichung

$$\vartheta\left(\zeta, \frac{-1}{w}\right) = -i(\sqrt{-wi})\, e^{\zeta^2 w \pi i}\, \vartheta(\zeta w, w)$$

ergiebt aber, wenn darin $\zeta = \eta + \frac{1}{2w}$ gesetzt wird, die Relation:

$$(\sqrt{-w\imath}) \sum_{\nu} e^{w\pi i(\eta-\frac{1}{2}\nu)^2} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-(n^2w' - 2n\eta + n)\pi i} \qquad \left(w' = \frac{1}{w}\right).$$

Wendet man nun diese Relation auf $\Sigma e^{\pi i\varphi(\mu,\nu)}$ an, indem

$$w = w_1 + w_2 \text{ und } \eta = \tau + \frac{mw_1}{w_1 + w_2} = \tau + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m \cdot \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2}$$

genommen wird, so resultirt die Gleichung:

$$\left(\sqrt{-(w_1 + w_2)\,i}\right) \sum_{\mu,\nu} e^{\pi i\varphi(\mu,\nu)} = \sum_{m,n} e^{\pi i\psi(m,n)},$$

in welcher $\psi(m,n)$ den Ausdruck:

$$\frac{1}{w_1 + w_2}\left(m^2 w_1 w_2 + mn(w_1 - w_2) - n^2\right) + mn + m(2\sigma - 1) + n(2\tau - 1)$$

bedeutet und die Summation auf alle ganzzahligen Werthe $m, n = -\infty$ bis $+\infty$ auszudehnen ist. Demnach ist, wenn, wie oben:

$$\frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} = a_0 i, \quad \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2} = b_0 i, \quad \frac{-1}{w_1 + w_2} = c_0 i$$

gesetzt wird:

$$(\mathfrak{C}_0) \quad -P(\sigma,\tau,w_1,w_2) = (\sqrt{c_0}) \sum_{m,n}{}' (-1)^{(m-1)(n-1)} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + 2(m\sigma + n\tau)\pi i}$$

oder, wenn man zur Abkürzung die quadratische Form $a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2$ durch $f(x,y)$ bezeichnet:

$$-P(\sigma,\tau,w_1,w_2) = (\sqrt{c_0}) \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} e^{-\pi f(m,n) + 2(m\sigma + n\tau)\pi i}.$$

Die Differentiation des mit $P(\sigma,\tau,w_1,w_2)$ bezeichneten Products

$$e^{\tau^2(w_1 + w_2)\pi i}\, \vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)\, \vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2)$$

ergiebt die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\sigma\,\partial\sigma}(\sigma=0,\tau=0) = 2\vartheta'(0,w_1)\,\vartheta'(0,w_2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\sigma\,\partial\tau}(\sigma=0,\tau=0) = (w_1 - w_2)\,\vartheta'(0,w_1)\,\vartheta'(0,w_2)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\tau\,\partial\tau}(\sigma=0,\tau=0) = -2w_1 w_2\,\vartheta'(0,w_1)\,\vartheta'(0,w_2),$$

welche, wenn die drei zweiten Ableitungen für $\sigma = 0, \tau = 0$ kurz mit P_{11}, P_{12}, P_{22} bezeichnet werden, sich in folgender Weise darstellen lassen:

$$c_0 P_{11} = 2c_0 \vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2),$$
$$c_0 P_{12} = -b_0 \vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2),$$
$$c_0 P_{22} = 2a_0 \vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2).$$

Wenn man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit a_0, b_0, c_0 multiplicirt und dann zu einander addirt, so wird der Factor von $\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)$ gleich $4a_0c_0 - b_0^2$, also gleich Eins, und man gelangt demnach zu der Relation:

$$c_0(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{22}) = \vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2).$$

Die Differentiation der auf der rechten Seite der Gleichung ($\mathfrak{C}_0$) stehenden Reihe führt aber zu dem Ergebniss:

$$c_0(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{22}) = 4\pi^2(\sqrt{c_0})^3 \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n) e^{-\pi f(m,n)},$$

und da

$$\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{(4\pi^2)^{\frac{1}{3}} P(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{\left(\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{1}{3}}}$$

ist, so resultirt die für beliebige Grössen σ, τ gültige Hauptgleichung

$$(\mathfrak{C}) \qquad \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = -\frac{\sum (-1)^{(m-1)(n-1)} e^{-\pi f(m,n) + 2(m\sigma + n\tau)\pi i}}{\left(\sum (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n) e^{-\pi f(m,n)}\right)^{\frac{1}{3}}},$$

welche die gesuchte Darstellung der Function Λ enthält.

Die Reihen auf der rechten Seite sind specielle (Rosenhain'sche) ϑ-Reihen mit zwei Variabeln; sie sind convergent, weil der reelle Theil von c_0 positiv und $4c_0 f(m, n) = m^2 + (b_0 m + 2c_0 n)^2$ ist. Die Gleichung ($\mathfrak{C}$) selbst kann auch als eine Formel zur Reduction jener speciellen ϑ-Reihen mit zwei Variabeln auf einfache ϑ-Reihen angesehen werden, und diese Reduction lässt sich, wenn in ($\mathfrak{C}_0$) $\sigma = s + \frac{1}{2}$, $\tau = t + \frac{1}{2}$ genommen wird, so darstellen, dass die Doppelreihe

$$\sum_{m,n} (-1)^{mn} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + 2(sm + tn)\pi i} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

sich auf das Product von zwei einfachen Reihen, nämlich auf:

$$\frac{1}{(\sqrt{c_0})} \sum_n e^{((n+t)^2 w_1 + 2sn)\pi i} \cdot \sum_n e^{((n+t)^2 w_2 - 2sn)\pi i} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

reducirt.

(Fortsetzung folgt.)

22. Über Functionen einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale einer gleich grossen Anzahl gegebener Functionen entstehen.

Von L. Fuchs
in Heidelberg.

(Vorgelegt am 5. April: — gedruckt im Bericht vom 19. April [St. XX]: — ausgegeben am 26. April.)

In früheren Arbeiten[1] habe ich mich mit den Bedingungen beschäftigt, dass die Gleichungen

$$\int_{\mathfrak{d}_1}^{z_1} f_1(z_1)\,dz_1 + \int_{\mathfrak{d}_2}^{z_2} f_1(z_2)\,dz_2 = u_1$$

$$\int_{\mathfrak{d}_1}^{z_1} f_2(z_1)\,dz_1 + \int_{\mathfrak{d}_2}^{z_2} f_2(z_2)\,dz_2 = u_2$$

eindeutig lösbar seien. Es ergaben sich ausser den Bedingungen, welche das Verhalten von $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in der Umgebung von singulären Stellen der Variabeln z und der Integrale dieser Functionen in Bezug auf unendlich oft wiederholte Umläufe betreffen, die beiden Bedingungen, dass $f_1(z)$, $f_2(z)$ nicht gleichzeitig für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden dürfen, und dass die Gleichung

$$A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z) = 0$$

für nicht mehr als zwei Werthsysteme $\big(z, f_k(z)\big)$ befriedigt werden darf, und dass diese Lösungen den Gleichungen

$$\sum_1^2{}_i f_k(z_i)\,dz_i = 0 \qquad k = 1, 2$$

Genüge leisten.

[1] Vergl. insbesondere Abhandlungen der Göttinger Societät, 8. Januar 1881, welche Abhandlung auch im Bulletin des Hrn. Darboux, Jahrgang 1881, wiedergegeben ist.

Im Folgenden erlaube ich mir mit Hülfe der in meinen genannten Arbeiten angewendeten Principien die Verallgemeinerung dieser letzteren Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen

$$\sum_{i}^{n} \int_{\delta_i}^{z_i} f_k(z_i)\, dz_i = u_k \quad k = 1, 2, \ldots n$$

wenn n einen beliebigen Werth hat, zu liefern; indem ich mir für eine andere Gelegenheit vorbehalte, auf die Zusammenstellung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit dieser Gleichungen in dem allgemeinen Falle überhaupt — in Übereinstimmung mit den Methoden meiner oben citirten Arbeiten — näher einzugehen.

1.

Es seien $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z)$ Functionen der Beschaffenheit, dass jede symmetrische Function der den Gleichungen:

$$\text{(A)} \qquad \sum_{i}^{n} \int_{\delta_i}^{z_i} f_k(z_i)\, dz_i = u_k \quad k = 1, 2, \ldots n$$

genügenden Werthe $z_1, z_2, \ldots z_n$ eine eindeutige Function der unabhängigen Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_n$ darstelle. Die Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ bedeuten willkürlich gegebene Constanten, und es wird vorausgesetzt, dass in jeder der n Gleichungen das auf dieselbe Variable z_i bezügliche Integral auf demselben Wege ausgeführt werde.

Es seien $c_1, c_2, \ldots c_n$ gegebene Werthe von $z_1, z_2, \ldots z_n$ und $v_1, v_2, \ldots v_n$ zugehörige Werthe von $u_1, u_2, \ldots u_n$. Wir wollen voraussetzen, dass $c_1, c_2, \ldots c_n$ nicht zu den singulären Werthen einer der Functionen $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z)$ gehören. Alsdann ergiebt sich aus den Gleichungen (A) nach dem Taylor'schen Satz:

$$\text{(1)} \qquad \sum_{i}^{n} f_k(c_i)(z_i - c_i) + \tfrac{1}{2}\sum_{i}^{n} f_k'(c_i)(z_i - c_i)^2 + \tfrac{1}{6}\sum_{i}^{n} f_k^{(2)}(c_i)(z_i - c_i)^3 + \ldots = u_k - v_k \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

wo

$$f_k^{(\lambda)}(z) = \frac{d^\lambda f_k(z)}{dz^\lambda}.$$

Wenn die Grössen $c_1, c_2, \ldots c_n$ so beschaffen sind, dass die Determinante

$$D = \sum \pm f_1(c_1) f_2(c_2) \ldots f_n(c_n)$$

nicht verschwindet, alsdann ergeben sich aus den Gleichungen (1)[1] für $z_1 - c_1, z_2 - c_2, \ldots z_n - c_n$ Darstellungen durch Reihen, welche nach positiven ganzen Potenzen von $u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots u_n - v_n$ entwickelt sind. Demnach sind in diesem Falle $z_1, z_2, \ldots z_n$ in der Umgebung der Werthe $v_1, v_2, \ldots v_n$ von $u_1, u_2, \ldots u_n$ eindeutig.

Setzen wir dagegen voraus, dass $c_1, c_2, \ldots c_n$ so beschaffen sind, dass

$$D = 0 \tag{B}$$

ohne dass jedoch die Unterdeterminanten erster Ordnung Null sind, alsdann kann man z. B. aus den ersten $n-1$ Gleichungen (1) $z_2 - c_2, z_3 - c_3, \ldots z_n - c_n$ durch Reihen darstellen, welche nach positiven ganzen Potenzen von $z_1 - c_1, u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots u_{n-1} - v_{n-1}$ fortschreiten.

Bezeichnen wir die mit $f_k(c_i)$ multiplicirte Unterdeterminante von D mit $\mathfrak{A}_{ki}$, so ist

$$\begin{aligned}(2)\quad \mathfrak{A}_{n1}(z_i - c_i) = {} & \mathfrak{A}_{ni}(z_1 - c_1) + \alpha_{i1}(u_1 - v_1) + \alpha_{i2}(u_2 - v_2) + \ldots \\ & + \alpha_{in-1}(u_{n-1} - v_{n-1}) + P_{i2} + P_{i3} + \ldots \quad i = 2, 3, \ldots n\end{aligned}$$

wo P_{il} eine homogene Function l^{ter} Ordnung der Variabeln $z_1 - c_1$, $u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots (u_{n-1} - v_{n-1})$ bezeichnet, und wo die α_{il} Unterdeterminanten der Determinante $\mathfrak{A}_{n1}$ darstellen.

Setzt man die Werthe (2) in die n^{te} der Gleichungen (1), so erhält man gemäss Gleichung (B)

$$(C)\quad \mathfrak{A}_{11}(u_1 - v_1) + \mathfrak{A}_{21}(u_2 - v_2) + \ldots + \mathfrak{A}_{n1}(u_n - v_n) = \Omega_2 + \Omega_3 + \ldots,$$

wo Ω_l eine ganze homogene Function von $z_1 - c_1, u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots u_{n-1} - v_{n-1}$ l^{ter} Ordnung bezeichnet.

Wenn nicht alle Glieder der unendlichen Reihe $\Omega_2, \Omega_3, \ldots$ für $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots u_{n-1} = v_{n-1}$ und für einen beliebigen Werth von z_1 verschwinden, so sei unter den von $u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots u_{n-1} - v_{n-1}$ unabhängigen Gliedern $C_m(z_1 - c_1)^m$ das von der niedrigsten Ordnung. Alsdann würden sich aus der Gleichung (C) für willkürliche Werthe von $u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots u_n - v_n$, deren Modul hinlänglich klein, m Werthe von $z_1 - c_1$ ergeben, deren Modulen ebenfalls unterhalb einer gewissen Grenze bleiben.[2] Es würde sich demnach in der Umgebung von

---

[1] Vergl. JACOBI in CRELLE's Journal Bd. 6 S. 274.

[2] Dieses ergiebt sich am einfachsten aus einem Satze, welchen Hr. WEIERSTRASS in einem lithographirten Hefte, betitelt: »Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Variabeln sich beziehenden Sätze, zusammengestellt und dem mathematischen Verein zu Berlin übergeben. Berlin. H. S. Hermann.«, Seite 1 bis 6. bewiesen hat. Dieser Satz des Hrn. WEIERSTRASS lässt sich kurz dahin aussprechen: Eine nach ganzen positiven Potenzen der $n+1$ Variablen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ fortschreitende Reihe $F(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ von der Beschaffenheit, dass $F(x, 0, \ldots 0) = F_0(x)$ nicht für

$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots u_n = v_n$ nicht jede symmetrische Function von $z_1, z_2, \ldots z_n$ eindeutig verhalten, und zwar würden $u_k = v_k$ wirkliche singuläre Stellen derselben sein, weil, wenn u_k auf willkürlichem Wege in v_k einrückt, gleichzeitig $z_i = c_i$ wird.

Wenn dagegen keines der Glieder $\Omega_2, \Omega_3, \ldots$ ein von $u_k - v_k$ unabhängiges Glied enthält, so wird der Gleichung (C) gemäss, wenn die $u_k - v_k$ unendlich klein erster Ordnung werden, der Ausdruck $\mathfrak{A}_{11}(u_1 - v_1) + \mathfrak{A}_{21}(u_2 - v_2) + \ldots + \mathfrak{A}_{n1}(u_n - v_n)$ unendlich klein zweiter Ordnung sein, d. h. es würde zwischen diesen unendlich kleinen Grössen die Gleichung

$$(3) \qquad \mathfrak{A}_{11}(u_1 - v_1) + \mathfrak{A}_{21}(u_2 - v_2) + \ldots + \mathfrak{A}_{n1}(u_n - v_n) = 0$$

stattfinden.

Demnach würden[1] die z_i nur dann in die c_i eintreffen können, wenn die letzten Wegelemente, auf welchen u_k nach v_k gelangt, von einander abhängig werden, also $u_1, u_2 \ldots u_n$ nicht mehr als von einander unabhängige Variabeln sich verhalten.

Wenn die Grössen $\Omega_2, \Omega_3, \ldots$ kein von $u_k - v_k$ unabhängiges Glied enthalten, so wird die Gleichung (C) für beliebige Werthe z_1 befriedigt, wenn $u_k = v_k$, oder, was dasselbe ist, wenn man in den Gleichungen (1) $u_k = v_k$ setzt, so werden dieselben identisch für die Variable z_1 befriedigt, wenn man für $z_i - c_i$ ($i = 2, 3, \ldots n$) die nach Potenzen von $z_1 - c_1$ fortschreitenden Reihen (2) substituirt.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in der Umgebung von $u_k = v_k$, welchen die Werthe $z_i = c_i$ entsprechen, für die $D = 0$, jede symmetrische Function von $z_1, z_2, \ldots z_n$ sich eindeutig verhalte, ist also die, dass die Integrale von $n - 1$ der Differentialgleichungen

$$(D) \qquad \sum_1^n{}_i f_k(z_i)\,dz_i = 0 \quad k = 1, 2, \ldots n$$

mit den Anfangswerthen $z_i = c_i$ auch der n^{ten} dieser Differentialgleichungen genügen.

---

jeden Werth von x verschwindet, und zwar so, dass die niedrigste in $F_0(x)$ auftretende Potenz von x die m^{te} sei, lässt sich für hinlänglich kleine Moduln der Variablen in ein Product zweier Factoren zerlegen, wovon der eine für verschwindende Werthe der Variablen weder Null noch unendlich wird, der andere aber die Form hat $x^m + f_1 \cdot x^{m-1} + \ldots + f_m$, wo f_k eine nach ganzen positiven Potenzen der n Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ fortschreitende Reihe darstellt.

[1] Vergl. meine citirte Abhandlung in den Abh. der Göttinger Societät No. 4.

2.

Sind $z_1, z_2, \ldots z_n$ Functionen einer Variabeln ζ, welche die gleichzeitigen Werthe $z_i = c_i$ erhalten, und den Differentialgleichungen (D) genügen, so folgt aus diesen Gleichungen:

$$(1) \qquad \sum_1^n{}_i f_k(c_i)\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0 = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

$$(2) \qquad \sum_1^n{}_i f_k'(c_i)\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0^2 + \sum_1^n{}_i f_k(c_i)\left(\frac{d^2z_i}{d\zeta^2}\right)_0, \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

wo $\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0$, $\left(\frac{d^2z_i}{d\zeta^2}\right)_0$ die Werthe von $\frac{dz_i}{d\zeta}$, $\frac{d^2z_i}{d\zeta^2}$ für die Anfangswerthe $z_i = c_i$ bezeichnen.

Vermöge der Gleichung (B) werden die Gleichungen (1) gleichzeitig befriedigt, und man erhält

$$(3) \qquad \left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0 = \rho \cdot \mathfrak{A}_{mi},$$

wo m eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeutet, und ρ von i unabhängig ist.

Multiplicirt man die Gleichungen (2) der Reihe nach mit $\mathfrak{A}_{1l}$, $\mathfrak{A}_{2l}, \ldots \mathfrak{A}_{nl}$ und addirt dieselben, so ergiebt sich aus Gleichung (B)

$$(4) \qquad \sum_1^n{}_k \sum_1^n{}_i \mathfrak{A}_{kl} f_k'(c_i)\left(\frac{dz_i}{d\zeta}\right)_0^2 = 0,$$

wo für l eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots n$ gewählt werden kann.

Substituirt man die Werthe (3) in (4), so folgt

$$\sum_1^n{}_k \sum_1^n{}_i \mathfrak{A}_{kl} f_k'(c_i) \mathfrak{A}_{mi}^2 = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die aus (B) sich ergebende Eigenschaft

$$\frac{\mathfrak{A}_{mi}}{\mathfrak{A}_{mk}} = \frac{\mathfrak{A}_{m'i}}{\mathfrak{A}_{m'k}}$$

$$(5) \qquad \mathfrak{A}_{m1}\frac{\partial D}{\partial c_1} + \mathfrak{A}_{m2}\frac{\partial D}{\partial c_2} + \ldots + \mathfrak{A}_{mn}\frac{\partial D}{\partial c_n} = 0.$$

Die Grössen $c_1, c_2, \ldots c_n$ waren willkürlich und nur durch die Gleichung (B) verbunden. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Sind $z_1, z_2, \ldots z_n$ beliebige Variabeln, welche nur durch die Gleichung

$$(E) \qquad \Delta - \Sigma \pm f_1(z_1) f_2(z_2) \ldots f_n(z_n) = 0$$

mit einander verbunden sind, so ist unter Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen (A)

$$(F) \qquad A_{m1}\frac{\partial\Delta}{\partial z_1}+A_{m2}\frac{\partial\Delta}{\partial z_2}+\ldots+A_{mn}\frac{\partial\Delta}{\partial z_n}=0,$$

wo A_{ki} den Coefficienten von $f_k(z_i)$ in Δ bedeutet und m irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bezeichnet.

3.

Es seien $z_1, z_2, \ldots z_{2n-2}$ Werthe, welche sämmtlich der Gleichung

$$(G) \qquad A_1 f_1(z)+A_2 f_2(z)+\ldots+A_n f_n(z)=0$$

genügen, wo A_k eine willkürliche Grösse bezeichnet.

Ist $\alpha, \beta, \ldots \nu$ irgend eine Combination von n Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots 2n-2$, so ist

$$(E') \qquad \Delta(\alpha,\beta,\ldots\nu)=\begin{vmatrix} f_1(z_\alpha) & f_1(z_\beta) & \ldots & f_1(z_\nu)\\ f_2(z_\alpha) & f_2(z_\beta) & \ldots & f_2(z_\nu)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_n(z_\alpha) & f_n(z_\beta) & \ldots & f_n(z_\nu)\end{vmatrix}=0.$$

Solcher Gleichungen erhält man demgemäss

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\ldots n-2}.$$

Zu jeder derselben gehört nach dem Satze voriger Nummer eine Gleichung der Form

$$(F') \qquad \begin{aligned} &A_{m\alpha}(\alpha,\beta,\ldots\nu)\frac{\partial\Delta(\alpha,\beta,\ldots\nu)}{\partial z_\alpha}\\ &+A_{m\beta}(\alpha,\beta,\ldots\nu)\frac{\partial\Delta(\alpha,\beta,\ldots\nu)}{\partial z_\beta}+\ldots\\ &+A_{m\nu}(\alpha,\beta,\ldots\nu)\frac{\partial\Delta(\alpha,\beta,\ldots\nu)}{\partial z_\nu}=0,\end{aligned}$$

wo $A_{mi}(\alpha,\beta,\ldots\nu)$ den Coefficienten von $f_m(z_i)$ in $\Delta(\alpha,\beta,\ldots\nu)$ bezeichnet.

Von den $2n-2$ Werthsystemen $\left(z_i, f_k(z_i)\right)$ können $n-1$ beliebig gewählt werden, während die übrigen $n-1$ dadurch bestimmt sind.

Wählen wir $\left(z_i, f_k(z_i)\right)$ für $i=1, 2, \ldots n-1$ als die willkürlichen, und bezeichnen der Kürze halber

$\Delta(1, 2, \ldots n-1, \rho)$ für $\rho = n, n+1, \ldots 2n-2$

mit Δ_ϱ und den Coefficienten von $f_k(z_i)$ in Δ_ϱ mit $A_{ki}(\rho)$, so ist

$$(1) \qquad \frac{\partial z_\varrho}{\partial z_i}\frac{\partial \Delta_\varrho}{\partial z_\varrho} + \frac{\partial \Delta_\varrho}{\partial z_i} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots n-1$$

$$(2) \qquad \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots \nu)}{\partial z_i} = 0,$$

wenn $\alpha, \beta, \ldots \nu$ von i verschieden sind, und

$$(2a) \qquad \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots \nu)}{\partial z_i} = \frac{A_{1i}(\alpha, \beta, \ldots \nu)}{A_{1i}(n)}\frac{\partial \Delta_n}{\partial z_i},$$

wenn eine der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ mit i übereinstimmt.

Ebenso ist

$$(3) \qquad \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots \nu)}{\partial z_\varrho} = 0,$$

wenn $\alpha, \beta, \ldots \nu$ von ρ verschieden sind, aber

$$(3a) \qquad \frac{\partial \Delta(\alpha, \beta, \ldots \nu)}{\partial z_\varrho} = \frac{A_{1\varrho}(\alpha, \beta, \ldots \nu)}{A_{1\varrho}(\rho)}\frac{\partial \Delta_\varrho}{\partial z_\varrho},$$

wenn eine der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ mit ρ übereinstimmt.

Setzt man die Werthe (2) bis (3a) in (F′) ein, so erhält man $\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n-2}$ lineare homogene Gleichungen zwischen den $2n-2$ Grössen

$$\frac{\partial \Delta_n}{\partial z_1}, \frac{\partial \Delta_n}{\partial z_2}, \ldots \frac{\partial \Delta_n}{\partial z_{n-1}}, \frac{\partial \Delta_n}{\partial z_n}, \frac{\partial \Delta_{n+1}}{\partial z_{n+1}}, \frac{\partial \Delta_{n+2}}{\partial z_{n+2}}, \ldots \frac{\partial \Delta_{2n-2}}{\partial z_{2n-2}}.$$

Es bestimmen $2n-2$ derselben die Verhältnisse dieser Grössen, folglich nach den Gleichungen (2) bis (3a) die Verhältnisse irgend zweier Ableitungen der Determinanten $\Delta(\alpha, \beta, \ldots \nu)$, und zwar ergeben sich vermöge der zwischen den Grössen $A_{mi}(\alpha, \beta, \ldots \nu)$ stattfindenden Relationen die Gleichungen

$$(H) \qquad A_{m_i}(i, n, n+1, \ldots 2n-2)\frac{\partial \Delta_\varrho}{\partial z_i} + A_{m_\varrho}(i, n, n+1, \ldots 2n-2)\frac{\partial \Delta_\varrho}{\partial z_\varrho} = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots n-1, \rho = n, n+1, \ldots 2n \quad 2.$$

Demnach folgt aus den Gleichungen (1)

$$(4)\quad \frac{\partial z_\varrho}{\partial z_i} A_{mi}(i, n, n+1, \ldots 2n-2) - A_{m_\varrho}(i, n, n+1, \ldots 2n-2) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

Wenn die Gleichungen (A) eindeutig lösbar sind, so finden zwischen den Grössen $z_1, z_2, \ldots z_{2n-2}$, welche der Gleichung (G) genügen, die n Differentialgleichungen

$$(J)\qquad \sum_1^{2n-2} {}_i f_k(z_i)\, dz_i = 0 \quad k = 1, 2, \ldots n$$

statt.

Man sieht, dass für unsere Functionen $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z)$ ein ähnliches Theorem besteht, wie für die Differentialquotienten der Integrale erster Gattung der algebraischen Functionen. Es ist bemerkenswerth, dass wir dieses Theorem in unserem allgemeinen Falle aus der Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen (A) direct herleiten konnten. Selbstverständlich gilt unsere Deduction auch für den speciellen Fall des Theorems bezüglich der Abelschen Integrale, welcher in der Theorie der Abelschen Functionen mit Hülfe des Abelschen Theorems hergeleitet wird.[1]

4.

In gleicher Weise, wie ich es für den besonderen Fall $n = 2$ bewiesen habe[2], gilt hier der Satz:

I. Damit die Gleichungen (A) eindeutig lösbar seien, dürfen nicht $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z)$ gleichzeitig für ein und denselben endlichen Werth von z verschwinden.

Dieses vorausgesetzt, folgern wir aus dem Vorhergehenden den Satz:

II. Die Gleichung (G) wird durch nicht mehr als $2n-2$ Werthsysteme $\left(z_i, f_k(z_i)\right)$ mit endlichem z_i befriedigt.

Denn genügt ausser den Werthsystemen $\left(z_i, f_k(z_i)\right)$ für $i = 1, 2, \ldots 2n-2$ noch $z = z', f_k(z) = f_k(z')$, so hat man nach dem Satze der vorigen Nummer (Gleichung (J))

---

[1] Vergl. Riemann, Theorie der Abelschen Functionen, in Borchardt's Journal B. 54. No. 14.

[2] S. z. B. meine erwähnte Arbeit in den Abhandlungen der Gött. Societät. 8. Jan. 1881. No. 3.

$$(1) \qquad \sum_{1}^{2n-2} f_k(z_i)\, dz_i = 0 \quad k = 1, 2, \ldots n$$

und

$$(2) \qquad \sum_{1}^{2n-2} f_k(z_i)\, dz_i - f_k(z_\alpha)\, dz_\alpha + f_k(z')\, dz' = 0 \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

wo α eine der Zahlen $1, 2, \ldots 2n-2$ bedeutet.

Durch Subtraction von (1) und (2) ergiebt sich

$$(3) \qquad f_k(z')\, dz' - f_k(z_\alpha)\, dz_\alpha = 0 \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Da $n-1$ von den Grössen z_i willkürlich gewählt werden können, so seien z. B. $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ willkürlich veränderlich. Aus (3) folgt z. B. successive für $\alpha = 1$, $\alpha = 2$

$$(4) \qquad f_k(z_1)\, dz_1 = f_k(z_2)\, dz_2 \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

woraus sich die Gleichungen

$$(5) \qquad \frac{f_k(z_1)}{f_1(z_1)} = \frac{f_k(z_2)}{f_1(z_2)} \quad k = 1, 2, \ldots n$$

ergeben würden, welche nicht Statt haben können, da z_1, z_2 von einander unabhängig sind.

Es ist ausserdem dem Satze I zu Folge nicht möglich, dass die Gleichung (G) durch einen constanten, d. h. von $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ unabhängigen endlichen Werth $z = b$ befriedigt werde, da dieses nur geschehen könnte, wenn (G) für willkürliche Werthe von $A_1, A_2, \ldots A_n$, durch $z = b$ befriedigt würde, oder dass $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z)$ gleichzeitig für $z = b$ verschwinden würden.

5.

Sind $z_n, z_{n+1}, \ldots z_{2n-2}$ unabhängige Variabeln, und bestimmt man die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_n$ so, dass die Werthsysteme $\left(z_i, f_k(z_i)\right)$ für $i = n, n+1, \ldots 2n-2$ der Gleichung (G) genügen, so sind die übrigen Werthsysteme $\left(z_i, f_k(z_i)\right)$ für $i = 1, 2, \ldots n-1$, welche (G) genügen, Functionen von $z_n, z_{n+1}, \ldots z_{2n-2}$, und es finden zwischen $z_1, z_2, \ldots z_{2n-2}$ die Gleichungen (J) statt.

Sind insbesondere $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots z_{2n-2}$ Constanten, und zwar $z_{n+i} = \gamma_i$, so werden $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ Functionen von z_n, welche den Differentialgleichungen (D) genügen. Hieraus folgt:

I. Das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (D) ist durch die Wurzeln der Gleichung

$$(K) \qquad \begin{vmatrix} f_1(z) & f_1(z_n) & f_1(\gamma_1) \cdots f_1(\gamma_{n-1}) \\ f_2(z) & f_2(z_n) & f_2(\gamma_1) \cdots f_2(\gamma_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(z) & f_n(z_n) & f_n(\gamma_1) \cdots f_n(\gamma_{n-1}) \end{vmatrix} = 0$$

mit der Unbekannten z dargestellt, in welcher $\gamma_1, \gamma_2,$ willkürliche Constanten bedeuten.

Aus der vorigen Nummer ergiebt sich:

II. Die Gleichung (K) wird durch nicht mehr als Werthenpaare $\big(z, f_k(z)\big)$ (Functionen von $z_n, f_k(z_n)\big)$ befried

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden Theil des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus diesen Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reinen Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder ihr fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch demselben Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und »Ertheilungen, Adressen, Reden und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird in der Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften und Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfingen und statt der vollständigen »Sitzungsberichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zuschicken zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu geben.

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich:

die Stücke vom Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,

— — — Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,

— — — Oktober bis Dezember zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fertigstellung des Register.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1882 nicht angekommen sein sollten, werden ersucht, hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen nur in Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1883 angebracht werden.

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen, sowie wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann) in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 ℳ.

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 6 ℳ.

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsberichte« oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften von Seiten der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in einzelnen Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Schriftkosten, zuzusenden. Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der genannten Buchhandlung in Verbindung setzen.

STR
Q3
M38

MATHEMATISCHE

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES

UND

MAY / 1991

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN.

HEFT III.

MÄRZ 1883.

BERLIN 1883.
VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
IN COMMISSION BEI FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ & GOSSMANN

der stätigen friedlichen Fortsetzung seiner unabläßigen Fürsorge für das Wohl des Vaterlandes beschieden gewesen ist; heute ist diese Reihe schon länger als das kriegerische Decennium, welches die Herrschaft unseres Landesherrn als preussischen Königs und Feldherrn des Norddeutschen Bundes eröffnete, und ihr noch eine gleich gesegnete Friedensreihe von Kaiserjahren sich anschliessen zu sehen, ist ebenso sehr unser innigster Wunsch, wie wir mit der frohesten Hoffnung darauf in das neue Lebensjahr unseres Allerhöchsten Herrn eintreten dürfen.

Sehen wir heute zurück auf den Verlauf des nächster Tage zu Ende gehenden Jahres, so müssen wir wiederum sagen, es ist Mühe und Arbeit gewesen, denn wie könnte bei der hohen Auffassung ihrer Stellung, welche die Fürsten aus hohenzollerschem Geschlecht seit undenklichen Zeiten vor ihres Gleichen auszeichnet, ein Jahr ihrer Regierung anders ausgefüllt sein, als von der ernstesten Mühe, der hingebendsten Arbeit in der Erfüllung der erhabenen Aufgaben ihres Berufs. Aber es ist auch köstlich gewesen in dem Erfolg von Mühe und Arbeit, denn wenn wieder einem Jahre unter hochgespannten Verhältnissen zwischen den Völkern Europas die Segnungen des Friedens erhalten sind, so danken diess wiederum dem gerechten, versöhnlichen und versöhnenden Sinn, dem einsichtsvollen und festen Walten unseres Kaisers alle guten Genien europäischer Cultur, die zwar nicht ein für alle Mal der Güter höchstes im politischen Frieden suchen darf, aber desselben gerade jetzt noch auf lange hinaus zu bedürfen scheint, um durch unbehinderte Entwickelung und Verwendung der Mittel ihrer moralischen Macht die ihr ringsum entstandenen verblendeten Gegner, deren schon mehrmals hier bei gleichem Anlass Erwähnung zu thun war, zu dauernder Unterwerfung zu zwingen. Eingehender der im speciellern Sinne politischen Geschichte des letzten Regierungsjahres Sr. Majestät zu gedenken, ist nicht am Orte, wenn die Akademie den Beginn des neuen feiert; dagegen gibt sie am heutigen Tage ihrem Mitgefühl an allem für den Herrscher persönlich Frohen und Traurigen den Ausdruck innigster Empfindung; denn sie durfte, gemeinsam mit jedem getreuen Bürger des preussischen Staats und des deutschen Reichs, aber auf Grund ihrer alttraditionellen nahen Verbindung mit dem Herrscherhause in nachbarlich froher, besonders warmer Theilnahme sich der Ereignisse freuen, welche das ablaufende Jahr für ihren kaiserlichen Herrn im eigenen Hause köstlich gemacht haben, musste aber auch mit ihm und für ihn tiefbekümmert mitempfinden, wenn das Schicksal, das für alle Sterbliche das Leid der Freude gleichmässig gesellt, der Mühe und Arbeit dieses Jahres auch Sorge und Trauer hinzufügte.

Ganz im besondern aber liegt es im Beruf der Akademie der

Wissenschaften, bei der Feier des Allerhöchsten Geburtsfestes dessen zu gedenken, was unter den Auspicien von Kaiser und König, sei es im Reich oder im engern Vaterlande, zur Pflege und Förderung der Wissenschaften geschehen ist, und die im endenden Jahre neu ersprossenen Zweige dem vollen Kranze einzuflechten, welcher ein Ruhmessymbol auch für Kaiser WILHELM's Friedensregierung ist. Wiederholt und mit Vorliebe ist solches an dieser Stelle geschehen, wenn die Akademie selbst der Gegenstand besonderer Allerhöchster Fürsorge gewesen war, oder an einem umfassendern Act vaterländischer Förderung der Wissenschaft sich hatte mitbetheiligen dürfen, oder wenn der Festredner frischer Freude über ausnehmend erwünschten Vorschub Ausdruck geben wollte, den das von ihm vertretene besondere Fach erfahren hatte. So habe ich bei früherm Anlass unter diesem Gesichtspunkt constatirt, wie viel die Astronomie seit Generationen der erleuchteten und liberalen Fürsorge preussischer Könige verdankt, wie der Regierung des ersten preussisch-deutschen Kaisers aber die gegenwärtig in Deutschland wirkenden Astronomen ganz besonders verpflichtet sind durch die grossartigen Stiftungen und Unternehmungen zum Besten ihres Fachs, durch welche einer vielfach schmerzlich empfundenen Inferiorität Deutschlands gegenüber manchen anderen Völkern in der Fülle und Macht der Forschungsmittel und einer nicht verdienten Beschämung über den dadurch bedingten Ausschluss von lockenden Gebieten internationaler Wettbewerbung ein Ende gemacht wurde. Ich hatte damals im Anschluss an einen weiter reichenden historischen Rückblick auf die Schöpfung des eben erstandenen glänzend ausgestatteten Instituts für astrophysikalische Forschung in Potsdam, auf die damals noch in der Errichtung begriffene, jetzt seit Jahresfrist vollendete grossartige Sternwarte der Kaiser WILHELM-Universität, und auf die Ausführung grosser Expeditionen zur Beobachtung des Venus-Durchgangs vom 8. December 1874 als auf die Grossthaten der Regierung Sr. Majestät des Kaisers und Königs hinzuweisen, durch welche die deutschen Astronomen wieder mit den Fachgenossen der bevorzugtesten Länder auf völlig gleichen Fuss gestellt worden waren.

Auf die letztgenannte wichtige Himmelserscheinung glaube ich bei der heutigen Veranlassung etwas eingehender zurückkommen zu dürfen. Sie wissen, dass dieselbe vor drei Monaten sich wiederholt hat, nunmehr aber erst nach einem Zeitraum von 121 Jahren wieder vorkommen wird, so dass den lebenden Astronomen die Verpflichtung oblag, die auf so lange hinaus letzte Gelegenheit zur wissenschaftlichen Verwerthung dieses Phänomens nach Möglichkeit auszunutzen. Es sind in Anerkennung dieser Verpflichtung auch vom Deutschen Reich wie das vorige Mal Expeditionen nach fernen Gegenden des

Erdballs ausgesandt worden, die ganz kürzlich zurückgekehrt sind, so dass heute von ihnen zu sprechen dem Gegenstande nach zeitgemäss erscheint. Und wenn durch die Gewährung der beträchtlichen für die Ausführung des Unternehmens benöthigten Mittel die deutschen Astronomen in dem abgelaufenen Jahre aufs neue in hohem Maasse der Regierung Sr. Majestät des Kaisers Wilhelm zu dem Dank verpflichtet worden sind, dem heute Ausdruck zu geben so allgemein sich ziemt, so liegt noch ein besonderer Anlass, des Unternehmens am Festtage des deutschen Kaisers zu gedenken, für den daran Betheiligten in der frischen Empfindung und unmittelbaren Wahrnehmung des mächtigen Rückhalts und der festen Stütze, welche die Zugehörigkeit zu dem neu gegründeten Reich den ausgesandten Forschern im fernsten Auslande gewährt; und ein besonderer Umstand, der es rechtfertigt, in der Festsitzung der preussischen Akademie von der Ausführung dieses Unternehmens zu berichten, ist darin gegeben, dass sie an dieser Ausführung wie 1874 so auch 1882 ihren selbständigen Antheil gehabt hat.

Die dieser Festsitzung gesteckten Grenzen gestatten nicht, hier die Zwecke aus einander zu setzen, um die es sich bei der Beobachtung der Venus-Durchgänge handelt, die Methoden zu erläutern, welche dabei zur Anwendung kommen, die so umfangreichen Arbeiten zu beschreiben, welche 1761 und 1769 zur Verwerthung der ältesten unter diesen Methoden gemacht sind, und welche 1874 auf gleich grossem Fusse zur verfeinerten Anwendung derselben Methode und zur Benutzung zweier seitdem gewonnenen neuen Messungsverfahren ausgeführt sind, die Resultate aufzuzählen, welche dadurch erlangt sind, und die Zuverlässigkeit festzustellen, welche dieselben beanspruchen können. Es ist diess auch nicht nöthig, denn über alle diese Gegenstände ist theils um die Zeit des Durchgangs von 1874, theils in der jüngsten Vergangenheit vielfach auch weiteren Kreisen berichtet worden. Ich muss nur kurz die Sachlage constatiren, welche sich nach dem Durchgang von 1874 ergeben hat. Derselbe hat unzweifelhaft einen wichtigen Beitrag zur Bestimmung der Sonnenentfernung geliefert, aber in so fern den Erwartungen nicht entsprochen, als die Astronomen überwiegend geglaubt hatten, durch ihn, event. unter späterer Zuhülfenahme des Durchgangs von 1882, eine für die Gegenwart und eine lange Reihe künftiger Decennien abschliessende Bestimmung jener wichtigen Constante zu erlangen, von bedeutend grösserer Genauigkeit, als irgend eine der anderen, neuen, in den letzten Decennien nicht ohne Erfolg versuchten Methoden zu erreichen gestattete. Diese Erwartung wurde 1874 von der Wiederholung des alten Verfahrens, das darin besteht die Zeiten der Antritte der Venus-

scheibe an den Sonnenrand zu beobachten, in Folge einer die Beobachter bei den wichtigeren inneren Berührungen überraschenden Wirkung der Atmosphäre der Venus vollständig getäuscht. Es zeigte sich die Planetenscheibe von einem Lichtsaum umgeben, welcher eine so allmähliche Vermittelung zwischen ihrem dunkeln Grunde und dem hellen Sonnenrand herstellte, dass eine scharfe Auffassung des Moments, in welchem die beiden Körper sich berührten, auch für unsere seit 1769 so hoch vervollkommneten Hülfsmittel unmöglich wurde. Zum Theil waren die Schwierigkeiten dieser Beobachtung vorausgesehen, und die deutschen Astronomen hatten deshalb von vorn herein eine andere Beobachtungs-Methode, vermittelst der sogenannten Heliometer, in den Vordergrund gestellt. Diese Instrumente, ursprünglich zur Messung des Sonnendurchmessers construirt und von da ihren Namen behaltend, haben in den ersten Decennien dieses Jahrhunderts durch unsern grossen Optiker FRAUNHOFER und seitdem noch weiter eine so hohe Vervollkommnung erhalten, dass sie das feinste Werkzeug für die Messung kleinerer Bogen am Himmel geworden sind. Ihre Anwendung, von unseren grossen Meistern, GAUSS, BESSEL und HANSEN, mit Vorliebe ausgebildet, ist fast ein Monopol der deutschen Astronomen geblieben, bis die von uns für 1874 gemachten Vorschläge und Nachweise die Aufmerksamkeit weiterer Kreise hervorragend auf diess Instrument gelenkt haben. Mit demselben sollten, zu irgend welchen Zeiten im ganzen Verlauf des Durchgangs, also, was an sich schon einen ungeheuern Vortheil ergab, viel unabhängiger von den Launen der Witterung als die an feste auf Secunden beschränkte Zeiten gebundenen Contactbeobachtungen, Entfernungen zwischen dem Mittelpunkt der Sonne und dem für die correspondirenden Stationen um verschiedene Beträge dagegen verschobenen Mittelpunkt des Planeten gemessen werden. In der That haben nun die von uns 1874 ausgesandten Instrumente dieser Art den gehegten Erwartungen genügend entsprochen, aber die Bestimmung der Sonnenentfernung hat aus den damit gemachten Beobachtungen nicht den voll entsprechenden Gewinn ziehen können. Wir hatten nämlich von unseren vier Heliometern drei nach der Südhalbkugel gesandt, und zwei fremdländische Expeditionen hatten sich gleichfalls dort unserm Beobachtungsplane angeschlossen. Für den Norden musste gleich gut gesorgt werden, wir sandten aber nur ein Heliometer dorthin, weil die russischen Collegen sich gleichfalls unserer Methode bedienen wollten und drei ganz neue und den unsrigen noch überlegene Heliometer auf ihrem eigenen Gebiete aufstellten. Ihre Stationen hatten aber Unglück, theils durch das Wetter, theils durch Schäden, welche der lange Landtransport in das Innerste Sibiriens den empfindlichen Messapparaten

zufügte, und so lieferte schliesslich nur unsere einzige nördliche Heliometer-Station ohne unabhängige Controle und Bestätigung und deshalb nicht ausreichend Material zur Vergleichung mit den im Süden vollständig genug gelingenden Messungen.

Endlich wurde 1874 zum ersten Male die Photographie als ein drittes ganz unabhängiges Hülfsmittel zur Beobachtung des Venus-Durchgangs benutzt. Es war diess ein Experiment, das von manchen mit grossen Erwartungen begleitet, von anderen wenigstens deshalb als wichtig anerkannt wurde, weil die photographische Beobachtungs-Methode unter anderen den nicht hoch genug anzuschlagenden Vortheil darbot, vermöge des instantanen Verlaufs einer Sonnenaufnahme noch unter Witterungsverhältnissen anwendbar zu bleiben, wo alle anderen Methoden ihren Dienst versagen mussten Niemand auch unter den weniger Erwartungsvollen wollte deshalb 1874 die Verantwortlichkeit auf sich nehmen, das Experiment unausgeführt zu lassen. Von allen grossen nationalen Expeditionsgruppen in umfassender Weise durchgeführt, hat dasselbe aber kaum ein Ergebniss geliefert, welches neben denen der anderen Methoden erheblich ins Gewicht fallen könnte.

Es darf den Astronomen nicht verargt werden, wenn sie, nachdem alle zu einer ausserordentlich hohen Summe aufgelaufene Anstrengung in Beobachtung und Berechnung, in Organisation und Administration der dem gelehrten Beruf in der Art ihrer Ausführung so fremden Unternehmungen und in der Verantwortlichkeit für die richtige wissenschaftliche Verwendung ungewöhnlich bedeutender ihnen anvertrauten öffentlichen Mittel nur einen so weit hinter der Hoffnung zurückbleibenden Erfolg erzielt hatte, nicht leichten Herzens mit dem Anfang dieses Jahrzehnts an die Frage der Beobachtung des neuen Durchgangs herangetreten sind. Es waren in der Zwischenzeit neue Anstrengungen gemacht worden, nachdem die Venus-Durchgänge den Nimbus der Superiorität anscheinend definitiv verloren hatten, verschiedene der neueren Methoden zur Bestimmung der Sonnenentfernung, durch Beobachtungen von Mars oder Gliedern der seine Bahn umschliessenden Asteroidengruppe, die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit und die Ableitung aus der Theorie des Mondes, noch weiter zu verfeinern, und es waren auch bereits wiederum mehrere Anwendungen derselben gemacht, die zum Theil wohl gelungen waren. Zum mindesten hatten diese Bemühungen einen Weg sicher gewiesen, auf welchem die künftige Thätigkeit der bestehenden Sternwarten, ohne auf die Wiederkehr ausserordentlicher Phänomene zu warten, in fortlaufender Approximation sich der Kenntniss der wahren Sonnenentfernung in dem jeweils dem Bedürfniss entsprechenden Grade

nähern kann. Deshalb mehrten sich die das vorige Mal noch vereinzelt gebliebenen Stimmen, welche nunmehr den bevorstehenden Venus-Durchgang der regelmässigen Sternwartenthätigkeit, als ein nur für die genauere Bestimmung des Venuslaufs und nicht mehr direct für die Bestimmung der Sonnenentfernung werthvolles Phänomen, überlassen wollten, und thatsächlich hat sich von diesen Erwägungen geleitet ein Staat, dessen Aufwendungen für die umfassende Verwerthung der Venusdurchgänge bis dahin jedes Mal in der ersten Linie gestanden hatten, diessmal gänzlich von der Beobachtung zurückgezogen. Die russischen Astronomen haben sich der eigenen Mitwirkung enthalten; einer Schädigung der Sache durch diesen Ausfall haben sie vorgebeugt, indem sie ihre werthvollsten für 1874 construirten Instrumente anderen Ländern für die Beobachtungen überlassen haben, die sie im eigenen Gebiete diessmal überhaupt nicht anstellen konnten. An allen anderen Stellen hat schliesslich doch das Gefühl der Verpflichtung überwogen, die 1874 gewonnenen Erfahrungen der Wiederholung einer Beobachtung zu Gute kommen zu lassen, die, wenn sie jetzt nicht geschah, auf so lange hinaus unmöglich blieb. Selbstverständlich war es von grosser Bedeutung, wenn wenigstens ein Theil derjenigen die Erscheinung nochmals beobachten konnte, welche dieselbe bereits in Wirklichkeit aus eigener Anschauung kannten; überdiess lagen die Verhältnisse in so fern günstiger, als der Planet 1882 erheblich tiefer in die Sonne eintrat, wodurch nicht allein die Dauer der zur Beobachtung verfügbaren Zeit von vier auf sechs Stunden verlängert, sondern auch die Beobachtung selbst erleichtert und in höherm Grade versichert wurde, so dass ein besseres Resultat als 1874 wohl mit Grund erhofft werden durfte. Für die deutschen Astronomen ist zumal die Erwägung maassgebend gewesen, dass damals der Erfolg für diejenige ihrer Beobachtungsmethoden, der sie von vorn herein das grösste Zutrauen geschenkt hatten, wie vorhin erörtert doch nur durch äussere Umstände verkürzt worden war; wir waren deshalb nicht unentschieden, unsere Heliometer nochmals hinauszusenden, und mussten nur wünschen, dass die Gunst der Witterung uns diessmal gleichmässig genügende Beobachtungen an beiden Endpunkten der grossen Basis gestatten würde. In einer verborgenen Falte hat auch bei denjenigen, welche 1874 den Lichtring um die Venus und seine Veränderungen während der Beobachtungszeit gesehen hatten, die Hoffnung geschlummert, dass er doch nicht jedes Mal die genaue Beobachtung der Ränderberührungen verhindern würde; und jedenfalls war es ein Leichtes, wenn einmal überhaupt auswärtige Stationen besetzt wurden, sie zugleich für diese Art der Beobachtung einzurichten. So wurden, nachdem die Reichsregierung die Ausführung von vier Expeditionen

genehmigt hatte, die Stationen für dieselben nach Möglichkeit für unsere Heliometer günstig gewählt und vertheilt, für die gleichen Stationen aber auch, und zwar noch in wesentlich reicherm und vollkommenerm Maasse als 1874, Mittel für die Beobachtung der Contacte bestimmt. Von einer Wiederholung der Photographien dagegen haben wir abgesehen. Die Discussion über ihre Verwendbarkeit ist nochmals eine sehr lebhafte gewesen, in der Entscheidung haben wir uns aber in Übereinstimmung mit der überall in Europa getroffenen befunden, von welcher erst unmittelbar vor der Ausführung die Franzosen theilweis wieder abgewichen sind. Leitende americanische Kreise haben von vorn herein an der Wiederholung ihres wenigstens in instrumenteller Hinsicht besser fundirten Verfahrens von 1874 festgehalten. Die Photographie hat uns gegenüber an ihrem Übergehen in ganz unbegründeter Empfindlichkeit Anstoss genommen; wir haben sie ausgeschlossen, nicht indem wir die Treue und Schärfe des speciell photographischen Processes oder die Unveränderlichkeit seiner Erzeugnisse irgendwie bemängeln wollten, sondern weil wir durch den unparteiisch und auf breitester Basis durchgeführten Versuch zu der Einsicht gelangt sind, dass die Verbindung der photographischen Platte mit dem astronomischen Messapparat wider die Natur ist, und ihre Unnatürlichkeit nur immer mehr hervortreten kann, je grössere Fortschritte einerseits die Herstellung und Behandlung photographischer Platten mit Bezug auf ihre legitime Verwendung macht und je feiner andererseits die Technik des Messens am Himmel und die Anforderungen an dieselbe sich ausbilden.

Zur Vorbereitung des Unternehmens war die Untersuchung aller auszusendenden Instrumente auszuführen, die auch für die 1874 schon benutzten wiederholt werden musste, weil kein astronomisches Instrument ein unveränderliches Individuum ist, und die Bestimmung aller zur Berechnung der Beobachtungen nöthigen Constanten vorzunehmen. Ferner waren die auszusendenden Beobachter in der gleichmässigen und sicheren Handhabung der Instrumente und in der Kenntniss der Besonderheiten aller bei dem Durchgang auszuführenden Beobachtungen auszubilden. Die ernsteste Sorge aber hat die Auswahl von Stationen gebildet, die zugleich günstige geographische Lage und möglichst gute Aussicht für das Wetter darbieten sollten. Verhältnissmässig einfach lagen die Sachen im Norden. Die östliche Hälfte der nordamericanischen Union bildete ein der Lage nach sehr günstiges Beobachtungsgebiet, welches zwar schon überreich mit ständigen, zum Theil über gewaltige Hülfsmittel der Beobachtung verfügenden Sternwarten besetzt war, welches wir aber in unserm Beobachtungsplan noch ganz selbständig voll berücksichtigen mussten, weil unsere Hauptmethode daselbst nicht

— wenigstens zu der Zeit noch gar nicht, wo wir diesen Plan endgültig feststellen mussten — vertreten war. Klimatologisch ist diess Gebiet ziemlich gut bekannt, und es ergab sich aus den mit Eifer in der Union gesammelten und nach Europa mitgetheilten Daten, dass Gegenden mit vorwiegend recht günstigem Wetter zu Wintersanfang für unsere Expeditionen nicht allein verhältnissmässig leicht erreichbar lagen, sondern dass in denselben auch Stationspunkte gewählt werden konnten, welche auch im übrigen alle nur wünschenswerthen Vortheile für die Etablirung derselben, ihren Aufenthalt und die Ausführung ihrer Arbeiten darboten. Eine dieser Gegenden bildet der von Long Island gegen die offene See gedeckte Küstenstrich von Connecticut, der sich unter der Breite von Neapel auch eines, zwar niedriger temperirten, aber in Bezug auf anhaltende Heiterkeit süditaliänischen Winterhimmels erfreut. Wir mussten uns etwas von der Küste entfernen, um nicht allzunahe an wichtige americanische Stationen zu kommen, namentlich um nicht etwa durch eine einzige nur locale Trübung mit dem einzigen inzwischen auf einer americanischen Sternwarte, in Newhaven, in Thätigkeit getretenen Heliometer zusammen um die Beobachtung betrogen zu werden, und wir schickten unsere Expedition nach der Hauptstadt des Staates, Hartford, zugleich überhaupt so weit nördlich, als es die Rücksicht auf den winterlich tiefen Sonnenstand erlaubte. Die zweite Nord-Expedition wurde so viel südlicher stationirt, als es möglich war, ohne von der gegen den Aequator hin abnehmenden Verschiebung der Venus auf der Sonnenscheibe erhebliches aufzuopfern; ein hier bis dahin wohl unbekannter, von den Americanern wegen seiner gesunden und sonnigen Lage in den Fichtenwäldern auf dem sandigen Plateau des westlichen Süd-Carolina hochgeschätzter Wintercurort, das kleine Städtchen Aiken, wurde zu ihrer Station gewählt. Beide diese nördlichen Stationen eigneten sich ihrer geographischen Lage nach namentlich vortrefflich zur Anwendung der heliometrischen Methode, und dass wenigstens eine eine genügende Menge von Beobachtungen erhalten würde, konnte mit sehr überwiegender Wahrscheinlichkeit gehofft werden.

Viel ungünstiger sah es im Süden aus. Um ähnliche Verschiebungen der Venus wie in Nordamerica nach der entgegengesetzten Seite zu erhalten, hätte man die Nachbarschaft des Südpols aufsuchen müssen; haben doch gewichtige Autoritäten in den ersten Verhandlungen beim Herannahen der letzten Durchgänge die Meinung vertreten, dass ein Fortschritt von denselben für die Bestimmung der Sonnenentfernung nur zu erwarten sei, wenn es gelänge, eine Kette von Stationen auf der erst allein von Sir JAMES Ross unter dem 78. Breitengrade erreichten Küste des grossen antarctischen Landes bis zu den

Erebus- und Terror-Vulcanen hin zu errichten. Diese Projecte sind später von niemand wieder aufgenommen; wir haben 1882 nebst Franzosen, Nordamericanern und Belgiern, die dort ausser den südamericanischen Staaten, Brasilien voran, mit uns concurrirten, nur die schmale Operationsbasis des zwischen den Parallelen der Plata-Mündung und des Feuerlandes liegenden Theiles von Südamerica benutzen zu können geglaubt. Möglichst weit längs derselben gegen den Südpol vorzugehen gebot das Bedürfniss, ein möglichst grosses und günstiges Messungsobject zu erhalten, während die Rücksicht zugleich auf das Wetter und auf die Erreichbarkeit und sonstige Brauchbarkeit der Stationen zu verbieten schien über das diesseitige Ende, über Montevideo hinauszugehen. Es erschien als ein besonderer Glücksfall, dass uns in dieser Verlegenheit die gerade erscheinenden Publicationen des wichtigen meteorologischen Netzes, welches der hochverdiente nordamericanische Astronom Gould vor etwa zehn Jahren in der Argentinischen Republik gegründet hat, in dem vier Breitengrade südlicher gelegenen Küstenstädtchen Bahia Blanca eine Station nachwiesen, für welche die meteorologischen Bedingungen sogar vielleicht noch günstiger und zugleich die geometrischen schon merklich verbessert waren. Da wir mit grosser Zuversicht darauf zählen durften, dass unsere dritte Expedition, welche wir dorthin sandten, zum mindesten einen grossen Theil des Durchgangs würde beobachten können, wurde es möglich, mit der vierten Expedition, mit welcher ich Ihnen den Verlauf eines derartigen Unternehmens etwas ausführlicher schildern will, das gewagte, aber wenn es gelang besonders werthvolle Ergebnisse verheissende Experiment zu machen, so weit gegen Süden vorzugehen, als einigermaassen ausreichende und nicht geradezu abschreckende Nachweise zur Beurtheilung der meteorologischen Verhältnisse und gesicherte Verbindungen vorhanden wären. Dafür konnten nur Stanley auf den Falkland-Inseln und Punta Arenas an der Magellan-Strasse als Stationen in Betracht kommen; eine noch entlegenere Station, Süd-Georgien, ist zwar ebenfalls mit gleichartigen Mitteln zur gleichförmigen Mitausführung unseres Beobachtungsplanes versehen und von uns darauf vorbereitet worden, sie ist aber bekanntlich um ganz anderer Zwecke willen, von der deutschen Polar-Commission, besetzt worden. Wir wissen noch nicht, ob die sehr geringen und zu einer Besetzung lediglich zu astronomischen Zwecken nicht ausreichenden Hoffnungen, dort den Durchgang zu beobachten, sich erfüllt haben.

Auf den Falkland-Inseln sind neuerdings einige Jahre hindurch meteorologische Aufzeichnungen gemacht, die das verrufene Klima dieser rauhen Inselgruppe nicht mehr in einem ganz trostlosen Lichte

erscheinen liessen, vielmehr in Aussicht stellten, dass man einen Theil des Durchgangs, wenig wahrscheinlich allerdings einen grossen Theil, dort würde sehen können. Aus Punta Arenas lagen sechsjährige auf Veranlassung eines der frühern Gouverneure angestellte meteorologische Beobachtungen vor, die bezüglich des hauptsächlich uns interessirenden Factors, der Himmelsbedeckung, viel schlimmer aussahen, aber, in einer von derjenigen der europäischen Meteorologen abweichenden Terminologie mitgetheilt, nicht ganz verständlich waren. Die deshalb nach Punta Arenas gerichteten Anfragen fanden Beantwortungen, die überraschend günstig lauteten, aber sich mit den sechsjährigen Beobachtungen überhaupt in einem ganz unbegreiflichen Widerspruch befanden, welchen zu lösen von hier aus erfolglos versucht wurde. Mit Zuhülfenahme aller erreichbaren Aufzeichnungen der Schiffe unserer Kriegs- und Handels-Marine, welche die Magellan-Strasse passirt haben, seit sie ein von Dampfschiffen befahrener Seeweg geworden ist, wurde das Urtheil über das in Punta Arenas zu erwartende Wetter endlich ungefähr dahin festgestellt, dass das Gelingen einer vollständigen Durchgangsbeobachtung daselbst nicht zu erwarten, aber auch vollständiges Misslingen wenig wahrscheinlich sei; wir hofften, dass dort ein Stück des Durchgangs und zwar ein etwas grösseres als auf den Falkland-Inseln sichtbar sein würde — hier wohl nur ein Viertel, dort vielleicht die Hälfte. Diese Ansicht, welche das Ziel der Expedition bestimmte, entsprach auch der Lage des Orts, mitten in der Strasse etwas diesseits der Südspitze des americanischen Continents, an welcher das von den Segelschiffen noch mehr als Cap Horn gefürchtete Cap Froward eine der schärfsten Wetterscheiden der Welt bildet. Jenseits derselben überschütten die beständig das Südende Americas fegenden Stürme die undurchdringlichen Wälder der Cordillerenhänge mit fast unablässigen Schauern von Regen, Hagel und Schnee, während sie entlang der östlichen Hälfte der Strasse den grössten Theil des Jahres hindurch die patagonischen Terrassen unter, wie die Reisenden sagen, die Astronomen vermuthlich aber hier so wenig wie anderswo bestätigt finden möchten, immerwährend blauem Himmel fast zur Wüste ausdörren. Wir wären deshalb, um die Beobachtung mehr zu sichern, viel lieber am Ostende der Strasse geblieben, diess wäre aber nur möglich gewesen, wenn die Expedition, wie es 1874 an mehreren Punkten der Fall war, ein eigenes Schiff zu ihrer Verfügung gehabt und alles zum Aufenthalt Erforderliche nach ihrem Bestimmungsort mitgebracht hätte, was die Umstände diessmal ausgeschlossen hatten. Wir konnten nur einen bewohnten und ohne besondere Vorkehrungen erreichbaren Ort wählen, und so blieb, um in der Magellan-Strasse zu beobachten, keine Wahl neben Punta Arenas, denn ausser diesem

Städtchen gibt es nur noch einen ständig bewohnten Ort an derselben, die grosse Estancia der chilenischen Regierung Agua Fresca, die aber dem gefürchteten Cap Froward noch näher liegt und direct in den Berichten aus Punta Arenas ungünstiger geschildert wurde.

Ganz abgesehen von dem immer noch verbleibenden Zweifel wie das Wetter in Punta Arenas nach astronomischen Bedürfnissen beurtheilt sich wirklich herausstellen würde, bestand auch noch grosse Unsicherheit darüber, wie eine Expedition an diesem Ort existiren und arbeiten könnte. Die geringe Bekanntschaft mit dortigen Verhältnissen, welcher alle Nachforschungen diesseits des Oceans begegneten, obwohl die Schiffe einer Hamburger Dampferlinie nach der südamericanischen Westküste seit zehn Jahren, jetzt regelmässig alle drei Wochen, durch die Strasse gehen, und eine englische Postlinie dieselbe seit noch längerer Zeit und noch häufiger befährt, und das ganz zufällig im störendsten Moment für die Vorbereitung eintretende Abreissen der weitläufig drüben mehrfach angeknüpften Verbindungen liess die Aussendung dieser Expedition in etwas beängstigendem Maasse als einen Stoss ins Blaue erscheinen. Das Mögliche ihn von hier aus sicher zu lenken, war geschehen: das auf der ostamericanischen Station befindliche Fahrzeug der Kaiserlichen Marine sollte nach dankenswerther Anordnung des Hrn. Ministers von Stosch gleichzeitig mit der Ankunft der Expedition in Punta Arenas eintreffen, um derselben bei dem Aufbau der Sternwarte behülflich zu sein; aller Bedarf, dessen Fehlen am Orte nur wahrscheinlich war, wurde auf die Gefahr einer ganz unnützen Belastung hin mitgeführt; die ernstliche Sorge aber, wie etwa dennoch den Arbeiten der Expedition sich entgegenstellende Hindernisse beseitigt und wie weiter überhaupt die vollständige Durchführbarkeit des wissenschaftlichen Programms beider Südexpeditionen gesichert werden sollte, gab schliesslich den Anlass, sie beide abweichend von den Nordexpeditionen, von denen nur eine jede für sich abgeschlossene Instructionen auszuführen hatte, unter eine gemeinschaftliche mit discretionärer Vollmacht ausgestattete Leitung zu stellen, die zunächst an dem unsichersten und schwierigsten Punkt unmittelbar einzutreten hatte.

Die wissenschaftliche Aufgabe der nach Punta Arenas entsandten Expedition bestand erstens darin, am 6. December, von den Nebenarbeiten zu geschweigen, die Ortsbestimmung der Venus während des ganzen Verlaufs des Durchgangs heliometrisch auszuführen, wofür sie mit einem von ihren drei Astronomen gemeinschaftlich anzuwendenden Fraunhofer'schen Heliometer von $3^1/_2$ Fuss Brennweite ausgerüstet war, und die Zeiten der ersten und zweiten Ränderberührung beim Anfang sowohl als beim Ende des Durchgangs zu beobachten, wofür

drei vorzügliche Fernröhre, ein sechsfüssiges und ein fünffüssiges von FRAUNHOFER und ein sechsfüssiges von seinem Nachfolger MERZ mit helioskopischen Vorrichtungen verschiedener Art mitgegeben waren. Zweitens musste die Expedition die geographische Position des Beobachtungsorts bestimmen und hatte eins der stärksten transportabelen Passagen-Instrumente und ein grosses Universal-Instrument zur doppelten Beobachtung der dazu, neben den an den Refractoren zu beobachtenden Sternbedeckungen, dienlichen Mondculminationen und zur Beobachtung von Sternhöhen, sowie zur fortlaufenden Bestimmung der Ortszeit. Ihre dritte Hauptaufgabe bestand darin, durch Beobachtungen auf der Station selbst, sämmtliche zur Verwendung gelangende Instrumente, insonderheit das Heliometer, so vollständig zu untersuchen und die zur Reduction der Beobachtungen an denselben erforderlichen Constanten so genau zu bestimmen, dass eine scharfe Berechnung der Durchgangsbeobachtung nöthigenfalls ohne Zuhülfenahme der Controlbestimmungen vor Aussendung und nach Rückkehr der Instrumente gemacht werden könnte, für den Fall nämlich, dass eins der benutzten Instrumente auf einer Reise sich verändert haben oder etwa auf der Rückreise verloren gehen sollte. Schliesslich hatte die Magellan-Expedition die besondere Aufgabe ausser diesen mit den anderen Expeditionen gemeinsamen, zur genaueren Längenbestimmung eine chronometrische Verbindung mit Montevideo, der letzten telegraphisch von Europa aus bestimmten Station auf ihrem Wege, durch wiederholte Zeitübertragungen auszuführen und bei Gelegenheit einer derselben mit der Bahia Blanca-Expedition zusammen die Längendifferenz zwischen deren Station und Montevideo telegraphisch festzustellen. Für diesen Zweck wurde die Magellan-Expedition mit fünfzehn eigens ausgewählten Schiffschronometern ausgerüstet, von denen zwölf nebst einem chronometrischen Thermometer zu einem grossen Übertragungsapparat verbunden wurden, während die anderen drei nach Bedarf demselben angeschlossen oder als Beobachtungsuhren benutzt werden konnten.

Den sehr umfangreichen Apparat an kleineren Instrumenten und Hülfsgeräth aufzuzählen würde zu weit führen.

Die zu dritt genannte Aufgabe, die gehörige Untersuchung der Instrumente an Ort und Stelle, erforderte, dass alle Expeditionen geraume Zeit vor dem Durchgang an ihren Bestimmungsorten eintrafen. So gieng die Magellan-Expedition, nachdem eine Abtheilung derselben bereits am 1. September nach Montevideo zur Einrichtung der dortigen Zeitstation vorausgegangen war, am 9. September mit dem Dampfer Ramses der Kosmoslinie von Hamburg ab, der zunächst in Antwerpen seine Ladung vervollständigte und von dort

am 14. September nach S. Vincent auslief. Diese schauerlich wüste und zerrissene, von brennender Sonne versengte Felseninsel hat vor ihren theilweise fruchtbareren Genossinnen in der Cap Verde-Gruppe Wichtigkeit dadurch erlangt, dass sie in Porto Grande den besten Hafen besitzt, der im atlantischen Ocean zwischen der Strasse von Gibraltar und hohen südlichen Breiten zu finden ist; sie ist deshalb zur Kohlenstation für die Mehrzahl der zwischen Europa und Südamerica und Südafrica cursirenden Dampfer gewählt. Der Aufenthalt daselbst am 25. September gab Gelegenheit, durch Zeitbestimmungen an einem gleichfalls neuerdings telegraphisch sehr sicher an Europa angeschlossenen Punkte den Seegang der Chronometer zu controliren und den mächtigen Cometen nach Europa zu melden, der, gewiss seit Jahrhunderten die grossartigste Erscheinung ihrer Art, ganz überraschend am frühen Morgen desselben Tages sichtbar geworden, wie sich indess später herausstellte, nur durch anhaltend trübes Wetter schon längere Zeit verdeckt gewesen war. Der gleichfalls nur auf Stunden beschränkte Aufenthalt in Montevideo am 11. October reichte gerade aus, die Verhandlungen mit der englischen Kabelgesellschaft wegen der Längenbestimmung zum erwünschten Abschluss zu bringen und diejenigen mit der argentinischen Regierung einzuleiten; das in solchen Fällen gewohnte Entgegenkommen fand sich auch hier und gieng sogar über die gehegten Erwartungen hinaus, indem ohne Anstand eine directe Verbindung des Plata-Kabels mit der in Buenos Ayres beginnenden Landlinie zugestanden wurde, während sich die Kabelgesellschaften sonst regelmässig gegen solche Verbindungen wegen der Blitzgefahr sträuben. Dadurch wurde das Programm für die Verbindung von Bahia Blanca mit Montevideo in überaus erwünschter Weise vereinfacht, indem die sehr lästige Nothwendigkeit fortfiel, noch eine Übertragungsstation in Buenos Ayres zu besetzen. Nachdem die vorausgegangene Expeditionsabtheilung eingeschifft war, dampfte der Ramses aus den hässlichen schlammigen aufgeregten Fluthen des tückischen Silberstromes hinaus südwärts weiter. Patagonische Frühlingslüfte brachten das hunderttheilige Thermometer, das lange mit geringer Schwankung hoch in den zwanziger Graden stehen geblieben war, in rapidem Sinken auf 6 Grad herab und wühlten die grünen Küstengewässer stürmisch auf, so dass nur die Nähe des Zieles über die Unbehaglichkeit der Situation hinwegsehen liess. Am 16. Abends hemmte das Schiff seinen bis dahin von Hafen zu Hafen Tag und Nacht ununterbrochenen Lauf vor dem Eingang der Magellan-Strasse und gieng bis zum Morgengrauen im Schutz des Caps der Jungfrauen, der Südostecke des americanischen Continents, vor Anker, weil vorliegende Bänke und Felsen unter dem Wasser die Einfahrt bei Nacht

zu gefährlich machen. Am folgenden Morgen befand es sich in dem merkwürdigen Spalt, der von dem Continent die ganz gleichartige grosse Feuerland-Insel abgebrochen hat; den wüthenden Sturm, der, in der That unter dem gerühmten sonnenhellen durchsichtigen Himmel, das Fortschreiten in der wechselnden Folge der engen Canäle und seeartigen Becken des Ostarms wehren wollte, überwand die Wucht der in Höhe von vierzig Fuss in die Strasse hineinstürzenden atlantischen Fluthwelle, und bis fünf Uhr Nachmittags waren die 120 Seemeilen von dem Eingang ab bis zur Rhede von Punta Arenas zurückgelegt. Die Expedition kam nach günstiger Fahrt noch drei Tage vor der planmässigen Zeit an, und nicht gering war die Sorge, dass das Hülfe versprechende Kriegsfahrzeug, welches in Folge einer in Montevideo missverstandenen Depesche den Ramses erst mehrere Tage nach seiner Zeit erwartete und unter Segel von dort nach der Strasse abgegangen war, nun zu spät kommen möchte. Kurz vorher noch durch das Passiren eines vor dem Sturme beiliegenden, ganz dem erwarteten ähnlichen Schiffs verstärkt, das sich später aber als ein englisches erwies, war sie unnöthig gewesen; von den Masten des schmucken Kanonenboots, neben welchem der Anker zum letzten Male fiel, flatterte die deutsche Kriegsflagge. Unnöthig war auch die Sorge gewesen, die auf der stürmischen Fahrt seit Montevideo die mit den Ortsverhältnissen bereits bekannten für Punta Arenas bestimmten Reisenden schon viel beschäftigt, und den beladen mit so grosser Verantwortlichkeit unbekannten Dingen Entgegengehenden angesteckt hatte, wie Personen und Material würden an Land geschafft werden können; je tiefer in der Strasse, desto schlechter war der Tag zwar für den Astronomen, aber desto besser für den Seefahrer geworden, dessen Interesse heute noch das überwiegende war; Punta Arenas lag unter ganz und gleichförmig wolkenüberzogenem Himmel, aber an spiegelglattem Wasser.

Wie in Wetter und See, war in der ganzen Landschaft ein überraschender Wechsel vor sich gegangen. Auf einer Strecke von etwa hundert Seemeilen wird der im Vergleich mit den labyrinthischen Canälen der Westseite in einfachem Zuge eingeschnittene Ostarm der Strasse beiderseits von einförmigen niedrigen kahlen Steilwänden begrenzt, die, auf der patagonischen Seite meist zwischen 100 und 200 Fuss und auf der feuerländischen nur halb so hoch, gleichwohl für alle anderen lebendigen Wesen als die Schaaren der in ihren Löchern nistenden Seevögel unnahbar erscheinen; in fast senkrechtem Sturze fallen ihre monotonen Langwände, und ihre schauerlich zerklüfteten Vorsprünge an den Biegungen der Strasse, ohne Vorland zum Wasser herab. Darüber liegt sanft ansteigendes, flach gewelltes Plateauland, theils kahler, heller Fels- oder Erdboden, theils bekleidet mit dürf-

tigem graugrünem Grase und vereinzelten verkümmerten Büschen, jenen Tag ein Bild ödester Verlassenheit, während später, bei der Ausfahrt aus der Strasse im Sommer, auch dieser Theil des Landes belebt war von den Rudeln grasender Guanacos und den langen Rauchsäulen der Grasfeuer, mit denen die Wilden sie und die zahlreichen Strausse einschliessen, um die wehrlosen flüchtigen Thiere in den Bereich der Lazos und Bolas zu bringen, die sie noch heute den Feuerwaffen vorziehen. Hinter diesem Plateau sieht man im Norden noch die zweite patagonische Terrasse sich erheben, die, 600—800 Fuss hoch, gleichfalls fast ununterbrochen ein einförmig horizontales, nur hier und da von einzelnen Spitzbergen überragtes Profil zeigt. Der einzige Wechsel besteht auf dieser langen Strecke in dem Zurücktreten und Wiederannähern der Ufer, zwischen denen das hellgrüne Wasser hier gerundete Becken, deren niedrige Ränder selbst in dieser klaren Atmosphäre in Duft verschwimmen, dort Canäle ausfüllt, die sich bis zu nur zwei Seemeilen Breite verengen. Aus dem letzten dieser Pässe, den sogenannten Second Narrows der auf der Commandobrücke ausgebreiteten und in dem schwierigen Fahrwasser unablässig mit den Ufercontouren verglichenen englischen Admiralitätskarten herauskommend, geht das Schiff zwischen den kleinen Inseln S. Marta und S. Magdalena, die unnahbaren Castellen gleich mitten aus dem Wasser aufsteigen, hindurch, und an der grösseren flacheren, nur einen abgerissenen Theil der patagonischen Pampa bildenden Elisabeth-Insel vorbei; in dem Moment, wo hinter dieser mit Cap Negro die scharf markirte Grenze zwischen Pampa und Cordillere auftaucht, verändert sich das Bild mit einem Schlage vollständig. Die festländische Küste biegt rechtwinklig nach Süden um, dem Zuge der Cordillere folgend, deren vom Fuss bis zum schneebedeckten Rücken dicht von grünem Waldschmuck bekleidete, in den ernst-schönen Formen unseres Schwarzwalds profilirte Vorberge, Kette dicht hinter Kette, bis 1500 Fuss hoch ansteigend sie umsäumen. Linker Hand gegenüber springt die grosse Feuerland-Insel, erst in langem, nach dem Innern zu hoch ansteigenden Plateau, weiterhin in flachem, unter dem Wasserspiegel bleibendem Rande weit zurück, Raum lassend für die grossen zusammenhängenden Becken des Broad Reach, Froward Reach und der Useless Bay der Karten. Geschlossen werden dieselben durch die quer vorliegende Vorderhälfte von Dawson Island mit gleichem Waldgebirge wie auf dem Festlande, neben welchem nur schmale Wasserfäden den Weg zum pacifischen Weltmeer weisen; und in ungeheuerm Halbkreis wird das ganze Bild eingerahmt von den kahlen, vergletscherten Wänden der mit ewigem Schnee bedeckten kühngeschnittenen und in malerischen

Gruppen sich an einander schliessenden Felsberge, mit welchen der Hauptzug der Cordillere von dem jenseitigen Ufer der nur durch schmales Band mit dem Festlande verbundenen grossen Braunschweig-Halbinsel über Cap Froward, Clarence Island und die jenseitige Hälfte von Dawson Island hinweg nach dem Südrande der grossen Feuerland-Insel übersetzt. Den Wall von Alpenbergen, mit denen sie ihn gegen die Fluthen des Südmeers schützt, begrenzen an den beiden Enden 7000 Fuss hoch aus dem Meere hervorragende Colosse, M. Sarmiento und M. Darwin, ersterer an das Matterhorn erinnernd und beide noch in dieser Entfernung von 90 und 120 Seemeilen imposante Gebilde.

An dem gerade von Nord nach Süd gerichteten Ostrande der Braunschweig-Halbinsel, etwa auf einem Drittel seiner Länge von Cap Negro bis zu Cap Froward oder dem etwas nähern, hier den Horizont begrenzenden und mit Cap S. Isidro ins Meer fallenden M. Tarn, liegt Punta Arenas. Der Name einer weit in die Strasse vorspringenden sandigen Anschwemmung eines der zahlreich von der Cordillere herabkommenden Flüsschen ist auf den Ort übertragen, welcher selbst einige Kilometer südlicher, auf einem sanften Hange zwischen dem schmalen Strande und einem etwa 150 Fuss hohen Hügelzug liegt. Ein Bebauungsplan nach spanisch-americanischer Art, mit breiten rechtwinklig sich nahe in den Cardinalrichtungen der Windrose kreuzenden Strassen und der grossen Plaza im Centrum, ist für mehrere Zehntausende von Einwohnern berechnet und zieht sich weit in die Hügel hinein; aber bis zum Jahre 1877 nur eine unbedeutende Strafcolonie, zählt der seitdem zur Hauptstadt (oder vielmehr bis jetzt einzigen Stadt) des chilenischen Territorio de Colonization erhobene Ort auch jetzt erst etwa anderthalbtausend Einwohner, und ist nur eine Gruppe weitläufig auf dem grünen Rasenhang zerstreuter Holzhäuserchen, die nur die Richtung der zunächst am Meere gelegenen Strassen durch einen hier und da zusammenhängendern Zug markiren. Ihre Erscheinung in primitiven Formen und theils in der Naturfarbe des verwitterten Holzes, theils, mit dem sonderbaren Leuchtthurme, der das hervorragendste Object am Strande bildet, in phantastisch buntem Anstrich, passt aber gerade in die Landschaft, in deren Anblick das in der Öde langer Seefahrt für die Reize des Festlandes doppelt empfänglich gewordene Auge schwelgt. Eine befremdliche Störung ruft nur ein weit und breit ausgedehntes Leichenfeld hervor, welches den Ort umgibt; erst ganz nahe herangekommen, vermag man zu erkennen, dass die zahllosen wie Grabsteine umherstehenden bleichen Stümpfe Stämmen angehören, welche einem ungeheuern Waldbrand zum Opfer gefallen sind und von denen noch viele verkohlt zwischen ihnen liegen; auf gut spanisch hatte man für den Plan der Zukunftsstadt im Urwald

Luft gemacht, und der Aufstand der Deportirten, welcher 1877 fast den ganzen Ort in Asche legte, hatte ein Übriges gethan.

Doch es bleibt keine Zeit zu solcher Betrachtung mehr; sowie der Anker gefallen und die Visite durch die Hafenbehörde erfolgt ist, beginnt der Expeditionsdienst. Mit dem Commandanten S. M. Kbts. Albatross wird die Hülfsleistung durch seine Mannschaften vereinbart, die gleich den nächsten Tag die Fundamente für die Sternwarte bauen sollen. Darauf werden die Chronometer und Instrumente zur Zeitbestimmung an Land gebracht, um die erste Möglichkeit zu einer solchen zu benutzen; bis zu den letzten Resten des Tageslichts wird die Umgebung des Orts recognoscirt und schliesslich ein passender Platz für die Sternwarte gewählt, zum Bleiben am Lande ist aber heute noch keine Möglichkeit; Beobachten verhindert ohnediess die constant bleibende Bewölkung. Die Nacht hindurch wird das Material aus dem Dampfer in Leichterfahrzeuge übergeladen, die mit der Fluth auf den etwa ein Kilometer entfernten Strand gesetzt werden, um dann bei Ebbe dort entladen zu werden. Mit den letzten Ladungen gehen am andern Morgen die Astronomen an Land; sogleich lichtet auch der Ramses seinen Anker und verschwindet bereits am Horizont, während noch am Ufer entlöscht wird.

Kurze Sonnenblicke gestatteten an diesem Tage Zeitbestimmungen durch Spiegelinstrumente, so dass, wenngleich die in den nächsten Tagen eifrig gemachten Versuche, sie durch solche an Meridianinstrumenten zu ersetzen, erst nach längerer Zeit gelangen, doch die erste Längenverbindung mit Montevideo als befriedigend ausgefallen angesehen werden konnte. Im übrigen aber fiengen die Arbeiten der Expedition schlecht an. Zwar der Grundriss der Sternwarte wurde am ersten Tage unter strömendem Regen abgesteckt, welcher die Theilungen der Compasse unleserlich machte und so bewirkte, dass die Hauptaxe des Gebäudes schliesslich ein gutes Stück aus dem Meridian gerieth, jedesmal nachher ein Ärgerniss für den Astronomen, der eine Culmination beobachtete, sonst ohne Nachtheil; aber mehr als ein paar Steinkisten konnten an diesem Tage nicht zu den Arbeitern hinaufgeschafft werden. Mit dem Expeditions-Material war zufällig mit dem gleichen Schiff eine fast eben so umfangreiche Importsendung eines der beiden Häuser gekommen, welche den auswärtigen Handel der Magellan-Strasse vermitteln, und eine solche Masse, wie sie nach dem Orte wohl kaum jemals nach seiner Gründung gelangt war, in kurzer Zeit zu bewältigen reichten die vorhandenen schwerfälligen Transportmittel nicht aus. Unsere Kisten blieben fast alle am Strande liegen, und konnten nur noch nach Möglichkeit über Hochwassermarke hinaufgezogen werden. In der folgenden Nacht aber erhob sich

ein gewaltiger Sturm, in dem der Albatross nur unter Dampf und vor mehreren Ankern sich auf seiner Stelle halten konnte, und trieb die See gegen das Ufer weit über die gewöhnliche Fluthhöhe hinauf. Noch am folgenden Morgen lag fast das ganze astronomische Material im Wasser, doch Dank der grossen bei der Aussendung angewandten Sorgfalt im Verpacken und im Ausschluss der Feuchtigkeit von allen wichtigen Stücken waren ernste Beschädigungen nicht zu beklagen. Trostloser war der Anblick, das Material noch nachher eine Reihe von Tagen auf dem Beobachtungsplatze den Unbilden der Witterung preisgegeben sehen zu müssen, wo Stürme mit Regen, Hagel und Schnee, nur zuweilen von besseren Zeiten unterbrochen, den Aufbau der Sternwarte verzögerten. Doch gelang es im Verlauf von zehn Tagen alle Instrumente in Position zu bringen und beobachtungsfähig herzurichten, und am letzten October konnte den Autoritäten von Punta Arenas und den vielen unter seinen privaten Bewohnern, welche im gefälligsten Entgegenkommen beeifert waren, der Expedition dort den Aufenthalt und die Ausführung ihrer Arbeit möglich zu machen, in festlicher Weise ein astronomisches Observatorium gezeigt und erklärt werden, wie es in so hoher südlicher Breite noch niemals gestanden hatte, klein in den Dimensionen seiner zierlichen Eisen- und Segeltuch-Construction, aber an Leistungsfähigkeit seiner Ausrüstung mit Material und Personal manchem ständigen Institut der alten Welt überlegen.

Schon am folgenden Tage musste das Vorüberkommen des englischen Postdampfers benutzt werden, eine Abtheilung der Expedition mit allen entbehrlichen Chronometern nach Montevideo zu schicken, um die Längenverbindung ein zweites und bei der Rückfahrt ein drittes Mal herzustellen und die telegraphischen mit Bahia Blanca vereinbarten Operationen auszuführen. Die in Punta Arenas zurückbleibenden Astronomen standen Nacht für Nacht in Sturm und bitterer Kälte an den Instrumenten, Sternbedeckungen und Mondculminationen für die Längenbestimmung zu erhalten, es war trockener und die Sterne schienen oft genug hell, aber das Wetter blieb unbeständig in einem aller Beschreibung spottenden Grade und fast alle wie die der Bedeckungen und Culminationen an bestimmte Momente gebundene Beobachtungen giengen Wochen lang einfach in den Wolken verloren, während die hellen Intervalle zwischen denselben auch nur selten lang genug waren, die Ausführung einer der Beobachtungen zur Untersuchung des Heliometers zu gestatten, die zu beliebiger Zeit in jeder Nacht hätten gemacht werden können, deren jede aber erforderte, dass wenigstens eine Viertelstunde lang eine bestimmte Stelle des Himmels wolkenfrei blieb. Bei Tage war es in so fern besser, als die Wolken,

welche die nächtlichen Beobachtungen in solchem Maasse vereitelten, häufig, namentlich in frühen Vormittagsstunden, nicht so dicht waren, dass sie die Sonne unsichtbar oder ihre Contouren bis zur Unmessbarkeit undeutlich gemacht hätten; so gelangen nicht allein die auch für die Untersuchung des Heliometers vorgeschriebenen Sonnenbeobachtungen in ziemlich befriedigender Zahl, sondern es wurde auch durch die wirkliche Einsicht in den Witterungscharakter der Gegend die vorher gehegte Hoffnung bestärkt, dass die Durchgangsbeobachtung für das Heliometer nicht verloren gehen würde, während es freilich schien, dass auf die Contactbeobachtungen gänzlich würde verzichtet werden müssen. Um die Mitte des Monats trat besseres Wetter ein; vier oder fünf auf einander folgende fast durchweg klare und, was noch merkwürdiger und gleichfalls höchst werthvoll für die Beobachtungen war, ruhige Nächte wurden bis an die äusserste Grenze des Möglichen ausgenutzt, und wenn es darauf wieder schlechter wurde, blieben doch wenigstens die Mondculminationen noch einige Zeit hindurch nun von eigenem Glücke begünstigt, so dass, als gegen Ende des Monats wieder eine Periode ganz bösartigen Wetters die Beobachtungen unterbrach, auch für die absolute Längenbestimmung nicht unbefriedigendes Material vorlag.

Der Anschluss an Montevideo war, wie die am 21. November mit englischem Postdampfer zurückkommende Abtheilung meldete, anscheinend wiederum wohl gelungen, ebenso nach Überwindung einiger Schwierigkeiten, wie sie bei telegraphischen Längenbestimmungen regelmässig anfänglich angetroffen werden, die Verbindung mit Bahia Blanca, woselbst unsere dritte Expedition gerade rechtzeitig mit ihren Einrichtungen fertig geworden war.

Einige Tage vorher war eine brasilianische Corvette eingelaufen, die eine Expedition zur Beobachtung des Durchgangs unter Leitung des Vice-Directors der Kaiserlichen Sternwarte in Rio Janeiro Hrn. Cruls gleichfalls nach Punta Arenas brachte. Die Nachricht von diesem Unternehmen war schon etwas früher gekommen und hatte überraschen müssen, da es verkehrt erschien, zwei Expeditionen nach demselben Ort, zumal einem solchen mit unsicherer Witterung, zur Ausführung gleichartiger Beobachtungen zu senden. Die Brasilianer wollten hauptsächlich Contacte beobachten, für welche, wenn sie überhaupt gesehen werden konnten, in Punta Arenas durch unsere Expedition genügend gesorgt war. Um so dringender musste Hrn. Cruls von seinem Vorhaben abgeredet werden, als ihm die unbeschränkte Disposition über ein eigenes Schiff gestattete, sich am Ostende der Strasse zu etabliren und die dort viel grösseren Chancen der Witterung auszunutzen, während der Albatross unsere Expedition, nachdem er

ihr bei dem Aufbau der Sternwarte in cameradschaftlichster Weise höchst wirksame Hülfe geleistet, seiner Ordre gemäss wieder verlassen und sich nach Montevideo zurückbegeben hatte. Hr. CRULS entschloss sich auch diesen Vorstellungen zu folgen, fand aber nachher doch die Zeit bereits zu kurz für eine solche Veränderung seines Planes, da sein Observatorium bereits ausgeschifft war, und errichtete dieses schliesslich am westlichen Ende des Ortes, während das deutsche am östlichen Ausgang stand. Der Capitain der Corvette gieng indess wirklich mit kleineren Instrumenten weiter nach Osten nach dem Feuerlande hinüber, während der Commandant der englischen Vermessungssloop Sylvia, Capitain WHARTON, der bereits 1874 den Venus-Durchgang auf Rodriguez beobachtet und sich auch jetzt wieder auf die Beobachtung, und zwar der Contacte, wie alle englischen Expeditionen, eingerichtet hatte, von vorn herein die patagonische Seite des Ostarms der Strasse zu besetzen beabsichtigte und in Peckett Harbour einen günstigen Platz gefunden hatte.

Während diese verschiedenen Stationen eingerichtet wurden, begannen gegen Ende November auf der deutschen Station die unmittelbaren Vorbereitungen für den bevorstehenden wichtigen Tag Die verschiedenen Modelle für die heliometrischen und für die Contactbeobachtungen wurden aufgestellt, durch deren häufige Benutzung die Beobachter sich die vorauszusehenden Vorgänge bei der wirklichen Erscheinung nochmals frisch in das Gedächtniss einprägen, und die Folge der Manipulationen bei der unvermeidlich etwas complicirten Anordnung der Heliometermessungen sich so gewohnheitsmässig aneignen sollten, dass sie dieselbe bei dem Durchgang selbst ohne weiteres mechanisch innehalten und die ganze Anstrengung ihrer Aufmerksamkeit den Einstellungen an Fernrohr und Mikroskop ungetheilt zuwenden könnten, und an welchen endlich auch alle zugleich bei der Beobachtung Betheiligten sich auf gehöriges Zusammenarbeiten einüben sollten. Das Heliometer ist nämlich, wenigstens in der älteren Construction der uns zu Gebote stehenden Exemplare, ein für den einzelnen Beobachter sehr unbequemes und nur mit grossem Zeitaufwand für jede einzelne Messung zu behandelndes Instrument. Um die kostbaren Stunden am 6. December möglichst auszunutzen, war, wie schon 1874, vorgeschrieben worden, dass zwei Beobachter immer zusammen damit operiren sollten, von denen der eine am Ocular des Fernrohrs die Einstellung des Messapparats auf Sonne und Venus ausführen, der andere die Ablesungen des am Objectiv befindlichen mikroskopischen Apparats machen sollte, vermittelst dessen diese Einstellungen zu registriren waren. Ein Gehülfe musste ferner an der Uhr stehen und die genauen Zeiten der einzelnen Einstellungen ver-

merken, die ihm zu dictirenden Ablesungen und etwaige Bemerkungen dazu aufschreiben und je die nächste Einstellung nach den dafür angefertigten, von Minute zu Minute den vorausberechneten Stand der Erscheinung angebenden Tabellen verkünden, damit der Beobachter am Objectiv den Messapparat schon vorher genähert in die entsprechende Stellung bringen konnte; erst wenn diess geschehen war, wurde von einem andern Gehülfen der Drehthurm gegen die Sonne geöffnet, damit ihre Strahlen nur für die Viertelminute das Instrument träfen, die der Beobachter am Ocular dann noch brauchte, die genaue Messungsstellung herbeizuführen; mit dem Signal zur Notirung für ihre Zeit war sofort das Instrument wieder in Schatten zu bringen, weil die ungleichförmige Wirkung der Sonnenstrahlen auf seine einzelnen Bestandtheile von allen Gefahren für die Zuverlässigkeit der Messungsresultate die grössten in sich barg. Nach einigen Tagen fortlaufender Übung functionirte dieser complicirte Apparat so befriedigend und glatt, dass keine andere Sorge als wegen des Wetters die Hoffnung beeinträchtigte, die in den Instructionen der Expeditionen nach den Erfahrungen von 1874 angenommene Maximalzahl von acht vollständigen Bestimmungen der Entfernung der Venus vom Sonnenmittelpunkt zu erreichen, zu deren jeder sechzehn einzelne Heliometermessungen erforderlich waren.

Das Wetter hatte sich mit dem Beginn des Monats vollständig geändert. Nachdem die gewaltigen atmosphärischen Störungen der letzten Novemberwoche ausgeglichen waren, erwarteten die Ortskundigen nun einmal eine längere Ruhepause, und in der That war nicht allein am 1. December voller Sommer, sondern eine ganze Reihe sonniger und warmer Tage folgte, fast ohne andere Unterbrechung als durch völlig trübe Nächte, bis zum 5. Fast an jedem dieser Tage hätte der Durchgang gut beobachtet werden können. Um so grösser wurde von Tage zu Tage die Sorge, dass der 6. in die mit Sicherheit wieder bald zu erwartende Regenperiode fallen würde, und in der That fieng am Nachmittage des 5. der Regen in so normaler Stärke an, dass die Hoffnungen tief sanken. Wider Erwarten gestatteten einige helle Stunden am Abend den Stand der Uhren zu bestimmen, dann begann der Regen wieder und hielt die ganze Nacht an. Er that aber nur den schätzbaren Dienst, die feinen Messapparate, die am folgenden Tage von früh bis spät nicht versagen durften, vor ihrem gefährlichsten Feinde, dem Staube, für diesen Tag zu bewahren. Das Glück von 1874 lächelte in gleicher Laune nochmals und die aufgehende Sonne beschien einen durchsichtig blauen Himmel: nur Schwärme kleiner Haufenwolken, die wenigstens das Heliometer nicht zu fürchten brauchte und die auch für die Contactbeobachtung guter

Hoffnung weiten Raum liessen, quollen hinter der Cordillere hervor und wurden von mässig lebhaftem Westwinde über Punta Arenas hinweg getrieben. Einige Minuten nach neun Uhr war der Beginn des Eintritts der Venus in die Sonnenscheibe zu erwarten, es gab aber schon vorher viel zu thun, und es war deshalb angeordnet, dass halb sieben Uhr jedermann auf seinem Posten in der Sternwarte sein sollte. Die bei den verschiedenen, getrennt von einander aufgestellten, Instrumenten zu benutzenden Uhren wurden verglichen, dann von allen drei Astronomen unabhängig am Heliometer die Experimente durchgeführt, welche nothwendig waren, den augenblicklichen Zustand aller seiner Bestandtheile im Stadium völliger Temperatur-Ausgleichung zu bestimmen, ehe derselbe durch die Sonnenbeobachtungen beeinflusst würde. Dann kamen die Messungen des Sonnendurchmessers, welche, auf allen Heliometerstationen gleichzeitig vor und nach dem Durchgang ausgeführt, die Controle dafür liefern sollten, dass überall die zur Berechnung der Durchgangsbeobachtung erforderlichen Constanten der Instrumente gleichartig bestimmt seien. Während dieser Messungen wurden die Wolken zahlreicher und grösser, und zwangen einmal ganz abzubrechen; doch nach einer halben Stunde scheint die Sonne wieder dauernd hell und reichliche Zeit vor dem Beginn des Eintritts liegen alle vorbereitenden Beobachtungen in vorschriftsmässiger Vollständigkeit vor. Nun begibt sich jeder Astronom mit einem Gehülfen an den für die Contactbeobachtung ihm zugewiesenen Refractor, denselben für die Beobachtung herzurichten und den Eintritt abzuwarten. Bei klarstem Sonnenschein und ruhiger Luft sieht der Eine nahe zur erwarteten Zeit den unscheinbaren kleinen Eindruck im Umkreis der Sonne, der den ersten Blick auf den Planeten gewährt; diesen vorher ausserhalb der Sonne zu sehen, wie es 1874 einige Beobachter vermuthet haben, ist nicht möglich gewesen, und ohne allen sichtbaren Anhalt ist es schwierig, das Auge genau auf die richtige Stelle des Sonnenrandes vorher gerichtet zu erhalten; der erste sichtbare Eindruck ist aber so klein gewesen und wächst sichtlich so schnell zu einem Vielfachen an, dass er schwerlich wesentlich verspätet wahrgenommen sein kann und die Beobachtung dieser ersten — unter den vier Contacten freilich am wenigsten wichtigen — Phase als gelungen angesehen werden darf. Welchen Erfolg ein Anderer gehabt hat, bleibt einem jeden verschwiegen, denn keine Communication über das Gesehene darf stattfinden, bis jeder Beobachter einen ausführlichen Bericht über seine Wahrnehmungen mit allen notirten Momenten niedergeschrieben und an den Chef der Expedition abgeliefert hat.

Die innere Berührung beim Eintritt, das zunächst zu beobachtende Moment der Erscheinung, erfolgt erst zwanzig Minuten später. Es ist

daher Zeit, und in der Special-Instruction wie jede einzelne am 6. December auszuführende Operation auf die Minute vorgeschrieben, einige Control-Experimente am Heliometer zu wiederholen. Darauf trennen sich die Beobachter wieder. Noch sind mehrere Minuten bis zum kritischen Moment übrig, und die Refractoren sollen ebenfalls bis dicht vor diesem beschattet bleiben, damit nicht durch die Erhitzung der Objective die Schärfe der Bilder beeinträchtigt werde — doch nur einen schnellen Blick vorher nach dem Stande der Dinge: der ganze Umfang des Planeten ist sichtbar, der noch ausserhalb der Sonne stehende Theil der schwarzen Scheibe von einem schmalen aber hellen Lichtfaden umsäumt. Ein Seufzer: »ach ganz wie 1874«; doch der Resignation, wieder nur ein unbestimmtes Phänomen unter peinlicher Befürchtung der Erfolglosigkeit beobachten zu müssen, wird durch Schlimmeres ein Ende gemacht — eben will der Lichtfaden den Rand der Sonne erreichen, da schiebt sich eine dichte Wolke vor dieselbe, und als sie anderthalb Minuten später vorübergezogen ist, steht Venus vollkommen innerhalb des Sonnenrandes, etwa eine halbe Minute vorher mag die Berührung stattgefunden haben.

Nun zum Heliometer zurück. Zuerst soll der Durchmesser der Venus gemessen werden; einmal planmässig durchgeführt, hat die Messung, noch längere Zeit durch die Wolken aufgehalten, eine halbe Stunde beansprucht und kann vorerst nicht mehr, wie wünschenswerth, wiederholt werden, vielmehr müssen, da zehn Uhr vorüber ist, die Distanzmessungen zwischen Venus und Sonnencentrum beginnen. Für zwei Fälle, wie in der Instruction vorgeschrieben, sind die Schemata vorbereitet; soll dasjenige für unsicheres Wetter, oder das andere, eine symmetrischere Gruppirung der Messungen ergebende, aber irgend längere Unterbrechung derselben nicht vertragende genommen werden? Schnelle Umschau draussen — zahlreiche Wolken schwimmen am Himmel und ihren schnellen Zügen folgt reichlicher Nachschub hinter den Bergen hervor — doch es sei gewagt: »Schema für sicheres Wetter« lautet das Commando, nach welchem die erste Abtheilung der Beobachter das Werk beginnt. Minutenlang hemmen im ersten Satze nicht selten die Wolken, doch die Unterbrechungen werden immer seltener und kürzer, und planmässig, glatt und in allen Wechseln der Beobachtercombinationen ohne Störung, ruhig und geschäftsmässig wie eine gewöhnliche Zeitbestimmung, schreitet die Messung von Satz zu Satz fort. Zwei Astronomen und zwei Gehülfen sind immer zugleich bei der Arbeit, der dritte hat unterdessen eine kurze Pause, um das Auge zu erholen, oder draussen die Glückwünsche der herbeieilenden Bevölkerung zu empfangen, und diesen und jenen zu enttäuschen, der die so unscheinbare kleine schwarze Scheibe, um deren

willen die deutschen Gelehrten die weite Meerfahrt gemacht und so wunderbare Bauten aufgeführt haben, in einem etwas abseits aufgestellten Fernrohr zu sehen bekommt.

Es war noch nicht halb zwei Uhr, als schon der achte Messungssatz begonnen wurde, nachdem inzwischen auch eine Wiederholung der weitläufigen Controlbeobachtungen für den Zustand des Instruments eingeschaltet war; noch anderthalb Stunden standen für die heliometrischen Messungen zur Verfügung, und niemand zweifelte mehr, dass der mit Berlin vereinbarte Codex, nach welchem durch ein für jede zu erwartende Combination verabredetes Wort der Ausfall der Beobachtung telegraphisch gemeldet werden sollte, nicht ausreichen würde, den Erfolg von Punta Arenas zu melden. Aber der achte Satz war erst halb vollendet, als plötzlich die Wolken wieder in grösseren Massen kamen, nur mühsam und in langen Pausen kam noch ein Viertel zu Stande, dann wurde es völlig trübe. In den Bergen fiel Regen, und der Rest des Durchgangs wurde verloren gegeben. Doch der zum Sturm anwachsende Wind zerriss die Wolken nach einer halben Stunde wieder, der achte Satz konnte ergänzt und dann noch bei klarem Himmel ein neunter beobachtet und schliesslich die Messung des Venus-Durchmessers wiederholt werden.

Es war nun fast drei Uhr, und die Refractoren mussten auf die in zehn Minuten bevorstehende Beobachtung der inneren Berührung beim Austritt vorbereitet werden. Mit kurzen Belichtungen wird von Minute zu Minute das Heranrücken des Planeten an den Sonnenrand controlirt, und als noch reichlich eine Minute bis zum kritischen Moment übrig ist, das Objectiv definitiv der Sonne exponirt. Bald erscheint ein leichter Schatten zwischen den Rändern, der allmählich sich verstärkt; in Ergebung in das Unvermeidliche wird die Wiederholung des 1874 die Hoffnung so enttäuschenden Verlaufs erwartet: da erscheint plötzlich in diesem Schatten, zwanzig Secunden nach seinem ersten Entstehen, präcis wie am Modell und nicht um die Secunde zweifelhaft für die Auffassung des freudig erstaunten, doch ruhig die Zeit notirenden Beobachters der feine schwarze Tropfen, der so sicher das Moment der Berührung erkennen lässt. Erst zehn Secunden später wird der Lichtsaum kenntlich, mit dem der Planet in den dunkeln Himmelsgrund hinaustritt, der 1874, viel früher wirksam, die Genauigkeit der Beobachtung so weit herabsetzte. Bald wird klar, was diessmal die Sicherheit auch der Contactbeobachtung ermöglicht hat: wie ein grösseres Stück des Planeten ausgetreten ist, zeigt sich deutlich, wie seinem Rande entlang der Lichtkranz ganz wechselnde Helligkeit hat, und der heimlich erhoffte Zufall hat es ergeben, dass gerade das Minimum der Intensität, ein augenblicklich besonders stark mit Wolken

erfüllter Theil der Venus-Atmosphäre, an der Contactstelle sich auf den Sonnenrand projicirt hat.

Der zwanzig Minuten später erfolgende äussere Austritt ist ohne Schwierigkeit zu beobachten, und die Sonne scheint nachher noch lange genug am unbewölkten Himmel, um alle noch erforderlichen Controlbeobachtungen am Heliometer, namentlich neue Messungen des Sonnendurchmessers von allen drei Astronomen in grösster Vollständigkeit zu gestatten. Halb sechs Uhr ist die letzte Einstellung gemacht; schon harrt der schwarze indianische Renner vor der Thür der Sternwarte — nun hinaus mit dem Sturm um die Wette in das goldig blühende Feld, um die von elf Stunden unausgesetzter Anspannung endlich doch erregten Nerven zu beruhigen, ehe die Berichte geschrieben, die langen Reihen der so glücklich geborgenen Zahlen copirt werden!

Die wissenschaftliche Schlacht an der Südspitze des Continents war gewonnen. Die Depeschen, welche das Geschick der anderen deutschen Expeditionen melden sollten, lagen andern Tages bereits gesammelt in Montevideo, aber noch zehn Tage gespannter Erwartung verflossen, bis der nächste Dampfer von dort kam. Er brachte nur Siegesdepeschen: der ganze Feldzug war, wenngleich wider Erwarten auf allen Punkten im Kampf mit den Elementen, geglückt. Hartford meldete acht, Aiken drei, Bahia Blanca sieben vollständige heliometrische Bestimmungen. In Europa war inzwischen ferner bekannt geworden, dass auch ein americanisches Heliometer in Newhaven, ein englisches am Cap der guten Hoffnung erfolgreich gearbeitet und die Franzosen mit zwei der russischen ihnen übergebenen Heliometer auf zwischenliegenden Stationen Messungen erhalten hatten. Diess gibt ein Gesammtmaterial, von dessen erst in geraumer Frist zu bewältigender Bearbeitung ein erheblicher Fortschritt in der Ermittelung der Sonnenentfernung sicher erhofft werden kann.

An der Magellan-Strasse hatten auch die anderen Expeditionen erwünschten Erfolg gehabt. Hrn. Cruls hatten die Thatsachen schliesslich Recht gegeben, dass er in Punta Arenas geblieben war, er hatte alle vier Contacte beobachtet, denn die von Westen her vorüberziehende Wolke, welche über der deutschen Station so wenige Secunden zu lange verweilte, hatte seine nur anderthalb Kilometer westlicher gelegene Station frühzeitig genug verlassen, um ihm noch eben die Erfassung auch des zweiten Contacts zu gestatten. Im Feuerland hatten die Brasilianer wenigstens die wichtigsten Phasen gesehen. Die Engländer im Osten der Strasse hatten ihre beiden Fernröhre noch in einiger Entfernung von einander aufgestellt, an jedem waren unter unerwartet zahlreichen Wolken auch nur drei Contacte gesehen, aber gerade den dem einen Beobachter fehlenden hatte der andere erhalten.

Zur vollen Sicherung der Resultate waren noch weitere Arbeiten zur Untersuchung der benutzten Instrumente, zu noch genauerer Bestimmung der geographischen Lage der deutschen Station und zum Anschluss der fremdländischen an dieselbe auszuführen, welche die nächsten drei Wochen nach dem Durchgang ausfüllten. Das Wetter hatte gleich wieder seinen gewöhnlichen schlechten und unbeständigen Charakter angenommen, und zudem hinderte die Kürze der unwirthlichen Sommernächte den Fortschritt der wichtigsten Arbeiten sehr, doch wurde ein befriedigender Abschluss rechtzeitig erreicht, um am Jahresschluss die Instrumente wieder zur Einschiffung bereit zu haben. Der für den 3. Januar erwartete Dampfer, welcher die Expedition nach Deutschland zurückbringen sollte, hatte diess Mal auf der Tour von Punta Arenas nach Montevideo den zeitraubenden Umweg über die Falkland-Inseln zu machen; um den letzten Längenanschluss besser zu sichern, wurden deshalb die Chronometer mit einem Beobachter bereits am 28. December mit dem schnellern englischen Postdampfer nach Montevideo vorausgesandt. Es sollte nicht Alles gut gehen: die mitternächtliche Fahrt zu dem weit draussen in der Strasse liegenden Coloss brachte der bis so dicht ans Ende ihrer Arbeit so glücklich verlaufenen Expedition einen Unfall, der um nur weniges der Hälfte ihres Personals und dem ganzen Chronometerpark verhängnissvoll geworden wäre, und der von den Zurückbleibenden als ein schwerer Schlag insbesondere für den Werth der Längenverbindung bitter empfunden wurde. Erst viele Wochen später ergab sich die beruhigende Gewissheit, dass doch die grosse Mehrzahl der Chronometer ganz brauchbar geblieben war, und neben dem materiellen auch der wissenschaftliche Schaden die anfängliche Befürchtung lange nicht erreichte.

Pünktlich in der ersten Frühe des 3. Januar meldet ein Kanonenschuss von der Rhede die Ankunft der Theben, des Schwesterschiffs des Ramses, mit welchem die Expedition die 44 tägige Meerfahrt nach der Heimath ausführen will. Wie die ersten Strahlen der über dem Feuerland aufgehenden Sonne die Gipfel der Cordillere treffen, glaubt noch einmal in der wunderbaren Durchsichtigkeit des stillen Sommermorgens der von Bord zurückschauende Astronom sich in eine Mondlandschaft versetzt, so klar und scharf in ungebrochener Lichtfülle tritt jedes Relief des reich gegliederten Bodens bis zu den fernsten Bergreihen hervor. Doch schnell, indem der Dampfer vom Ufer abhält, zieht sich das Bild zusammen. Ein ungeheuerer Waldbrand wüthet, schon seit Wochen, ganz in der Nähe des Städtchens und dehnt an den undurchdringlichen grünen Buchenhängen und zwischen den Dickichten von Lorbeer und Myrthen und den Hainen schlanker Magnolien und der köstlichen Cerrolilie das schon so weiten Raum bedeckende grauen-

hafte Bild des Todes und unbeschreiblicher Verwüstung durch frühere Brände über immer grössere Strecken aus. Bald hilft nur noch die weithin sichtbare Rauchsäule, in dem verkleinerten Landschaftsrahmen die Stelle herauszufinden, welche den deutschen Gelehrten elf Wochen hindurch eine Stätte schwerer Arbeit und harter Anstrengung, aber auch frohen Erfolges in wissenschaftlichem Gewinn und reicher Erfrischung in belebendem Verkehr mit einer wahrhaft grossen Natur und ihren ungekünstelten Kindern gewesen ist. Noch wenige kurze Stunden, dann tritt das Schiff in die Engen ein und erkämpft sich mühsam gegen den gewaltigen Fluthstrom den Weg zum offenen Meer, und wie Cap Negro sich wiederum hinter die Elisabeth-Insel schiebt, verschwindet, wie es vordem märchenhaft aufgestiegen, wie mit einem Zauberschlage das entzückende Panorama der Braunschweig-Halbinsel hinter dem monotonen Küstenrande der öden patagonischen Pampa auf Nimmerwiedersehen dem Auge, um vor der Erinnerung unvergesslich stehen zu bleiben. —

Dass Deutschlands Antheil an der Förderung practischer Astronomie im vorigen Jahrhundert thatsächlich kein so ganz unerheblicher gewesen ist, wie es erscheint, wenn die Geschichte der grossen vorzugsweise lange im Gedächtniss der Nachwelt gebliebenen wissenschaftlichen Unternehmungen seiner fast gänzlich schweigt, habe ich im besondern an Hand der Geschichte dieser Akademie in einem meiner letzten Vorträge an dieser Stelle nachgewiesen. Dennoch haben wir noch nach hundert Jahren, als wir in der ersten Vorbereitung zur Beobachtung der bevorstehenden wichtigen Phänomene die Geschichte der Unternehmungen von 1761 und 1769 wieder studirten, nur in herber Bitterkeit der untergeordneten Stellung gedenken können, zu welcher Deutschland und seine Gelehrten damals verurtheilt waren. Dank unserm Kaiser und allergnädigsten Herrn, dass uns diese Bekümmerniss von der Seele genommen ist, dass unseren Söhnen und Enkeln solche Gefühle erspart bleiben; Dank Ihm, dass Deutschland im Rathe der Völker von der Stelle wieder Besitz genommen hat, auf der es ihm ziemt mitzurathen und mitzuthun, sei es bei der Ordnung der staatlichen und bürgerlichen Verhältnisse des Welttheils, sei es bei dem grossen Friedenswerk der Erweiterung und Verbreitung der Segnungen menschlicher Erkenntniss, für dessen Förderung ihren erhabenen Beschützer zu preisen in erster Linie unserer Körperschaft zukommt.

14. Bericht über die Wirksamkeit der HUMBOLDT-Stiftung für Naturforschung und Reisen.

Von E. DU BOIS-REYMOND,
Vorsitzendem des Curatoriums.

(Öffentliche Sitzung zur Feier des Geburtstages Seiner Majestät des Kaisers und Königs [St. XIV].)

Das Curatorium der HUMBOLDT-Stiftung für Naturforschung und Reisen erstattet statutenmässig Bericht über die Wirksamkeit der Stiftung im verflossenen Jahre.

Das Curatorium verlor durch den Tod den Geheimen Ober-Regierungs- und vortragenden Rath, Hrn. Dr. GOEPPERT. An seiner Stelle ernannte der Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, Hr. VON GOSSLER Excellenz, zu seinem Vertreter den Geheimen Regierungs- und vortragenden Rath, Hrn. Dr. ALTHOFF.

Über den mit Stiftungsmitteln reisenden Hrn. Dr. OTTO FINSCH wurde zuletzt mitgetheilt, dass er laut Brief vom 1. November 1881 von der Thursday-Insel in der Torresstrasse aus die Prince of Wales-Insel besucht hatte, und einen Ausflug nach den Inseln Horne und Jervis (Mabiak) beabsichtigte. Letztere Insel bot wider Erwarten gar nichts Eigenthümliches in zoologischer Hinsicht dar. Nach einem darauf folgenden mehrwöchentlichen Aufenthalt auf Cape York kehrte Hr. Dr. FINSCH am 22. December 1881 nach der Thursday-Insel zurück, um im Januar 1882 von da nach Annapata, Port Moresby in Neu-Guinea, zu gehen, wo er bis zum Juni blieb. Während dieser Zeit besuchte er den Küstenstrich von Freshwater-Bay bis Keppe-Bay. Er wurde dann genöthigt, nach Laloki zu gehen, um sich Träger für seine Sammlungen zu verschaffen. In Ermangelung besserer Gelegenheit musste er mit einem Trepangfischerboote die Rückreise von der Darnley-Insel nach der Thursday-Insel machen, wo er am 26. Juni wieder anlangte. Von da wandte er sich dann im Juli heimwärts, gieng zuerst nach Batavia, und traf im October, nach mehr als dreijähriger Abwesenheit, glücklich wieder hier ein.

Mittlerweile sind von ihm noch drei Sendungen, die siebente, achte und neunte, wohlbehalten hier angekommen. Die siebente enthielt

Säugethiere und Vögel aus Neu-Britannien und Neu-Seeland, Reptilien, Fische, Insecten, Crustaceen und Würmer aus Neu-Seeland. Die achte enthielt die in der Torresstrasse und auf dem Cape York während der drei letzten Monate des Jahres 1881 gesammelten Gegenstände, und die neunte die auf Neu-Guinea von Januar bis Juni 1882 gemachte Sammlung, in welcher sich auch mehrere Exemplare des vor wenigen Jahren im Innern von Port Moresby entdeckten Stachelschnabelthieres, *Tachyglossus Lawesii* Ramsay, befinden.

Die Gesammtheit der von Hrn. Dr. Fiscu während der Jahre 1879 bis 1882 gemachten Sammlungen umfasst 37639 zoologische Gegenstände, darunter 31700 Wirbellose; etwa 1000 Pflanzen; 310 Stück Mineralien; 274 Menschenschädel; 154 Gypsmasken; endlich 3500 ethnographische Gegenstände.

Das Capital der Stiftung hat im Jahre 1882 keinen Zuwachs erhalten. Die Königl. Akademie der Wissenschaften beschloss, die im Jahre 1882 bei der Stiftung verfügbaren Mittel vorläufig nicht auszugeben, sondern mit späteren Einkünften vereinigt für ein grösseres in Zukunft auszuführendes Unternehmen aufzubewahren. Die für das laufende Jahr zu Stiftungszwecken verwendbare Summe beläuft sich ordnungsmässig abgerundet auf 17700 Mark.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Lesерkreise den ihn näher angehenden Theil des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus diesen Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reinen Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder ihr fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch denselben Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, Reden und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird in der Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften und Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfingen und statt der vollständigen »Sitzungsberichte« lieber die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zusenden zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu geben.

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« an folgenden Stellen, mit denen sie im Schriftenaustausche steht, jährlich drei Mal, nämlich:

die Stücke vom Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,

— — Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,

— — October bis December zu Anfang des nächsten Jahres zugleich nach Fertigstellung des Registers.

Diejenigen Empfänger, welche die Lieferung 1882 nicht vollständig sein sollten, werden ersucht, hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaniger Reclamationen nur in Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1882 angebracht werden.

Wegen einer gewünschten Zusendung in kürzeren Zwischenräumen wenden sich die buchhändlerischen Bezieher der »Sitzungsberichte« u. s. w. wie sonst.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann) in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 ℳ

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenfalls in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 ℳ

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung nimmt auch ferner diejenigen Empfängern die »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« solchen diese Schriften von Seiten der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in einzelnen Stücken, sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten, zusenden. Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart wünschen, wollen sich deshalb direct mit der genannten Buchhandlung in Verbindung setzen.

K1.35
STR
Q3
M38

MATHEMATISCHE

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES

UND

MAY 7 1991

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT II.

FEBRUAR 1883.

MIT DREI TAFELN.

BERLIN 1883.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI EMIL HERBIG'S VERLAGSBUCHHANDLUNG.

A. Halbschnitte auf der gereizten Seite.

7. Wird der Schnitt dicht unterhalb des Abgangs der Armnerven geführt, so bewirkt er eine geringe Schwächung der Reflexe in der linken oberen und in der linken unteren Extremität, eine sehr starke Schwächung der Reflexe in der rechten oberen Extremität: derselbe hat gar keinen Einfluss auf die (gereizte) rechte untere Extremität.

8. Ein Halbschnitt in der Mitte des Dorsaltheils des Rückenmarks wirkt ähnlich wie der vorige, nur ist die Wirkung im Allgemeinen schwächer ausgeprägt als im vorigen Fall.

9. Ein Halbschnitt in der Nähe des Ursprungs der Nerven für die untere Extremität (etwa 2^{mm} oberhalb desselben) bewirkt eine sehr bedeutende Schwächung der Reflexe in dieser Extremität, eine nur unbedeutende in den drei anderen Extremitäten. Wird der Schnitt noch tiefer geführt (1^{mm} etwa oberhalb des Ursprungs der Wurzeln), so ist die Schwächung des Reflexes in der gereizten unteren Extremität noch beträchtlicher und dieser kann sogar ganz ausfallen, während die Reflexe auf die drei anderen Extremitäten nur geschwächt sind.

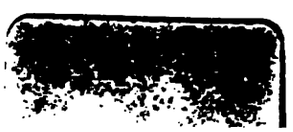
B. Halbschnitte auf der der Reizung entgegengesetzten Seite.

10. Dieselben haben gar keinen Einfluss auf die Reflexe in der gereizten unteren und in den beiden oberen Extremitäten, dagegen bewirken sie eine sehr bedeutende Schwächung der Reflexe in der unteren Extremität der entgegengesetzten Seite, d. h. der Seite, wo der Schnitt geführt ist.

C. Querschnitte durch den Dorsaltheil.

11. Schneidet man das Rückenmark zwischen den Abgangsstellen der Arm- und der Beinnerven quer durch, so ist natürlich das Zustandekommen der Reflexe in den oberen Extremitäten ganz unmöglich. Ausserdem ist aber auch der Reflex in der linken unteren Extremität sehr geschwächt, während der in der gereizten Extremität unverändert bleibt. Ist jedoch der Schnitt sehr nahe dem Abgang der Nerven für die unteren Extremitäten geführt, dann sind die Reflexe in beiden unteren Extremitäten sehr geschwächt und können selbst bei den stärksten Reizen ganz fehlen.

Dieser Erfolg tritt aber nur dann sicher ein, wenn wirklich das Rückenmark vollständig quer durchtrennt ist. Bleibt selbst nur ein kleiner Theil des Rückenmarks seitlich stehen, so ist die Leitung der Reflexe nach den oberen Extremitäten nicht unterbrochen.



Die Frage, welche histologischen Theile des Rückenmarks in diesem Falle die Leitung besorgen, werde ich einer besonderen Untersuchung unterwerfen und die Ergebnisse später mittheilen.

12. Längsschnitte (Sagittalschnitte) durch das Rückenmark von etwa 2^{mm} unterhalb der Spitze des Calamus scriptorius bis zum Abgang der Wurzeln für die unteren Extremitäten haben gar keinen Einfluss auf das Zustandekommen der Reflexe.

Auch die hier mitgetheilten Versuchsergebnisse sprechen ebenso wie die in unsrer ersten Mittheilung aufgeführten für die Richtigkeit des von Hrn. ROSENTHAL aufgestellten Satzes, dass die normalen Reflexe in dem obersten Abschnitte des Rückenmarks zu Stande kommen. Sie liefern aber zugleich die Grundlage für die Erforschung der Leitungsbahnen, welche diese reflexerzeugende Stelle mit den ein- und austretenden Nervenbahnen der peripherischen Nerven verbinden. Ich bin mit der weiteren Verfolgung dieser Seite der Frage beschäftigt und werde mir erlauben, über die Ergebnisse meiner Versuche in der Folge weiter zu berichten.

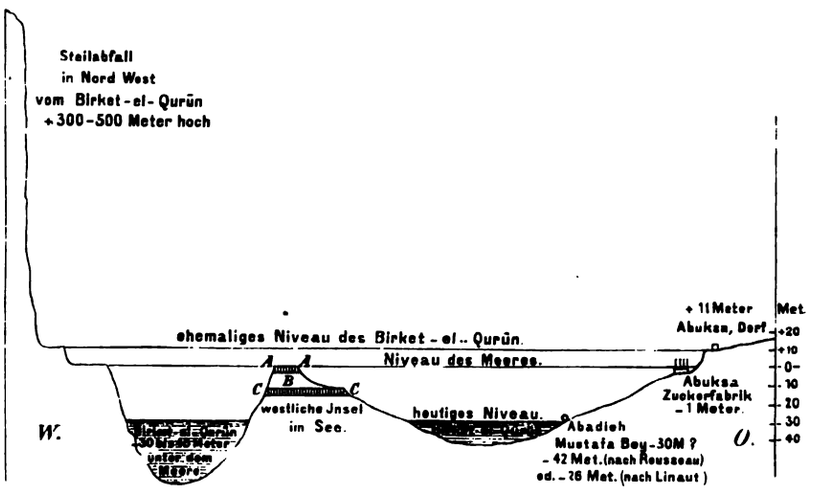
4. Über eine tertiäre Wirbelthierfauna von der westlichen Insel des Birket-el-Qurūn im Fajum (Aegypten).

Von W. Dames.

(Vorgelegt von Hrn. Beyrich am 8. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VI]: — ausgegeben am 15. Februar.)

Hierzu Taf. I.

Unter den von Hrn. Prof. Dr. Schweinfurth im Jahre 1879 gesammelten und dem Königl. mineralogischen Museum der hiesigen Universität übersendeten Versteinerungen befindet sich eine Reihe von Wirbelthierresten, welche zugleich mit Mollusken und Corallen aus Tertiärschichten der westlichen Insel des Birket-el-Qurūn im Fajum herstammen. Die geologischen Verhältnisse dieser Insel erläutert eine handschriftliche Skizze Schweinfurth's, welche verkleinert in beistehendem Holzschnitt wiedergegeben ist.



Nach den auf dieser Skizze vorhandenen Angaben hat der Birket-el-Qurūn heute einen 30—40^{m} unter dem Mittelmeerniveau liegenden Spiegel, über welchen sich die westliche Insel um dieselbe Meterzahl erhebt, so dass ihre Oberfläche gerade im Mittelmeerniveau liegt. Das

westliche Ufer des See's steigt steil zu 300—500m an, während sich das östliche sanft bis circa 20m über das Mittelmeer erhebt. — In dem über dem jetzigen Seespiegel hervorragenden Theil der Insel unterscheidet Schweinfurth drei petrographisch und palaeontologisch charakterisirte Schichten.

1. Die untere Schicht (*C*) besteht aus einem grauen Mergelthon mit wulstigen, gekrümmten, möglicherweise von Spongien herrührenden Ausscheidungen und unbestimmbaren Mollusken-Steinkernen (von Schweinfurth handschriftlich als »Hörnermergel« bezeichnet).

2. In der mittleren Schicht (*B*) wurden die sämmtlichen unten näher zu besprechenden Cetaceen- und Fischreste zugleich mit Corallen und Gastropoden, letztere meist aus Turritellen mit erhaltener Schaale bestehend, gefunden. — Die Grenze zwischen dieser und der oberen Schicht (*A*) wird durch eine Austern-reiche Lage gebildet.

3. Die obere Schicht enthält in einem braunen, eisenschüssigen Gestein zahlreiche Cardien und andere Mollusken, meist in Steinkernerhaltung, welche zugleich mit denen der mittleren Schicht von Hrn. Prof. Mayer-Eymar in Zürich untersucht worden sind. Die Resultate seiner Beobachtungen werden in kürzester Zeit veröffentlicht werden.

Hier ist die Beschreibung der Wirbelthierfauna gegeben, welche in mehrfacher Hinsicht ein aussergewöhnliches Interesse beansprucht. Einmal ist sie auffallend reich an Arten und neben mancher neuen ausschliesslich an solchen, deren Auftreten in afrikanischen Tertiärbildungen bisher noch unbekannt war: dann erlaubt sie wegen ihrer Analogien mit anderen schon bekannten Faunen ein bis zu einem gewissen Grade sicheres Feststellen des geologischen Alters der betreffenden Schicht; und endlich hat sie einige Exemplare geliefert, welche die Kenntniss der Vorläufer einiger jetzt lebenden Fischgattungen, wie *Pristis* und *Diodon* mit seinen Verwandten, wesentlich erweitern.

Von den verschiedenen Classen der Wirbelthiere sind nur Fische und Säugethiere, beide in rein marinen Formen, vorhanden. Die Säugethiere gehören zu den Cetaceen, die Fische zum weitaus grösseren Theil zu den Selachiern, nur wenige zu den Teleostiern.

I. Mammalia.

Cetacea.

Alle aus Schädel-, Wirbel- und Rippenfragmenten bestehenden Cetaceenreste gehören der Gattung *Zeuglodon* an, deren Vorkommen in Afrika bisher nicht beobachtet wurde. Noch heute ist für die Kennt-

niss dieser Gattung die Abhandlung von JOHANNES MÜLLER[1] die Grundlage: Spätere Arbeiten über fossile Cetaceen, wie namentlich auch die von J. F. BRANDT[2], haben Wesentliches kaum hinzuzufügen vermocht. Unter diesen Umständen war es von ganz besonderem Werth, für die Deutung der afrikanischen *Zeuglodon*-Reste die im hiesigen anatomischen Museum aufbewahrten Skelette der von J. MÜLLER untersuchten *Zeuglodon*-Arten vergleichen zu können. Denn ganz ebenso, wie nach J. MÜLLER's Untersuchungen in Alabama zwei, im wesentlichen durch die Grösse unterschiedene Arten existirten, lassen sich auch aus Ägypten zwei in gleicher Weise und nach gleichen Merkmalen zu trennende Arten erkennen, welche wieder im Einzelnen die grösste Ähnlichkeit mit den amerikanischen haben. So stimmt die grösste der Arten von der Insel des Birket-el-Qurūn mit J. MÜLLER's *Zeuglodon macrospondylus,* die zweitgrösste mit desselben Autors *Zeuglodon brachyspondylus* und die kleinste endlich mit derjenigen Form überein, welche er zuerst (l. c. S. 28) als dritte Art, später (l. c. S. 33) als Jugendindividuum von *Zeuglodon brachyspondylus* ansah. Lag es somit auch nahe, an eine specifische Übereinstimmung der amerikanischen und afrikanischen Formen zu denken, so konnte dieselbe doch nicht zweifellos festgestellt werden, da unter dem von SCHWEINFURTH gesammelten Material keine Reste der Bezahnung, grössere Schädelfragmente oder auch beträchtliche Reihen zu einander gehöriger Wirbel vorhanden sind, welche diese Frage allein zur sicheren Entscheidung bringen können. Daher sind im Folgenden die Arten nicht mit Namen belegt, sondern nur nach der Grösse unterschieden worden.

Zeuglodon species major.

Der grössten Art sind zwei Wirbel- und zahlreiche Rippenfragmente zuzurechnen. Der besser erhaltene Wirbelrest besteht aus der ventralen Hälfte des Wirbelcentrums ohne Epiphysen und ohne Querfortsätze, deren Bruchstellen aber sichtbar sind. Die Querfortsätze befinden sich ganz unten, da, wo die ventrale in die laterale Partie übergeht; ihr Durchschnitt ist dicht am Wirbel lang-elliptisch mit spitzen Ecken, die Länge 95^{mm}, die Höhe in der Mitte ungefähr 35^{mm}. Die Länge des ganzen Wirbels (ohne Epiphysen) ist 250^{mm}, seine Breite (zwischen den Bruchstellen der Querfortsätze gemessen) 165^{mm}. Auf der ventralen Seite liegen zwei 35^{mm} lange ovale Gefäss-

[1] Über die fossilen Reste der Zeuglodonten von Nordamerika mit Rücksicht auf die europäischen Reste aus dieser Familie. Berlin 1849.

[2] Untersuchungen über die fossilen und subfossilen Cetaceen Europa's (Mémoires de l'Académie impériale des sciences naturelles de St. Pétersbourg. Tome XX. No. 1. 1873.) — Ergänzungen zu den fossilen Cetaceen Europa's (Ibidem Tome XXI. No. 6. 1874).

löcher, welche durch einen hohen, gerundeten Wall getrennt sind. In seiner Grösse und Form entspricht dieser Wirbel sehr gut dem zwölften Lendenwirbel in dem grossen aufgestellten Skelett von *Zeuglodon macrospondylus* des anatomischen Museums. — Der zweite in den Dimensionen ungefähr gleiche Wirbel ist so fragmentär erhalten, dass er eine weitere Besprechung ausschliesst; er hat nur insofern einiges Interesse, als er noch mit der Epiphyse versehen ist, also von einem alten, völlig ausgewachsenen Thier herrühren muss. — Die in ihren Dimensionen mit den von J. Müller dem *Zeuglodon macrospondylus* zugerechneten Rippen durchaus übereinstimmenden Fragmente lassen ebenso wie jene erkennen, dass sie am proximalen Ende seitlich comprimirt, im mittleren Theil fast kreisrund, am distalen Ende wieder comprimirt und verdickt sind.

Zeuglodon species minor.

Die kleinere Art, welche in ihren Grössenverhältnissen durchaus dem Müller'schen *Zeuglodon brachyspondylus* gleichsteht, ist durch zwei Fragmente des Hinterhauptes, einen Epistropheus und einen vorderen Brustwirbel vertreten. — Die Hinterhauptsfragmente bestehen aus Bruchstücken der Schuppe mit dem Condylus, der an einem Stück ganz, an dem zweiten zur Hälfte erhalten ist: wahrscheinlich gehören sie beide ein und demselben Individuum an. In Form und Grösse kommen sie mit den beiden in der Müller'schen Abhandlung auf Taf. III und Taf. XXVII Fig. 1 dargestellten Schädelstücken völlig überein, welche auch in den Originalen verglichen wurden. — Das meiste Interesse nimmt der Epistropheus für sich in Anspruch, weil er, abgesehen von einem von Müller (l. c. S. 33) erwähnten Fragment, der erste von *Zeuglodon* bekannte ist und über die Bildung der Halsregion dieser Thiere weiteren Aufschluss giebt. Derselbe passt in der Grösse gut zu dem von Müller (l. c. Taf. XIII Fig. 1 und 2) abgebildeten Atlas, namentlich auch in der Gestalt der querovalen Gelenkfläche für letzteren, die auf der rechten Seite gut erhalten ist. Der Wirbelkörper ist kurz und gedrungen: von der Spitze des Processus odontoideus bis zum hinteren Rande der Gelenkfläche für den dritten Halswirbel 95^{mm} lang. Der Processus odontoideus ist kurz und stumpf, 49^{mm} lang und hat jederseits neben der Spitze eine längsovale Grube, wie sie auch bei Carnivoren verschiedener Art vorkommt. Unter diesem Zahnfortsatz zieht sich eine schmale, flache Erhebung wall- oder kielartig hin, welche die rechte mit der linken Atlas-Gelenkfläche verbindet. Die Querfortsätze, wie auch der obere Bogen sind abgebrochen, und man erkennt von ersteren

nur an der Bruchstelle, dass sie vertical stehen und oben schmal, unten verbreitert sind. An der Stelle, wo hinter der Atlas-Gelenkfläche der Querfortsatz vom Wirbelcentrum abgeht, ist ein 5^{mm} im Durchmesser betragender Gefässcanal vorhanden, welcher sich schräg nach innen fortsetzt, sich dort erweitert und hinten dicht an der Gelenkfläche für den dritten Halswirbel, aber noch im Querfortsatz ausläuft, hier zu 9^{mm} Durchmesser erweitert. Die hintere Gelenkfläche ist flach concav, ca. 75^{mm} hoch und 80^{mm} breit (ungefähr dieselben Dimensionen, wie sie MÜLLER anführt), mit — namentlich in der unteren Hälfte — polsterartig verdickten Rändern, welche in der Medianebene unten durch einen spitzen, ziemlich tiefen Einschnitt unterbrochen werden. Die Gelenkfläche selbst steht schief zur Verticalaxe, ihre obere Hälfte ist nach vorn, ihre untere nach hinten ausgezogen. — Wenn auch im allgemeinen Habitus der Cetaceencharakter in dem beschriebenen Epistropheus gewahrt ist, so hat derselbe doch manche, anderen Cetaceen, seien sie fossil oder recent, nicht zukommende Eigenschaften; einmal fehlt allen übrigen, soweit ich mich unterrichten konnte, der mediane Einschnitt an der Unterseite der Gelenkfläche für den dritten Halswirbel; vor Allem aber ist die von vorn nach hinten ausgezogene, zur Verticalaxe des Wirbelkörpers schräge Stellung dieser Gelenkfläche bemerkenswerth, weil dieselbe die Fähigkeit andeutet, den Kopf zu heben und zu senken, in welcher die Zeuglodonten unter den Cetaceen isolirt dastehen würden.[1] — Der ohne Epiphysen gefundene Brustwirbel hat eine Länge von 85^{mm}, bei einer Höhe von 90^{mm}. In seiner Form ist er fast ident dem in der MÜLLER'schen Abhandlung (l. c. Taf. XIII Fig. 6 und 7) dargestellten Stück und ebenso den Brustwirbeln von *Zeuglodon brachyspondylus*, welche das anatomische Museum unter den Nummern 15959. 15962. 15968 aufbewahrt. Zu derselben Art, welche diese Wirbel besass, mögen auch einige sehr schlecht erhaltene Rippenbruchstücke gehören, welche in ihren Dimensionen um etwa die Hälfte hinter den grösseren, oben erwähnten, zurückstehen.

Zuletzt sind noch drei Wirbel zu erwähnen, welche in ihren Dimensionen wiederum bedeutend hinter der Species minor zurückstehen, aber gut zu denen passen, welche J. MÜLLER einem Jugendindividuum von *Zeuglodon brachyspondylus* angehörig ansah. Einer dieser drei Wirbel ist muthmaasslich der vordere Brustwirbel eines

[1] In dieser Beziehung nähern sich die Zeuglodonten den Phoken und verwandten Thieren, wie denn auch im Gebiss mehr Analogieen zu jenen hervortreten, als bisher in der Literatur zum Ausdruck gekommen ist. Ohne alle Bedenken ist die Zutheilung der Zeuglodonten zu den Cetaceen nicht (cfr. auch ZITTEL: Über Squalodon Bariensis aus Niederbayern im 24. Bericht des naturhistorischen Vereins Augsburg 1877 S. 25).

jungen Thieres, da er Ansätze an der Basis der oberen Bögen und am Wirbelkörper dicht unter denselben für die Rippen besitzt: er ist 31^{mm} lang, 59^{mm} hoch, sein Neuralcanal circa 40^{mm} breit. Die beiden anderen Exemplare sind hintere Lenden- oder vordere Schwanzwirbel, beide ohne Epiphysen. Die oberen Bögen stehen ganz am Rande der oberen Seite und bedingen dadurch einen sehr breiten Neuralcanal, dessen Basis zwei längliche, ziemlich weit von einanderstehende Gefässlöcher besitzt. Auf der ventralen Seite des Wirbelkörpers befindet sich eine stumpfe, mittlere Erhebung und neben derselben jederseits eine flache Einsenkung, in welcher wiederum einige kleinere Gefässlöcher liegen. Die Ansatzstellen der abgebrochenen Querfortsätze liegen nahe über der Ventralseite des Wirbelkörpers.

Ist an und für sich das Erscheinen der Gattung *Zeuglodon* in afrikanischen Tertiärbildungen von Interesse, so noch mehr die dem Erscheinen derselben Gattung in Amerika völlig analoge Art und Weise desselben in zwei, durch Grösse getrennte Arten. Aber gerade die Übereinstimmung lässt Zweifel darüber entstehen, ob nicht in diesen sogenannten Arten sexuelle Unterschiede ausgeprägt sind, und ob man nicht in Afrika, wie früher in Amerika, die beiden Geschlechter einer Art zusammengefunden hat. Sowohl unter den Phoken, wie unter den Cetaceen finden sich Beispiele einer Grössendifferenz zwischen beiden Geschlechtern; bei ersteren jedoch nur in geringerem Grade, als sie bei *Zeuglodon* beobachtet wurde. Dagegen ist in einzelnen Fällen bei den Cetaceen eine Differenz in der Grösse beider Geschlechter nachgewiesen, wie sie sehr wohl auf *Zeuglodon*, wenn man *Zeuglodon macrospondylus* als Männchen, *Zeuglodon brachyspondylus* als Weibchen ansieht, passen würde, d. h. wo die Männchen etwa die zwiefache Grösse der Weibchen erreichen. So machte Hr. von Martens in dankenswerther Freundlichkeit darauf aufmerksam, dass beim Cachelot *(Catodon macrocephalus)* die Weibchen bedeutend kleiner als die Männchen sind. Das ist schon im Jahre 1824 von B. Hammat[1] beobachtet, und später hat Bennet[2] angegeben, dass die Männchen 60 bis 70, die Weibchen nur 30 bis 35 engl. Fuss an Länge erreichen. — Will man nun, ausgehend von dem gemeinsamen Vorkommen je einer grossen und einer kleinen Art in so weit von einander entfernten Gegenden, wie Alabama und das Fajum, unterstützt durch die Unwahrscheinlich-

[1] Voyage de l'Uranie. 1824. Zoologie p. 80.

[2] Whaling voyage p. 154 (nach einem Citat von Fischer in: Gervais, Journal de Zoologie. I. 1872).

keit, dass hier und da zwei verschiedene Arten zusammen gelebt hätten, und endlich bestärkt durch das Beispiel des lebenden Cachelot die Ansicht annehmen, dass in diesen verschieden grossen Individuen nicht zwei Arten, sondern die beiden Geschlechter einer und derselben Art gefunden und beschrieben worden sind, so müssen auch die beiden für die Alabama-Reste von J. MÜLLER eingeführten Namen *Zeuglodon macrospondylus* und *brachyspondylus* aufgegeben werden, und man muss für beide zu dem OWEN'schen Namen *Zeuglodon cetoides* zurückkehren.

II. Pisces.

A. Selachii.

Myliobates cfr. *suturalis* AG.

AGASSIZ. Recherches sur les poissons fossiles. Tome III. p. 322. t. 46. f. 12—16.

Etwa zehn Zähne der Mittelreihe stimmen in Grösse und in dem Verhältniss der Breite zur Länge mit der von AGASSIZ aufgestellten Art annähernd überein, lassen aber eine zweifellose Identificirung nicht zu.

? *Myliobates* cfr. *jugalis* AG.

AGASSIZ. l. c. p. 324. t. 47. f. 13. 14.

Ein Bruchstück einer Kieferkaufläche, aus vier zusammenhängenden Mittelplatten bestehend, aber mit beschädigten Seitenrändern, ähnelt in Grösse und Länge am meisten obiger Art.[1]

Ausser den Kieferplattenresten sind auch einige Fragmente von Flossenstacheln gesammelt worden, welche sicher zwei verschiedenen Arten angehören.

Myliobates acutus AG.

AGASSIZ. l. c. p. 331. t. 45. f. 14—17.

Zwei kleine, 20 resp. 14^{mm} lange Bruchstücke zeigen verhältnissmässig grosse, spitze, rückwärts gewendete Zähnchen an den Rändern; auch fehlt eine Furche auf der Unterseite nicht, wohl aber ein Kiel auf der Oberseite, wie ihn *Myliobates acutus* haben soll. Die citirte Figur in AGASSIZ's Werk lehrt jedoch, dass derselbe nach der Spitze des Stachels zu allmählich verschwindet, und aus der oberen Partie des Stachels stammen die untersuchten Exemplare mit grösster Wahr-

[1] Die Zugehörigkeit zur Gattung *Myliobates* ist nicht sicher; da die Seitenränder abgebrochen sind, lässt sich nicht entscheiden, ob neben den Mittelplatten noch kleinere standen (*Myliobates*), oder ob solche fehlten (*Aëtobatis*).

scheinlichkeit. Es ist daher an eine Übereinstimmung der im englischen Londonthon von Sheppy und im belgischen Terrain bruxellien gefundenen Art mit der afrikanischen kaum zu zweifeln.

Myliobates Owenii Ag.

Agassiz. l. c. p. 331. t. 45. f. 11—13.

Diese zweite Stachelform zeigt dieselben unregelmässigen, zusammenfliessenden tiefen Furchen auf der Oberfläche, dieselbe feine Streifung der Unterseite und die dichte, kurze Zähnelung der Seitenränder, wie die englische Art. Der einzige Unterschied könnte darin gesehen werden, dass die afrikanischen Stücke eine, vermuthlich über die ganze Länge des Stachels in der Medianlinie hinziehende, tiefe Furche haben, die Agassiz nicht bespricht und auch nicht abbildet. Doch scheint gerade Agassiz auf das Fehlen oder Vorhandensein einer solchen Furche kein besonderes Gewicht zu legen, da die Abbildung von *Myliobates toliapicus* zwar die Furche zeigt, aber der Autor derselben im Text nicht Erwähnung thut. Nebenbei sei bemerkt, dass *Myliobates toliapicus* sehr wahrscheinlich mit *Myliobates Owenii* ident ist, da die einzigen Unterschiede, etwas grössere Wölbung und etwas andere Beschaffenheit der Randzähnchen, innerhalb der Grenzen individueller Ausbildung liegen, wie der Vergleich mit recenten Exemplaren lehrte.

Es liegt nahe, zu vermuthen, dass die beiden verschiedenen Kauplatten mit den beiden Stachelformen zu zwei Arten gehören. Wie die Zusammengehörigkeit thatsächlich war, lässt sich nicht entscheiden, der Grösse nach würden die Kauplatten von *Myliobates* cfr. *suturalis* am besten zu der Stachelform des *Myliobates acutus*, und die Gebisse des *Myliobates* cfr. *jugalis* zu *Myliobates Owenii* passen.

Propristis Schweinfurthi nov. gen. et nov. sp.

Taf. I Fig. 1*a*—*c* u. 2.

Der Aufstellung einer neuen Gattung aus der Sippe der Sägefische liegen zwei Bruchstücke der Säge und drei Zähne zu Grunde. Von den Sägebruchstücken ist das grössere 55^{mm} lang und 25^{mm} breit, das kleinere (Taf. I Fig. 1*a* —*c*) 45^{mm} lang und 21^{mm} breit. Beide stellen Theile der Hälfte der Säge dar, welche nach dem medianen Längscanal zerbrochen ist. In der Mittelebene sind sie 11^{mm}, an dem äusseren Rande 5—6^{mm} hoch. Nahe und parallel der mittleren Bruchfläche verläuft auf der Ober- und Unterseite je eine Längsfurche, deren Ränder jedoch nur zum Theil erhalten sind, während die Furchen im übrigen Verlauf durch Verletzung der Ränder als breite Rinnen erscheinen. Der äussere Rand ist in eine Reihe flacher Bögen (Fig. 1*a* bei *α*) ein-

getheilt, welche sich auf Ober- und Unterseite genau entsprechen. Die Enden der Bögen springen über den Rand etwas hervor und sind durch einen niedrigen Querbalken (Fig. 1 bei β) mit einander verbunden. Hinter diesem Querbalken folgt eine kleine Grube, die hinten durch eine niedrige Leiste (Fig. 1 bei γ) abgegrenzt wird. Zwischen je einem Bogen der Oberseite und der Unterseite erhebt sich der Rand zu einem horizontalen, stumpfen Kiel (Fig. 1 bei δ), der in derselben Höhe liegt mit denen der folgenden Bögen. Das kleinere Bruchstück zeigt diese Beschaffenheit des Randes viel deutlicher, als das grössere, welches wohl mehr durch Abrollung gelitten hat. Auf dem an dem grösseren Bruchstück angefertigten Querschliff (Fig. 1*c*) zeigt es sich, dass der Körper aus zwei verschiedenen Lagen besteht. Die innere (Fig. 1*c* bei ε), deren Begrenzung den äusseren Contouren parallel verläuft, ist mit homogener Gesteinsmasse angefüllt, also nur die Ausfüllung eines ursprünglich vorhandenen Canals. Die äussere Schicht (Fig. 1*c* bei ζ) besteht aus concentrischen Lagen, welche durch radial vom Rande des Canals ausstrahlende Fasern gekreuzt werden.

Um diese Körper zu deuten und in Beziehung zur Säge des lebenden *Pristis* zu bringen, ist eine kurze Erläuterung des Baues dieses letzteren am Platz. Der Querschnitt durch die Säge von *Pristis antiquorum* zwischen zwei Zähnen genommen (Fig. 3) lässt drei Canäle erkennen, einen grossen Mediancanal, in welchem noch ein kleinerer, hier nicht in Betracht kommender liegt (Fig. 3 bei α), und ferner jederseits einen seitlichen von quer-ovaler, elliptischer Gestalt (Fig. 3 bei β). Die Canäle sind im Leben des Thieres durch ein lockeres Gewebe ausgefüllt, welches beim Eintrocknen verschwindet; ihre Wände aber nehmen Knochenkörper auf und werden dadurch zu einem Grade der Verknöcherung geführt, welche der übrige Theil des Skelettes nicht besitzt. Diese Verknöcherung scheint nun darin zu bestehen, dass in die einzelnen Maschen des Knorpelgewebes Kalksalze eindringen, welche sich lagenweis anordnen und durch dünne Zwischenwände von Knorpelsubstanz geschieden sind. Doch auch diese Knorpelzwischenwände nehmen genug Knochensubstanz auf, um dem Ganzen eine beträchtliche Festigkeit zu verleihen. — Zwischen den seitlichen Canälen und den Zahnalveolen, deren Wände in gleicher Weise, wie die Canalwandungen verknöchert sind, läuft nun jederseits noch ein kleinerer Canal entlang (Fig. 3 bei γ), in welchem die Gefässe und die Nerven liegen, deren Verzweigungen durch zahlreiche Öffnungen in die Alveolen zu den Zähnen dringen. Schneidet man diesen letzteren Canal der Länge nach auf, so zeigt sich, dass seine nach der Mitte der Säge zu gelegene Wandung keine gleichmässige Rinne bildet, sondern dass sich von Zeit zu Zeit (an den angefertigten Präparaten allerdings in ziemlich unregelmässigen

Abständen) ein Paar kleiner Querwände erhebt, welche anscheinend zur äusseren Wand des Canals hinüberreichen. Um das Ganze legt sich dann noch die fein chagrinirte, äussere Haut. — Es besteht also die Säge einer *Pristis* aus den drei gewöhnlichen, hier sehr verlängerten Rostralknorpeln, deren Wände verknöchern, während die mittleren Theile nur Gewebe enthalten. Dazu tritt noch unter den Alveolen der Nerven- und Gefässcanal und die verknöcherten Wände der Zahnalveolen, die zu den seitlichen Rostralknorpeln gehören.

Vergleicht man nun die Säge eines recenten Sägefisches mit den oben beschriebenen Bruchstücken, so ergiebt sich, dass dieselben nur die Umhüllung des grossen Seitencanals, welcher selbst mit Gesteinsmasse ausgefüllt ist, darstellen. Der äussere Rand entspricht der inneren Wand des Gefässcanals bei *Pristis*: der ganze, ausserhalb desselben gelegene Theil ist nicht verknöchert gewesen, die Zähne haben also nicht in verknöcherten Alveolen, sondern im Knorpel gesteckt, und darin beruht der eine Unterschied zwischen den lebenden *Pristis* und der hier als *Propristis* eingeführten fossilen Gattung. Die beiden Sägefragmente sind in der Richtung des grossen medianen Canals zerbrochen, also da, wo auch bei den recenten Arten die Säge die dünnste Knochenlage zeigt, mithin am zerbrechlichsten ist. Die Zähne standen bei *Propristis* auf den Abschnitten, welche durch die Bögen bezeichnet werden, und die Querbalken, welche die Bögen trennen, entsprechen den gleichen Bildungen im Inneren des Gefässcanals bei *Pristis*.

Reste der Sägen von *Pristis*-ähnlichen Rochen gehören bisher zu den seltensten Funden in der Paläontologie. Agassiz (l. c. p. 382* t. 41) hat das Bruchstück einer grossen Säge unter dem Namen *Pristis bisulcatus* dargestellt, welches muthmasslich von Sheppy stammt. Der Artname ist nicht glücklich gewählt, da die beiden Oberflächenfurchen, welche durch ihn hervorgehoben werden, allen lebenden und allen bis jetzt bekannten fossilen Sägefischen zukommen, wie sie denn auch *Propristis* besitzt. Das Stück von Sheppy ist nach mehrerer Richtung hin von grossem Interesse, denn einmal zeigt es deutlich, dass die Zähne in verknöcherten Alveolen standen, wie bei den recenten Gattungen, dann lässt es erkennen, dass auch hier die Verknöcherung nicht so weit ausgedehnt war, wie bei *Pristis* und seinen Verwandten. Auf der citirten Tafel zeigt Figur 2 den äusseren, aufgebrochenen Rand und die Alveolen deutlich, ferner sieht man von oben in den Gefässcanal und in ihm die Pfeiler, welche die Alveolen begrenzen und den über den Rand hervorstehenden Querbalken zwischen zwei Bögen an der Säge von *Propristis* entsprechen. Der Querschnitt der Säge von *Pristis bisulcatus* zeigt den Aufbau der Canalwandungen

genau aus gleichen Knochenpfeilerchen bestehend, wie bei *Pristis antiquorum*, aber die im Inneren der Säge der letzteren verlaufenden Canäle, welche durch gleiche Knochensubstanz wohlgetrennt sind, fliessen bei der Art von Sheppy in einen grossen queren, niedrigen Canal zusammen, in welchem weder der mittlere von den seitlichen, noch diese unter sich geschieden sind. Diese Beschaffenheit im Inneren weicht also recht bedeutend von der der lebenden *Pristis*-Arten ab, so dass auch diese Art von Sheppy den Typus einer neuen Gattung zu repräsentiren scheint. Während bei *Propristis* im Inneren der Säge annähernd dieselbe Zusammensetzung, wie bei *Pristis* vorhanden gewesen zu sein scheint, die Verknöcherung sich aber nicht auf die über dem Gefäss- und Nervencanal liegenden Zahnalveolen ausdehnte, sondern diese nur in Knorpel eingekeilt sein liess, zeigt *Pristis bisulcatus* äusserlich grosse Übereinstimmung mit *Pristis antiquorum*, entbehrt aber im Inneren die Verknöcherung der die einzelnen Canäle trennenden Wände, deren knorplige Beschaffenheit ihre Erhaltung im Fossilzustande verhinderte. — Das am vollständigsten erhaltene Fragment einer fossilen Säge hat GALEOTTI kennen gelehrt und *Pristis Lathami* genannt.[1] Es entstammt den eocänen Schichten von Melbroek in Brabant und weist die Oberfläche eines 3.5^{dm} langen Bruchstückes auf, welches auf beiden Seiten Zahnalveolen besitzt. In Bezug auf Verknöcherung der äusseren Wände steht es also den lebenden *Pristis* und auch der eben besprochenen Art von Sheppy nahe; über die Beschaffenheit im Innern lässt es keinen Aufschluss zu, so dass es trotz einer verhältnissmässig grossen Vollständigkeit keinen weiteren Beitrag zur Begründung des oben gesagten liefert. Die mit dieser Säge zusammen gefundenen und noch im Gestein daneben liegenden Zähne haben die hintere Randfurche wie bei *Pristis antiquorum*. — Als Resultat ergiebt sich, dass die Unterschiede der fossilen Sägefische von den lebenden in einer weniger fortgeschrittenen Verknöcherung bestehen, welche einmal *(Propristis)* am äusseren Rande, das andere Mal im Innern bemerkbar wird.[2]

---

[1] Mémoire sur la constitution géognostique de la province de Brabant (Mémoires couronnés par l'Académie royale etc. de Bruxelles. Tome XII 1837) p. 46 t. 2. — In dem Referat über diese Abhandlung, welches BRONN im Neuen Jahrbuch für Mineralogie etc. 1838 S. 595 gab, ist durch einen Lapsus calami »*Bathami*« statt *Lathami* gedruckt. Mit dieser unrichtigen Benennung ist die Art in mehrere Handbücher (GIEBEL, Fauna der Vorwelt I. 2. S. 296; PICTET, Traité de paléontologie II. p. 275) übergegangen, deren Autoren GALEOTTI's Abhandlung im Original wohl nicht benutzt haben.

[2] Ein in DIXON's Geology of Sussex t. XII. f. 8 abgebildetes und zu *Pristis Hastingsiae* AG. gezogenes Säge-Fragment gestattet seiner sehr mangelhaften Erhaltung wegen keine nähere Besprechung.

Mit diesen Sägebruchstücken haben sich nun auch einige Zähne (Fig. 2) gefunden, welche sich von den bisher bekannt gewordenen dadurch unterscheiden, dass ihnen die Furche auf der Hinterseite fehlt und die Ränder abgerundet sind; alle übrigen fossilen Arten, wie *Pristis Agassizii* Gibbes aus dem Eocän von Süd-Carolina, *Pristis Hastingsiae* Ag. und *acutidens* Ag. aus dem Eocän Englands stimmen äusserlich durch den Besitz einer Furche längs des Hinterrandes mit *Pristis antiquorum* mehr überein. *Propristis Schweinfurthi* zeigt jedoch im inneren Bau seiner Zähne auch vollkommene Übereinstimmung mit denen der lebenden Art. Diese bestehen aus zahlreichen polygonalen Dentinröhrchen, deren jede in der Mitte eine centrale Keimhöhle hat. Der Durchschnitt zeigt also zahlreiche, unmittelbar an einander gelegte Polygone, deren jedes in der Mitte einen dunklen Kern (die Pulpenhöhle) besitzt, und genau so, ja ununterscheidbar ist auch der Durchschnitt des Zahnes unserer fossilen Art, so dass das von Hubrecht gegebene Bild durchaus dem entspricht, welches ein von einem fossilen Zahn gefertigter Dünnschliff aufwies.[1]

Schliesslich sei noch auf die auffallende Thatsache hingewiesen, dass fossile Sägefische bisher fast nur aus untertertiären Schichten (Eocän und Oligocän) beschrieben worden sind, während Miocän und Pliocän deren noch nicht geliefert haben.[2]

Hemipristis curvatus nov. sp.

Taf. I. Fig. 4*a. b.*

Die Krone ist auf der Innenseite convex, auf der Aussenseite flach, an der Basis mit einer medianen, flachen, dreieckigen Einsenkung. Die Breite des Zahnes entspricht ungefähr seiner Höhe. Die Spitze ist je nach der Stellung im Maule mehr oder minder rückwärts gebogen, derart, dass die kleineren, mehr vorn gestandenen Zähne stärker gekrümmt sind. Auf beiden Rändern ist etwa bis zu zwei Drittel der Höhe eine deutliche und scharfe Zähnelung vorhanden. Der hintere Rand zeigt fünf bis sechs Zähnchen, welche von der Basis nach der Spitze zu allmählich grösser werden, der Vorderrand nur zwei bis vier Zähnchen, die sich in der gleichen Richtung vergrössern. Während aber bei allen fünf vorhandenen Exemplaren die Zähnelung des hinteren Randes deutlich entwickelt ist, zeigt die des vorderen

[1] Hubrecht in: Bronn's Classen und Ordnungen des Thierreichs VI. 1. S. 29. Taf. II. Fig. 3. (Copirt aus: A. Hannover. Om Bygningen og Udviklingen of Skjael og Pigge hos Bruskfisk. Vidensk. Selsk. Skriften 5. Räkke. Bd. VII. Kjöbenhavn 1867.)

[2] Über eine Bemerkung in Quenstedt's Petrefactenkunde 3. Aufl. 1882. S. 290. dass in der Molasse von Baltringen *Pristis*-Zähne gefunden seien, waren weitere Angaben nicht aufzufinden.

Randes die Tendenz zu verschwinden. Die Wurzel ist niedrig, an den Seiten dünn; unter der Mitte steigt sie aber, allmählich dicker werdend, hoch auf und hat in der Medianebene eine tiefe Furche. Das Email der Krone wird dadurch in der Mitte der Innenseite halbkreisförmig ausgeschnitten.

Die Entscheidung der Frage, ob die beschriebenen Zähne in der That zur Gattung *Hemipristis* und nicht vielmehr zu *Galeocerdo* zu stellen seien, hat erst nach längerer Untersuchung getroffen werden können. Die typische Art, *Hemipristis serra* AG. (l. c. p. 237 t. 27. f. 18—30) zeigt durch die mehr gleichschenklig-dreieckige, hohe Gestalt und namentlich durch die hoch bis zur Spitze heraufreichende Zähnelung der Ränder eine von den Arten der Gattungen *Galeus* und *Galeocerdo* so abweichende Gestalt, dass die Aufstellung einer neuen Gattung für sie durchaus gerechtfertigt war. *Hemipristis curvatus* dagegen erinnert durch stärkere Krümmung, dadurch, dass die Spitze auf grössere Erstreckung hin glatt bleibt und sich unmittelbar über der Zähnelung des Hinterrandes plötzlich stark rückwärts biegt, lebhaft an *Galeocerdo*-Zähne. Nichtsdestoweniger glaube ich doch die Zutheilung zu *Hemipristis* begründen zu können. Alle *Galeocerdo*-Zähne aus den hinteren Reihen zeigen über der Randzähnelung eine plötzliche Knickung der Spitze nach hinten, welche *Hemipristis* fehlt, und darin ist der wesentliche Unterschied im Zahnbau zwischen beiden Gattungen zu erkennen, und gerade aus der verschiedenen Beschaffenheit derjenigen Zähne, welche im Gebiss der Thiere ungefähr dieselbe Stellung gehabt haben müssen, ergiebt sich auch die Zugehörigkeit zu zwei verschiedenen Gattungen.

Hemipristis serra und die zweite — wohl einzuziehende — Art: *Hemipristis paucidens* AG. sind von *Hemipristis curvatus* wohl unterschieden, abgesehen von ihrer bedeutenderen Kleinheit namentlich durch die durchaus verschiedene Zähnelung der Ränder. Zwar zeigt AGASSIZ (l. c. f. 20) auch, dass bei *Hemipristis serra* hin und wieder der Vorderrand viel schwächer gezähnelt sein kann, als der hintere, aber überall reicht die Zähnelung bis dicht unter die Spitze und niemals biegt sich die Spitze so weit rückwärts, wie hier. — Dieselbe Art, welche hier unter dem Namen *Hemipristis curvatus* beschrieben ist, besitzt die Berliner palaeontologische Sammlung auch aus dem Eocän von Claiborne in Alabama, und diese amerikanischen Exemplare zeigen noch mehr, wie die afrikanischen, die im Vergleich zum Hinterrand schwache Zähnelung des Vorderrandes, welcher davon nur schwache Spuren erkennen lässt. In dem, die tertiären Squaliden von Nord-Amerika behandelnden Werke von GIBBES[1] findet sich die Art nicht, falls nicht

[1] Monograph of the fossil Squalidae of the United States: Journ. Ac. nat. Science. Philadelphia. 1848.

die l. c. t. 25 f. 82—85 abgebildeten, graderen Zähne die zugehörigen aus dem vorderen Theil des Gebisses darstellen; sie besitzen wohl die lange ungezähnelte Spitze, sind aber doch wohl für unsere Art zu gross. Eher noch wäre anzunehmen, dass diejenigen Zähne, welche Agassiz als *Hemipristis paucidens* beschrieben hat und zu welchen auch die citirten Figuren von Gibbes, der sie alle unter dem Namen *serra* zusammengefasst hat, gehören könnten, die Vorderzähne von *Hemipristis serra* sind, welche dann schwächere Randzähnelung besassen.

Corax Egertoni Ag.

Taf. I Fig. 5.

Agassiz l. c. p. 228. t. 36. f. 6—7.
Galeocerdo Egertoni Gibbes l. c. p. 13. t. 25. f. 66—69.

Eine Reihe von sechs Zähnen stimmt mit den von Agassiz und Gibbes abgebildeten so genau überein, dass an ihrer Identität nicht zu zweifeln ist. Die Gattung *Corax*, welche Gibbes mit *Galeocerdo* vereinigt, halte ich im Agassiz'schen Sinne aufrecht. — Die Art war bisher aus dem Eocän von Süd-Carolina und aus dem Miocän von Maryland bekannt geworden.

Galeocerdo latidens Ag.

Agassiz l. c. p. 231 t. 26 f. 22. 23.

Von den sieben vorhandenen Stücken besitzen die grössten nur die halbe Grösse des von Agassiz abgebildeten; jedoch in Form der Spitzen, Zähnelung der Ränder, relativer Grösse der Wurzel zur Krone stimmen sie auf das Genaueste überein. Eine Abweichung wäre vielleicht darin zu finden, dass eine ideale, über die Hinterrandzähnchen gelegte Linie fast gerade, sogar ein wenig concav ist, während dieselbe Linie an den Zähnen der Insel im Birket-el-Qurūn convex wird; doch würde hierdurch kein Artunterschied bedingt werden. — Zu derselben Art sind auch drei Zähne zu rechnen, bei welchen die Spitze weniger gekrümmt, schärfer zulaufend, aber verhältnissmässig dicker im Umfange ist und die Randzähnelung (wenigstens an einem Exemplar) feiner wird. Sie werden den letzten Verticalreihen des Unterkiefers angehört haben.

Der Fundort des von Agassiz beschriebenen Zahnes ist unbekannt. Später wurde *Galeocerdo latidens* aus dem Système bruxellien von Belgien[1] und aus dem Unteroligocän von Unseburg[2] bei Magdeburg

[1] T. C. Winkler. Mémoire sur les dents de poissons du terrain bruxellien. Archives du Musée Teyler t. III. p. 303.

[2] T. C. Winkler. Beschreibung einiger fossiler Tertiär-Fischreste, vorzugsweise des Sternberger Gesteins. Mecklenburgisches Archiv Bd. XXIX. S. 22 t. 2. f. 10.

citirt. Die von WINKLER von letzterem Fundort abgebildeten Zähne sind jedoch nur mit äusserstem Vorbehalt zu *Galeocerdo latidens* zu rechnen, da die Zähnelung des Vorderrandes ebenso stark ist, wie die des Hinterrandes und ausserdem viel weniger hoch an der Spitze hinaufreicht. Zutreffend ist jedoch die Bemerkung des Autors, dass die von AGASSIZ l. c. t. 26 f. 20 und 21 abgebildeten und zu *Galeocerdo minor* gezogenen Zähne eher zu *latidens* gehören dürften, wie das auch nach AGASSIZ selbst (l. c. p. 232) nicht ausgeschlossen ist.

Wenn aber auch die von WINKLER als *Galeocerdo latidens* von Unseburg citirten Zähne in der That nicht zu dieser Art gehören sollten, so ist dieselbe doch zweifellos im norddeutschen Oligocän vertreten. Die hiesigen Sammlungen enthalten Stücke aus dem Unteroligocän von Süldorf und dem Oberoligocän von Niederkaufungen. GIBBES (l. c. p. 12) citirt die Art aus dem Eocän von Süd-Carolina und aus dem Miocän von Maryland. Unter den von ihm gegebenen Figuren ist namentlich Figur 61 für uns von Interesse, da dieselbe einen Zahn mit spitzer, aber dicker Spitze und schwacher Zähnelung zeigt, ganz gleich denen, welche oben als den letzten Unterkieferreihen entstammend betrachtet wurden. — Die Citate, welche die Litteratur über das Vorkommen der Art im Tertiär Frankreichs, Corsica's und Italiens bringt, mussten unberücksichtigt bleiben, weil sie nur den Namen geben, also eine Kritik über die Bestimmung ausschliessen.

Carcharias (Aprionodon) frequens nov. sp.

Taf. I Fig. 7*a*—*p*.

In dem MÜLLER-HENLE'schen Werk über die Plagiostomen ist S. 27 ff. nach der Form der Zähne die Gattung *Carcharias* in fünf Untergattungen zerlegt: *Scoliodon* M. H., *Physodon* VALENC., *Aprion*[1] M. H., *Hypoprion* M. H., *Prionodon* M. H. — Die hier zu beschreibenden Zähne gehören zur Untergattung *Aprionodon*, deren Diagnose (l. c. S. 31) lautet: »Die Zähne des Ober- und Unterkiefers ungezähnelt; die Oberkieferzähne gerade oder wenig nach aussen geneigt, die Unterkieferzähne gerade, beide mit verhältnissmässig schmaler Spitze auf breiter Basis.« Dieser von GÜNTHER[2] unverändert wiedergegebenen Diagnose

[1] Der von MÜLLER und HENLE zuerst gegebene Name ist *Aprion*. Da derselbe aber von CUVIER für eine Percoidengattung schon vergeben war, hat ihn GILL in *Aprionodon* verändert, cfr. DUMÉRIL. Histoire naturelle des poissons I. 1865. p. 348.

[2] Catalogue of the fishes in the British Museum VIII. 1870. p. 361.

fügt Duméril[1] hinzu, dass die Zähne des Unterkiefers eine dünnere und mehr ausgezackte Spitze besässen, als die des Oberkiefers.

Weitaus die bedeutendste Mehrzahl aller auf der Insel im Birket-el-Qurūn gesammelten Petrefacten sind Fischzähne, welche die in obiger Diagnose gegebenen Merkmale an sich tragen. Bei allen ist die Krone niedriger, als die Breite der Basis, und alle haben eine breite, niedrige Wurzel, welche innen unter der Mitte sich etwas verdickt und hier mit einer verticalen Furche versehen ist. Die Krone variirt in der Form sehr: von wenig schiefen Dreiecken, deren Basis nur um ein Geringes kleiner ist, als die Höhen, von geraden gleichschenkligen Dreiecken gehen die Zähne über in gleichschenklige Dreiecke, bei welchen sich Basis zu Höhe etwa wie 1 : 2, ja auch wie 1 : 3 verhält. Nach obiger Diagnose ist man berechtigt, die Zähne der ersten Art für Oberkiefer-, die der zweiten Art für Unterkiefer-Zähne zu halten. Die Innenfläche ist gleichmässig gewölbt, die Aussenseite flach. Neben der Spitze läuft am oberen Rande der Wurzel ein Saum entlang, der entweder als directe seitliche Fortsetzung der Krone erscheint oder von der Hauptspitze durch einen kleinen Einschnitt getrennt wird. Dieser Saum ist entweder schneidend scharf oder schwach gefältelt, niemals scharf gezähnelt. — Die Unterkieferzähne mit schlankerer Spitze haben an dieser selbst schneidend scharfe Ränder, die gegen die Basis hin schwächer werden; auch ist bei ihnen der Saum niedriger. In der Grösse schwanken die Zähne wenig unter einander: die Krone der grössten ist circa 9^{mm} lang, die der kleinsten 4^{mm}, welche beiden Extreme durch alle möglichen Übergänge verbunden werden. — Hervorzuheben ist noch, dass auch bei der lebenden Art *Aprionodon acutidens* Rüppell nach Müller und Henle eine Fältelung des Saumes vorhanden ist.

Die auf Taf. I Fig. 7*a*—*p* gegebenen Abbildungen veranschaulichen das oben Gesagte. Fig. 7*a*—*g* stellt eine Anzahl Unterkieferzähne dar, von denen 7*g* der grösste aller gesammelten, 7*e* einer der kleinsten ist. Ebenso sind die Oberkieferzähne durch die Figuren 7*h*—*p* in ihren verschiedenen Formen wiedergegeben, welche auch erkennen lassen, dass die kleineren Zähne im Allgemeinen eine breitere Basis haben, als die grösseren.

Die Litteratur über fossile Squalidenzähne enthält keine Angabe über das Auftreten dieser Gattung im Tertiär oder einer anderen Formation, so dass ihr Erscheinen in Afrika bis jetzt isolirt dasteht.

[1] Duméril l. c. p. 348.

Carcharodon angustidens AG.

AGASSIZ l. c. p. 255 t. 28. f. 20—25; t. 30 f. 5.
Synonym: *Carcharodon Arndti* WINKLER. Fossile Fische des Sternberger Gesteins, l. c. p. 23 t. 3. f. 11.

Ein 55^{mm} hoher[1] und 60^{mm} breiter[2] Zahn lässt in ausgezeichneter Weise den scharfgezähnelten, in mehrere Lappen zertheilten Nebenzahn erkennen und stimmt in allen Details mit den typischen Zähnen von *Carcharodon angustidens* überein, so dass es für die Bestimmung in diesem speciellen Falle gleichgültig ist, ob man mit GIBBES die von AGASSIZ unter den Namen *auriculatus, heterodon, lanceolatus, megalotis, semiserratus, toliapicus, turgidus* als Arten dargestellten Zähne zu *angustidens* ziehen will oder nicht. Jedenfalls aber ist *Carcharadon Arndti* WINKLER von Unseburg vom typischen *angustidens* nicht zu unterscheiden; dagegen entstehen Zweifel, ob das, was derselbe Autor auf Taf. 3 Fig. 12 als *angustidens* aus dem Miocän von Lüneburg abgebildet hat, noch dieser Art zugerechnet werden kann.

Otodus obliquus AG.

Taf. I Fig. 6*ab*.

AGASSIZ l. c. p. 267. t. 31. f. 1—14; t. 36 f. 22—27.

Zwei Zähne, welche kaum die Grösse des kleinsten der von AGASSIZ gegebenen Abbildungen erreichen, gehören sicher zu obiger Art. Sie haben beide jederseits zwei Nebenzähne, wie auf AGASSIZ's t. 31. f. 2, aber mit schärferer Spitze, sowie tiefer vom Hauptzahn, als auch untereinander getrennt.

Lamna (Odontaspis) verticalis AG.

Taf. I Fig. 8—10.

AGASSIZ l. c. p. 294. t. 37a. f. 31—32.

Zwei vortrefflich erhaltene Zähne zeigen durch gerade, auf der Innenseite gewölbte Kronen, deren scharfe Ränder und vom Hauptzahn tief getrennte spitze Seitenzähne eine vollkommene Übereinstimmung mit der durch AGASSIZ von Sheppy und durch WINKLER aus dem terrain bruxellien Belgiens beschriebenen Art ergeben.

Ausser diesen beiden Zähnen ist eine Reihe anderer, kleinerer mit Vorbehalt dieser Art zuzurechnen, welche allerdings nicht durch Übergänge in der Grösse mit jenen verbunden sind, doch aber in der gesammten Form gut übereinstimmen. Zwei davon sind Taf. I Fig. 8 und 9 abgebildet. Die Krone läuft spitz zu, ist etwas nach hinten gebogen und bei fast allen Stücken völlig gerade, nur an

[1] Gemessen in der Medianlinie von der Spitze bis zum unteren Rande der Wurzel.
[2] Gemessen zwischen den äussersten Abständen der beiden Wurzeläste.

zweien ein wenig rückwärts gewendet. Die Seitenzähnchen sind scharf von der Hauptspitze getrennt, spitz und schmal und auch, wie der Hauptzahn, senkrecht aufwärts gerichtet. Die Wurzel ist dick, massiv, unter der Mitte innen angeschwollen und in der Medianlinie durch eine tiefe, verticale Furche getheilt; nach den Seiten hin nimmt sie allmählich an Dicke und Höhe ab, so dass sie unten fast gerade und nur in geringem Grade ausgebuchtet ist.

Ganz ähnliche, wahrscheinlich idente Zähnchen hat Winkler[1] aus den belgischen Bruxellien als *Otodus minutissimus* oder als *Otodus parvus*[2] beschrieben. Zunächst kann es nicht bezweifelt werden, dass diese beiden Arten zusammenfallen, und mit ihnen auch noch eine dritte Art desselben Autors, welche als *Odontaspis Mourloni*[3] aus dem Unteroligocän von Lethen beschrieben wird, zu verbinden ist. Letztgenannte Art nun vergleicht Winkler selbst mit *Lamna verticalis* und trennt sie nur wegen der weitauseinanderstehenden Wurzelhörner. Da Winkler diese Zähne in einer Abhandlung zu *Otodus*, in einer anderen zu *Lamna* gerechnet hat, ist zuerst die Frage zu beantworten, welche Annahme die besser begründete ist. Aus den Zähnen an und für sich ist die Entscheidung schwer zu treffen, wie denn Agassiz (l. c. p. 288) auch selbst sagt, dass manche Arten sich auf der Grenze zwischen *Lamna* und *Otodus* befinden, wie *Lamna compressa* und *Otodus appendiculatus*. Das, was bei unseren Zähnen am meisten für *Otodus* spricht, ist die Beschaffenheit der Wurzel, welche durch den Mangel seitlicher Hörner der bei *Otodus* gewöhnlichen Form am nächsten steht; doch ist nicht zu vergessen, dass manche von Agassiz zu *Lamna* gestellten Arten, wie *Lamna compressa*, *denticulata* etc., auch ganz ähnliche, in der Mitte wenig ausgebuchtete Wurzeln besitzen, dass aber die scharfabgesetzten, spitzen Seitenzähne und die schmale Hauptspitze durchaus *Lamna*-ähnlich beschaffen sind. Da ferner an Gebissen lebender *Lamna*-Arten leicht zu erkennen ist, dass die kleinen Zähne der letzten Verticalreihen auch eine viel geringer ausgeschnittene und auch weniger in Hörner verlängerte Wurzeln besitzen, als die grösseren der vorderen Reihen, so scheint die Zutheilung dieser kleinen Zähne zu *Lamna verticalis* erforderlich; doch natürlich so lange mit Vorbehalt, bis entscheidende Grössenübergänge gefunden sein werden. Hervorzuheben ist weiter als Stütze dieser Annahme die Thatsache, dass Winkler neben *Otodus minutissimus* auch im belgischen Eocän *Lamna verticalis* gefunden hat, und noch mehr wird die Zusammengehörigkeit der grossen und der kleinen Zähne durch die von Gibbes (l. c. t. 26

[1] Archives du musée Teyler III. p. 297. t. 7. f. 2.
[2] Archives du musée Teyler IV. 1. p. 7. f. 5 u. 6.
[3] Archives du musée Teyler V. 2. p. 5.

f. 124—127) gegebenen Abbildungen von *Lamna verticalis* befürwortet, da diese sowohl in Bezug auf Grösse als auch auf Tiefe des Wurzelausschnitts zwischen beiden in der Mitte stehen und nur durch die kleineren Nebenzähnchen auffallen. — Es scheint, dass diese Zahnformen bisher nur im Eocän gefunden sind, denn auch GIBBES führt sie nur aus dieser Formation Süd-Carolina's an.

B. Teleostei.

Saurocephalus Fajumensis nov. sp.

Taf. I Fig. 12*a—c*

Vier fast gleich grosse, wurzellose Zähne von gerader, regelmässig-lanzettlicher Gestalt, circa 8^{mm} Höhe, 5^{mm} Breite, mit flachgewölbten Seiten und scharfen Rändern veranlassen die Aufstellung einer neuen Art, die sich von den bisher bekannt gewordenen leicht dadurch unterscheidet, dass sie völlig glatt, also ohne verticale Streifen oder Runzeln ist. An der Basis des grössten Exemplars ist allerdings bei starker Vergrösserung eine feine verticale Streifung wahrzunehmen, welche aber nur 2^{mm} lang an der Krone hinaufgeht, während der obere Theil auch hier völlig glatt und glänzend ist.

In Tertiärbildungen hat sich die Gattung *Saurocephalus*, welche namentlich in der oberen Kreideformation mit *Enchodus* zusammen verbreitet ist, noch an keiner anderen Localität, als der hier beschriebenen gezeigt.

? *Enchodus* sp.

Taf. I Fig. 11.

Einige wurzellose Zähne zeigen die allgemeine Gestalt der *Enchodus*-Zähne, sind aber comprimirter als die der übrigen bekannten Arten und entbehren des vorderen scharfen Randes, der hier gerundet ist. Ob in der That die Gattung *Enchodus* durch diese Zähne vertreten wird, ist nicht mit Sicherheit zu entscheiden; jedenfalls ist sie die nächstverwandte.

Ebenso wie *Saurocephalus* hat auch *Enchodus* seine Hauptverbreitung in der oberen Kreideformation und war lange Zeit nur aus dieser bekannt. Neuerdings aber hat T. C. WINKLER[1] einen *Enchodus Bleekeri* aus belgischen Bruxellien beschrieben, und weiter ist die Gattung durch drei Zähne aus dem Unteroligocän von Helmstedt repräsentirt, welche in der palaeontologischen Sammlung der Königl. Universität liegen. Ihr Erscheinen im Tertiär Africa's hat sonach nichts Befremdliches mehr.

[1] Deuxième mémoire sur les dents de poissons fossiles du terrain bruxellien. Haarlem 1874. p. 28. f. 24. 25.

Coelorhynchus sp.

Eigenthümliche cylindrische Röhren mit grossem inneren Hohlraum und starken Längsfurchen auf der Oberfläche stellte Agassiz zur Familie der *Xiphioidei* und belegte sie mit obigem Namen. Solche Fragmente der spitzen Schnäbel sind in ziemlicher Anzahl in der hier bearbeiteten Suite vertreten und zwar von Thieren recht verschiedener Grösse. Die cylindrischen Stücke zeigen einen centralen Canal, aussen zahlreiche Längsrippen, welche an einzelnen Stücken wohl in der Medianebene, vielleicht auf der Unterseite des Schnabels durch eine tiefe Rinne unterbrochen sind. Auf dem Querbruch ist zu erkennen, dass die ganze Masse aus langen dünnen Cylindern zusammengesetzt ist. An den grösseren Bruchstücken ist der Canal gross, an den kleineren enger, so dass er sich wahrscheinlich, entsprechend der lang-konischen Aussengestalt der Schnäbel, nach vorn zu allmählich verengte.

Reste von *Coelorhynchus* sind namentlich aus der senonen Kreide Englands durch Agassiz und Dixon beschrieben worden. Ausserdem kommen sie auch in der Mucronatenkreide Lüneburgs vor. Im Tertiär wurden sie bisher beobachtet auf Sheppy (nach Agassiz), bei Brackles-ham (nach Dixon), bei Claiborne in Alabama, und zwar stimmen die von letzterer Localität stammenden Stücke der hiesigen palaeontologischen Universitätssammlung derart genau mit den afrikanischen überein, dass man sie sicher beide einer Art zuzählen würde, wenn man wüsste, ob die *Coelorhynchus*-Arten allein auf die Gestalt der Schnäbel hin zu unterscheiden sind. — Winkler erwähnt zwei Arten aus belgischem Bruxellien.

Progymnodon Hilgendorfi nov. gen. et nov. sp.
Taf. I Fig. 13*a—c*.

Zu den wichtigsten Funden, welche Hr. Schweinfurth auf der Insel des Birket-el-Qurūn machte, gehört die Kauplatte eines Gymnodonten, wie sie bisher in solcher Vollständigkeit fossil noch ungekannt war. Dieselbe besitzt den Umriss einer halben Ellipse, ist 19^{mm} breit (wobei die abgebrochenen Ecken nicht ergänzt sind) und in der Mitte 8^{mm} lang. Sie besteht aus zwei Theilen, einem mittleren, grösseren (Fig. 13*a* bei α) und einem vorderen, kleineren (Fig. 13*a* bei β und Fig. 13*b*). Der mittlere Theil ist zusammengesetzt aus zwei fest miteinander verbundenen Plattenreihen, deren Zahl auf der linken Seite sechs, auf der rechten sieben beträgt. Die Platten je einer Reihe liegen schräg übereinander, so dass von oben her die hintersten nur als schmale Bänder, die vorderen dagegen breiter und breiter sicht-

bar werden. Die Oberfläche ist mit feinen, wie durch Nadelstiche hervorgerufenen Punkten bedeckt, die Unterseite mit zahlreichen, dichtgedrängten Grübchen (Fig. 13*c*). Der vordere Theil, welcher den äusseren Rand bildet, legt sich unmittelbar an den hinteren Theil an und besteht aus sechs Verticalreihen kleiner Plättchen (Fig. 13*b*). Jede Reihe besteht aus etwa zehn bis zwölf schmalen Plättchen, deren seitliche und obere Ränder leistenartig verdickt sind. Die relative Grösse der Plättchen einer Reihe ist verschieden, doch lässt sich feststellen, dass die beiden Verticalreihen zur Seite der Medianebene die kleinsten sind. Die Oberfläche ist ähnlich punctirt, auch zeigt die Unterseite dieselbe grubige Beschaffenheit, wie die Platten des mittleren Theiles.

Dass in dem fraglichen Körper die Kauplatte eines Gymnodonten vorliegt, kann keinem Zweifel unterliegen. Es ist jedoch näher zu erörtern, in wie weit der Bau derselben mit dem der lebenden Gymnodonten übereinkommt. Zum Vergleich hierfür diente ein vertical durchschnittener Unterkiefer eines *Diodon*, welchen Hr. HILGENDORF freundlichst mitgetheilt hatte. Dieser Verticaldurchschnitt zeigt, von der Seite betrachtet, im hinteren Theil eine grosse Höhlung (Fig. 14 bei α), deren Dach durch Cement gebildet wird (Fig. 14 bei β), dieses jedoch durch Abnutzung im vorderen Theile verschwunden. In dieser Höhlung werden die grossen, hinteren Platten gebildet, welche schräg übereinanderliegen und sich allmählich nach vorn weiter schieben, so dass das durch Abkauen vorn Verlorene durch Nachschub von hinten ersetzt wird. Auch zwischen die einzelnen Platten dringt Cement als schmale Schicht ein. Dieselbe Substanz bildet auch den vorderen Rand, in welchem eine verticale Reihe kleiner Plättchen liegt (Fig. 14 bei γ), diese aber durch eine dicke Schicht Cement von den grossen Platten getrennt. Unter dieser letzterwähnten Cementschicht liegt ein Hohlraum, vielleicht ein Gefässcanal (Fig. 14 bei δ). Der Durchschnitt eines *Diodon*-Unterkiefers zeigt also drei Höhlungen, eine hintere, in welcher sich die grossen, schrägen, den Haupttheil des gesammten Gebisses ausmachenden Platten bilden, eine mittlere, muthmaasslich einen Gefässcanal darstellend, und eine vordere, in welcher die vorderen verticalen Plättchen erzeugt werden. Bei nicht abgenutzten Gebissen ist die ganze Oberfläche mit Cement bedeckt, welches vorn über den kleinen Plättchen den vogelschnabelähnlichen Rand des *Diodon*-Gebisses bildet. Betrachtet man aber ein solches Gebiss von oben, so sieht man stets deutlich, dass zwischen den hinteren grossen und den vorderen kleinen Platten eine Einsenkung vorhanden ist, welche der zwischen den beiden Plattensystemen liegenden Cementschicht entspricht. Bei unabgekauten Gebissen tritt diese Einsenkung

garnicht oder nur in geringem Grade hervor: bei fortschreitender Abnutzung wird jedoch das Cement schneller verbraucht, als die Zahnplatten vorn und hinten, welche zuletzt aus der Cement-Umhüllung hervorsehen.

Die fossile Kauplatte zeigt nun im Vergleich mit dem eben besprochenen *Diodon*-Gebiss folgende Übereinstimmung, respective Abweichung. Von oben gesehen zeigt sie, dass zwischen die einzelnen grossen Platten auch Cement gelagert ist, welches um so deutlicher hervortritt, je mehr die Platten abgenutzt sind, also namentlich an den vordersten (auf der Figur ist dasselbe durch einen helleren Ton hervorgehoben). Ferner nimmt man an den Bruchstellen der Ecken ebenfalls Cement wahr. Da ferner nicht daran zu zweifeln ist, dass beim Leben des Thieres auch auf den Platten (jetzt durch Abnutzung und Verwitterung verschwundenes) Cement gelegen haben wird, so ist die Einschaltung und Einbettung dieser hinteren Platten in Cement dieselbe, wie bei *Diodon*. Anders ist das Verhalten der kleinen vorderen Platten. Während bei *Diodon* diese durch eine dicke Cementschicht von den grösseren getrennt sind, ist an dem fossilen Gebiss, namentlich auf der Unterseite (Fig. 13*c*) mit Klarheit zu erkennen, dass die kleinen vorderen Plättchen sich unmittelbar an die grossen, hinteren anlegten: es fehlte also die bei *Diodon* beide Plattensysteme trennende Cementschicht. Dadurch wird nun auch die Profillinie beider wesentlich verschieden. Die Oberfläche eines *Diodon*-Gebisses zeigt im Verticalschnitt von der Seite betrachtet eine hintere Wölbung (die grösseren Platten), dann eine mittlere Einsenkung (die Cementschicht) und eine vordere scharfe First (die vorderen Plättchen). Bei der fossilen Kauplatte bildet die Profillinie eine bis zum Vorderrand gleichmässige Wölbung und einen vorderen senkrechten Abfall.

Diese fundamentale Verschiedenheit im Aufbau des Gebisses der fossilen und der lebenden Formen rechtfertigt die Aufstellung einer neuen Gattung für erstere, für welche *Progymnodon* in Vorschlag gebracht wird. Es ist absichtlich vermieden worden, *Prodiodon* oder ähnliche Bezeichnungen zu wählen, um einem vermeintlichen Hinweis auf engere Verwandtschaft mit einer lebenden Gattung zu entgehen. Unter letzteren werden nach der Zahl der Zähne *Diodon*, *Triodon*, *Tetrodon* unterschieden. Besteht aber das vorliegende Material, wie in diesem Falle, nur aus einer Gebisshälfte, so lässt sich wohl erkennen, ob diese aus ein oder zwei Kauplatten oder »Zähnen« besteht, nicht aber, wie die dazu gehörige Hälfte beschaffen war. In unserem Falle ist *Tetrodon* ausgeschlossen, da die fossile Kauplatte nur aus einem Stück besteht: sehr wohl kann *Diodon*, in Betracht kommen, der oben wie unten nur eine Platte besitzt; aber auch *Triodon*, mit zwei

oberen und einer unteren Kauplatte, ist nach dem vorhandenen Material aus der Verwandtschaft nicht ausgeschlossen, wenn angenommen wird, dass unser Stück von *Progymnodon* eine Unterkieferkauplatte darstellt.

Wie fossile Plectognathen überhaupt, so gehören namentlich fossile Gymnodonten zu grossen Seltenheiten unter palaeontologischen Objecten. In AGASSIZ's oft citirtem grossen Werk[1] sind drei Arten von *Diodon* namhaft gemacht; zunächst *Diodon tenuispinus* AG., eine kleine zolllange Art vom Monte Bolca, an welcher die Kauplatte durch Verdrückung zwar sichtbar, aber undeutlich erhalten ist; dann *Diodon erinaceus* AG. von drei Zoll Länge, bis jetzt weder ausführlich beschrieben, noch abgebildet; und zuletzt *Diodon Scillae*. Letztere Art ist auf einzeln vorkommende Kauplatten, welche aus Tertiärablagerungen des mittleren Italiens stammen sollen, begründet. Auch *Diodon Scillae* ist von AGASSIZ nur kurz beschrieben und nicht abgebildet, doch hat GUISCARDI[2] die Kenntniss derselben vervollständigt. Man erfährt durch ihn, dass COSTA solche Kauplatten für Crustaceenreste gehalten und unter dem Namen *Megalurites nitidus* in die Verwandtschaft der Trilobiten hat bringen wollen. Ein Exemplar dieser Art befindet sich in der Berliner palaeontologischen Sammlung, aber, wie alle bisher bekannt gewordenen, ohne genauere Fundortsangabe. Dass in dieser Art Gymnodonten-Kauplatten vorliegen, unterliegt keinem Zweifel, wohl aber ist ihre Zugehörigkeit zur Gattung *Diodon* fraglich. Die steilere Lage der Platten, ihre viel beträchtlichere Zahl, namentlich aber der vordere Steilabfall und die seitlich in kurze Spitzen ausgezogenen Ecken zeigen eine von *Diodon* so abweichende Zusammensetzung und Form, dass auch für *Diodon Scillae* (AG.) GUISCARDI am besten eine neue generische Benennung einzuführen sein wird. Eine sehr nahestehende Art hat ferner LOCARD[3] nach der Bestimmung SAUVAGE's als *Phyllodus corsicanus* aus dem Tertiär von Bonifacio auf Corsica beschrieben und abgebildet. Zwischen *Diodon Scillae* und *Phyllodus corsicanus* besteht der einzige Unterschied, dass letzterer ein relativ längeres Gebiss ohne zugespitzte Seitenecken besitzt. Die Zuweisung zu *Phyllodus* ist ungerechtfertigt, und somit wird *Phyllodus corsicanus* als zweite Art neben *Diodon Scillae* einer, wie oben erörtert, neu zu benennenden Plectognathen- resp. Gymnodontengattung zuzurechnen sein.

---

[1] Recherches sur les Poissons fossiles. Vol. II. p. 273. t. 74. f. 2—3.

[2] Annotazioni paleontologiche. Atti della Reale Accademia delle Scienze fisiche e matematiche Vol. II. 1872. p. 5. t. 16. f. 2—4.

[3] A. LOCARD. Description de la faune des terrains tertiaires moyens de la Corse. (Description des Échinides par G. COTTEAU.) Paris-Genève 1877. p. 11. t. 1. f. 1—2.

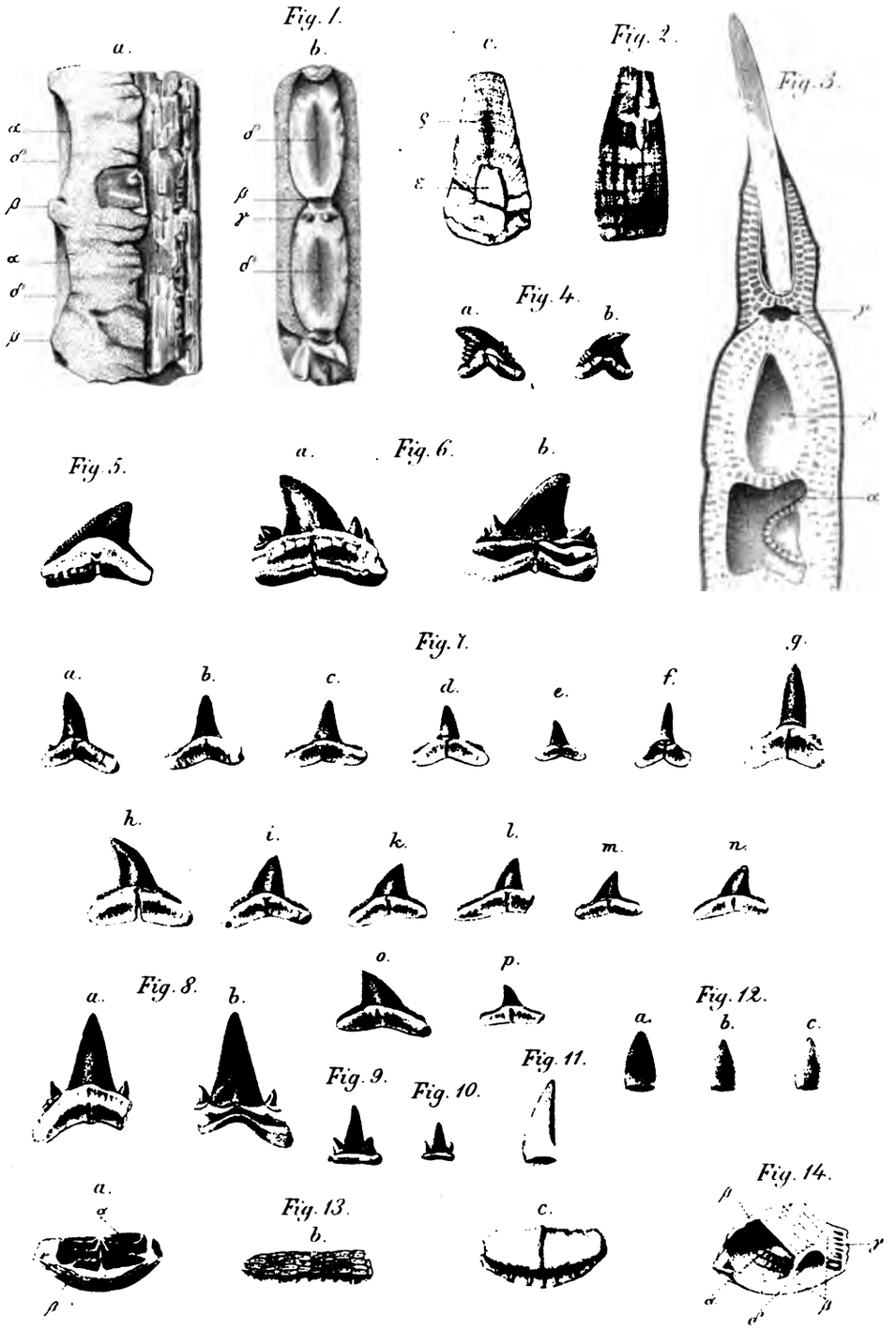
Da der Vergleich mit den lebenden Gattungen, namentlich mit *Diodon* nur durch das freundliche Entgegenkommen des Hrn. Hilgendorf möglich wurde, ist die Art nach ihm benannt worden.

Schliesslich ist noch zu untersuchen, ob und in wie weit auf Grund der hier beschriebenen Wirbelthierfauna das Alter der dieselbe enthaltenden Schicht ermittelt werden kann. — Darüber, dass dieselbe zur Tertiärformation gehört, ist kein Zweifel; es frägt sich also weiter, welcher Unterabtheilung dieser Formation sie zuzurechnen ist. — In den meisten Fällen wird es nun sehr schwierig sein, aus einer namentlich von Selachiern zusammengesetzten Fauna das Alter einer Schicht zu bestimmen, da gerade diese besonders langlebig sind und damit natürlich sowohl in Gattungen wie in Arten eine aussergewöhnlich grosse, verticale Verbreitung besitzen: ist doch ein jurassischer *Notidanus* kaum der Art nach von den lebenden zu unterscheiden. Als eine zweite Schwierigkeit tritt hinzu, dass äusserst wenige Selachierfaunen überhaupt, und namentlich nicht in jüngerer Zeit, wo man den geologischen Verhältnissen mehr Rechnung trägt, beschrieben wurden. Die oben wiederholt citirten Abhandlungen von Agassiz, Gibbes und Winkler geben die einzigen Anhaltspunkte, alles übrige, was die Litteratur hat, sind Namen, welche keine Kritik erlauben oder Monographieen vom einseitig zoologischen Standpunkt, die für die Beantwortung der hier aufgeworfenen Altersfrage kaum in Betracht kommen können. — Aus diesen Gründen wird eine auf eine zumeist aus Selachiern bestehende Fauna hin versuchte Altersbestimmung stets bis zu einem grösseren oder geringeren Grade an Unsicherheit leiden, doch trifft es sich günstig, dass dieselbe in unserem Falle nur gering ist. Denn, abgesehen von den als neu erkannten Arten, sind sämmtliche Selachier aus eocänen Ablagerungen anderer Länder beschrieben worden, nämlich *Myliobates suturalis*[1], *jugalis*, *acutus*, *Owenii*, *Corax Egertoni* (auch miocän), *Galeocerdo latidens* (auch oligocän), *Carcharodon angustidens* (auch oligocän), *Otodus obliquus* und *Lamna verticalis;* zwei davon gehen auch in das Oligocän herauf, eine endlich wird auch aus dem Miocän angeführt.[2] — Zu diesen Selachiern gesellen sich

---

[1] Auch die in der Beschreibung der Arten mit »cfr.« bezeichneten Species sind hier mit aufgezählt, da sie, auch wenn sie mit den obigen nicht völlig ident sein sollten, ihnen doch jedenfalls äusserst nahe stehen und jedenfalls im Gesammthabitus der Fauna dieselbe Rolle spielen, wie diese.

[2] Vielleicht würde sich eine grössere Artenzahl auch aus dem Oligocän angeben lassen, wenn die Selachierfaunen gerade der typischen Oligocän-Localitäten einheitlich bearbeitet wären.



Gez. u. lith. von Lau

W. Dames. Tertiäre Wirbelthierfauna von der westlichen Insel des Birket-el-Qurūn im Fajum.

5. Bericht über die botanischen Ergebnisse einer Bereisung Thessaliens.

Von Th. v. Heldreich.

(Vorgelegt von Hrn. Eichler am 8. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VI]: — ausgegeben am 15. Februar.)

Thessalien war bis jetzt in botanischer Beziehung fast gänzlich unbekannt geblieben, nur der Olymp war von Aucher-Eloy (1836), von Heldreich (1851) und von Orphanides (1857) genauer untersucht worden. Über die Vegetationsverhältnisse aller übrigen Theile Thessaliens, der thessalischen Ebene, des Küstengebietes, der Gebirge Pelion, Ossa und Pindus war unsere Kenntniss im höchsten Grade mangelhaft. Weder Sibthorp kam nach Thessalien, noch haben es spätere Botaniker untersucht. In den systematischen Hauptwerken und Floren, wie de Candolle Prodromus Syst. nat. Regni vegetabilis, Boissier Flora Orientalis und Nyman Conspectus Florae Europaeae findet man daher die genannten Localitäten Thessaliens, mit Ausnahme des Olymps, kaum zehnmal erwähnt. Es war somit sehr wünschenswerth, diese Lücke in der Flora Graeca auszufüllen, und ich unternahm zu diesem Zwecke im Sommer vorigen Jahres (1882) eine Reise nach Thessalien und untersuchte während eines zweimonatlichen Aufenthaltes insbesondere die Umgegend von Volo, das Peliongebirge, die thessalische Ebene bis Larissa, das Thal von Agyiá, das Ossagebirge und das Tempethal.

Es war im voraus anzunehmen, dass die Flora Thessaliens grosse Ähnlichkeit mit der Flora der angrenzenden Landstriche, also Süd-Macedoniens im Norden und der Phthiotis und Eurytaniens im Süden zeigen werde, und dies wurde im Allgemeinen durch die genauere Untersuchung auch bestätigt. Dessen ungeachtet fand ich auch einige ganz neue Pflanzenarten und mehrere für die griechische Flora neue, das heisst bis jetzt noch nicht beobachtete Typen, von welchen an geeignetem Orte eingehender die Rede sein wird.

Ausgezeichnet durch Quellenreichthum und üppigen Baumwuchs ist besonders das Peliongebirge und deshalb auch seine Vegetation

eine überaus reiche und mannigfaltige. Das Peliongebirge war schon im Alterthume wegen seiner grossen Fruchtbarkeit und seines Pflanzenreichthums berühmt, wie besonders aus einer sehr interessanten Beschreibung hervorgeht, die uns in einem Fragmente des Dicaearchos erhalten geblieben ist, wo der Pelion reich an Wäldern (»ὑλῶδες«) und an Obstbäumen (»δένδρα ἔχων τοσαῦτα καρποφόρα, ὅσα καὶ τὰς τῶν γεωργουμένων συμβαίνει χώρας«) und überhaupt πάμφορον genannt und gesagt wird, dass »ὕλης δ'ἐν αὐτῷ πᾶν φύεται γένος«.[1] Sich bis zur Höhe von 1618^{m} über den Meeresspiegel erhebend, gedeihen an der Ostküste des Pelion die Orangen und auf beiden Abhängen der Ölbaum bis zur Höhe von circa 1000^{m}. In dieser Region liegen die nach ihrer Zahl sogenannten vierundzwanzig zum Theil sehr bedeutenden Ortschaften des Pelion, (τὰ εἴκοσι τέσσαρα χωριά), meist inmitten eines dichten Waldes von Obstbäumen, vorzüglich Apfelbäumen, Kirschen, Pflaumen, Wall- und Haselnüssen. Sehr häufig ist auch der Kastanienbaum *(Castanea vulgaris Lam.)*, öfters kleine Wälder bildend. Von 1000^{m} Seehöhe bis auf die höchsten Gipfel ist das Gebirge grösstentheils mit Buchen *(Fagus silvatica L.)* bewachsen, doch leider sind diese meist nur noch als mannshohes Gesträuch vorhanden und nur selten baumförmig in grösseren Beständen. Die Zerstörung der Wälder war auch hier, wie allenthalben in Griechenland, eine nicht zu bewältigende Kalamität und die Folge davon die mit Riesenschritten unaufhaltsam überhandnehmende Entwaldung der Berge. Häufig und oft baumförmig findet sich am Pelion die im übrigen Hellas seltene, nördlicher jedoch am Olymp und in Macedonien sehr gemeine Stechpalme *(Ilex Aquifolium L.)*. Durch üppiges Wachsthum und Grösse ganz vorzüglich hervorragend ist die Platane *(Platanus Orientalis L.)*, überall in Menge wuchernd, wo fliessendes Wasser in der Nähe ist. Einzelne Platanen in den Dörfern, gewöhnlich auf den Markt- oder Gemeindeplätzen die öffentlichen Trinkquellen beschattend, haben bei entsprechend hohem Alter ganz kolossale Dimensionen erreicht, wie ich mich nicht erinnere, ähnliche anderswo gesehen zu haben. Im Dorfe Zachora auf der Ostseite des Pelion sind prachtvolle Gruppen solcher Riesenbäume; der Stamm eines der grösseren hatte, einen halben Meter über dem Boden gemessen, 12^{m} im Umfang. Von der vielbewunderten Platane in Kephissia bei Athen hat der Stamm

---

[1] Vergl. Geographi Graeci minores, ed. C. Müller, Paris. Didot. 1855, pag. 106. (Dicaearchi, ut fertur, potius vero Athenaei descriptionis Graeciae fragmenta tria.) Auch Theophrast erwähnt mehrmal des Peliongebirges und nennt es unter andern sehr reich an Heilmitteln (»τὴν δὲ περὶ τὴν Ἑλλάδα τόπων φαρμακωδέστατον τό τε Πήλιον τὸ ἐν Θετταλίᾳ« Hist. pl. IX, 15, 4.)

ganz am Boden nur 9.75^{m} im Umfang. Die vorzüglichsten Erzeugnisse und zugleich wichtigsten Ausfuhrartikel des Pelion sind Olivenöl, Äpfel, Haselnüsse und Kartoffeln. Die grössten Olivenwälder, der Hauptreichthum des Landes, sind auf der Westseite des Gebirges. Die Äpfel, die einer nur wenig veredelten Spielart des sogenannten Spitzapfels angehören, sind zwar klein, aber von angenehm süssem Geschmacke und unter dem Namen φιρίκια bekannt und geschätzt und werden in grossen Quantitäten vorzüglich nach Athen und Konstantinopel ausgeführt. Die Productivität der Bäume ist eine ganz ausserordentliche, und wie ich sie im Spätsommer mit halb roth und gelben Äpfeln bis zum Brechen der Zweige beladen sah, gewährten sie einen überaus lieblichen Anblick. Die Kartoffeln gedeihen sehr gut und werden bis in die oberste Region hinauf fleissig kultivirt; es sind die besten im Orient und werden ebenfalls meist nach Athen und Konstantinopel ausgeführt. Auch sehr guten rothen Wein erzeugt der Pelion, doch nur in geringer Quantität. Die Kastanie wird nicht veredelt, daher die Früchte klein und von schlechter Qualität sind. Der Baum wird mehr seines zur Fertigung von sehr dauerhaften Balken, Dauben und Fassreifen geeigneten Holzes wegen geschätzt und benutzt.

Was die spontane Vegetation des Pelion anbelangt, so trägt sie im allgemeinen den Charakter der griechischen Gebirgsflora, namentlich der von Euboea, nicht ohne Anklänge an das westliche Gebiet der Insel Kreta. Charakteristisch ist das massenhafte Auftreten von *Pteris aquilina L.* vom Meeresufer bis auf die höchsten Höhen, ganz wie auch am Ossa, am Olymp und in Euboea. Ausserdem sind an den Quellen und Bächen Moose und Farrnkräuter ziemlich häufig, eine in den griechischen Gebirgen seltene Erscheinung. Unter den Moosen und mit ihnen verwoben fand ich nicht selten *Sibthorpia Africana L.* Diese zierliche Pflanze und *Blechnum Spicant (L.)* waren es, die mich an West-Kreta erinnerten, wo sie in den Kastanienwäldern von Enneachoria häufig wachsen, wo sich ihnen aber noch *Anagallis tenella L.* zugesellt. In der Waldregion zwischen *Pteris aquilina* fand ich eine prachtvolle 5—6 Fuss hohe *Salvia*, wie es scheint eine neue Art *(S. Eichleriana Heldr. Mss.)*. Auch unter den Moosen fanden sich ein paar neue Arten Der bei weitem merkwürdigste Fund, den ich am Pelion zu machen das Glück hatte, ist indess *Siphonostegia Syriaca (Boiss. et Reut.)*, indem das eigentliche Verbreitungscentrum der Rhinanthaceen-Gattung *Siphonostegia Benth.* in Ostasien liegt und die in westlicher Richtung am weitesten vordringende Art, nämlich *S. Syriaca* bis jetzt auch nur aus Syrien und Cilicien durch Kotschy, Boissier und Balansa bekannt war. Es ist

ein für die Flora Europa's neuer und fremdartiger Typus. Ich fa die interessante Pflanze in grosser Menge auf der Ostseite in e unteren Region des Pelion, auf sonnigen Hügeln zwischen *Erica arborea* wachsend und im Juli noch blühend. Als charakteristische Pflanz der Flora des Pelion sind ausser der schon oben geschilderten Baumvegetation und den zuletzt angeführten Arten besonders noch folgend zu nennen: *Aubrietia gracilis Sprun.*, *Berteroa incana (L.)*, *Cardamine acris Griseb.* (auch noch südlicher vom Dirphys in Euboea bekannt. *Berberis Cretica L.* (überaus häufig, wie auf allen griechischen Hochgebirgen). *Dianthus viscidus Bory et Chaub.*, *Silene multicaulis Guss.*, *Hypericum Olympicum L.*, *Geranium striatum L.*, *Cytisus Austriacus L.*, *Medicago falcata L.*, *Galega officinalis L.* (in grosser Menge), *Rubus tomentosus Borkh.*, *Potentilla hirta L.*, *Agrimonia Eupatoria L.*, *Myrtus communis L.*, *Epilobium spicatum Lam.* (in grosser Menge und eine wahre Zierde der Waldregion). *Epil. lanceolatum Seb. et Maur.*, *Circaea lutetiana L.* (auch am Ossa), *Eryngium amethystinum L. β. tenuifolium Boiss.* (in grosser Menge). *Bupleurum semidiaphanum Boiss.*, *Sium Ammonum L.* (auch am Ossa). *Asperula Aparine MB.*, *Scabiosa Ucranica L.*, *Achillea grandifolia Friv.*, *Ach. compacta W.*, *Achillea nov. spec.*, *Artemisia campestris L.*, *Centaurea Macedonica Heldr.*, *Cent. Pelia DC.*, *C. Salonitana Vis.*, *Cirsium Candelabrum Griseb.* (in grosser Menge auch am Ossa). *Cirs. Siculum Spreng.*, *Cirs. odontolepis Boiss.*, *Chamaepeuce Afra DC.*, *Hieracium macranthum Ten.*, *Hier. bracteolatum Sibth.*, *Campanula Lentaccinii Heldr.* (auch in Euboea gefunden und häufiger noch am Ossa wachsend), *Camp. Trachelium L. β. Orientalis Boiss.*, *Erica arborea L.* (in grosser Menge), *Primula acaulis Jacq.* (sehr häufig), *Lysimachia punctata Jacq.*, *Ilex Aquifolium L.*, *Cuscuta leucosphaera Boiss. et Heldr.*, *Verbascum mallophorum Boiss. et Heldr.*, *Verb. epixanthinum Boiss. et Heldr.*, *Digitalis grandiflora All.*, *Dig. laevigata WK.*, *Linaria Macedonica Griseb.*, *Odontites Linkii Heldr. et Sart.* (ausserdem am Parnassos). *Origanum hirtum Vogel*, *Sideritis Scardica Grisb.*, *Stachys Germanica L. β. penicillata Heldr.*, *Phlomis Samia L.*, *Euphorbia oblongata Grisb.*, *Euph. Myrsinites L.*, *Alnus glutinosa (L.)*, *Juniperus Oxycedrus L.*, *Cyperus flavescens L.*, *Cyp. fuscus L.*, *Trisetum flavescens (L.)*, *Sorghum Halepense (L.)* (in grosser Menge und als Viehfutter benutzt), *Fontinalis Heldreichii Müll.*, *Hypnum irriguum Brid.*, *Brachythecium rivulare Br. et Schimp.*, *Marchantia polymorpha L.* u. s. w.

Botanisch weniger interessant, viel einförmiger und trockner, weil in der oberen Region weniger quellenreich, fand ich das Ossagebirge (jetzt Kissavos genannt). Doch sind hier, besonders auf der Ostseite, die Wälder ausgedehnter und besser erhalten als am Pelion. Die Zerstörung ist noch nicht in gleichem Maasse vorgeschritten, weil der

Ossa viel unzugänglicher und wilder und viel weniger bewohnt ist. Dennoch werden leider auch hier die herrlichen Wälder von Kohlenbrennern schonungslos und ohne jede forstliche Regel ausgebeutet und zerstört; gerade die jüngeren Bäume werden als leichter fällbar vorzugsweise zu diesem Zwecke ausgesucht. Die Westseite des Ossa ist weniger bewaldet, doch fand ich auch hier schöne Bestände von Buchen und der baumförmigen *Quercus coccifera var. Calliprinos Webb.* Den schönsten Wald, der wegen seiner Dichtigkeit und seines naturwüchsigen Zustandes fast mit einem Urwalde zu vergleichen ist, fand ich auf der Ostseite zwischen dem am nordöstlichen Fusse des Ossa gelegenen Küstenorte Tziágesi und dem Dorfe Karytza, vom Meere sich bis hoch an den Berg hinauf erstreckend und zu dem höchst malerisch mitten darin gelegenen alten Kloster Hagios Demetrios gehörend. Er besteht hauptsächlich, wie mehr oder weniger alle Wälder an den östlichen Abhängen des Ossa, aus *Kastanien, Buchen, Platanen, Erlen (Alnus glutinosa L.), Quercus conferta Kit., Q. Ilex L., Fraxinus excelsior L., F. Ornus L., Acer campestre L., Pirus Malus L., Pirus amygdaliformis Vill., Sorbus domestica L., Cercis Siliquastrum L., Tilia intermedia DC.* und *Tilia argentea Desf.*, letztere schöne Lindenart besonders häufig in grossen Exemplaren beim Kloster Hagios Demetrios. Die trocknern Abhänge in der untern Region des Ossa bedecken dichte Makkien aus *Paliurus aculeatus Lam., Pistacia Terebinthus L., Rhus Coriaria L., Rh. Cotinus L., Calycotome villosa (Vahl), Spartium junceum L., Cornus mas L., Arbutus Unedo L., Erica arborea L., E. verticillata Forsk., Olea Europaea var. Oleaster DC.* (der wilde Ölbaum, meist strauchförmig), *Osyris alba L., Quercus coccifera L., Juniperus Oxycedrus L.* etc. Die Kornelie *(Cornus mas L.)* findet sich so massenhaft am Ossa, dass die Früchte eine kleine Einnahmequelle der armen Landbevölkerung ausmachen. Die Weiber sammeln die reifen Früchte und bringen sie zum Verkauf auf den Markt nach Ampelakia, Agyiá und Larissa. Ausser der gewöhnlichen Varietät mit rothen Früchten giebt es auch noch eine andere mit etwas kleineren gelben Früchten, die mir unbekannt war. Auch die Früchte des am Ossa in so grosser Menge wachsenden Erdbeerbaumes *(Arbutus Unedo L.)* werden von den Bauern in grossen Massen eingesammelt, um einen sehr guten Branntwein (Ῥακί) daraus zu bereiten, der hier zu Lande allgemein im Gebrauch ist. Im Hellas ist diese Benutzung der Früchte des Erdbeerbaumes unbekannt. Die Kultur des Bodens ist am Ossa sehr beschränkt, denn die Bewohner der wenigen Dörfer sind grösstentheils Kohlenbrenner, Hirten und Seeleute. Die einzigen Producte sind Mais, Kartoffeln, etwas Öl und Wein.

Charakteristische Pflanzen aus der Flora des Ossa kann ich ausser

den schon genannten Bäumen und Sträuchern und einigen schon oben unter den Pflanzen des Pelion erwähnten Arten nur noch wenige anführen, nämlich folgende: *Delphinium halteratum Sibth., Lunaria biennis Mnch., Malachium aquaticum (L.), Herniaria incana Lam., Evonymus Europaeus L.* (im Thale von Agyiá), *Rosa glutinosa Sibth., Rosa spec., Pastinaca spec.* (bei Agyiá), *Scabiosa tenuis Sprun., Inula Britanica L., Heliotropium suaveolens MB., Solanum Dulcamara L., Physalis Alkekengi L., Linaria Sibthorpiana β. Parnassica Boiss. et Heldr., Asphodeline Liburnica (Scop.)* etc.

Besonders kennzeichnend für die Flora des Pelion und Ossa ist der gänzliche Mangel der *Abietineen*, während doch *Pinus Halepensis Mill.* auf Euboea und im ganzen südlichen Hellas, mit Ausnahme der meisten Inseln, auf allen Vorbergen bis an das Meeresufer der verbreitetste Baum ist, und *Abies Apollinis Link*, oft mit *Pinus Laricio Poir.* gemischt, auf den meisten Hochgebirgen (Oeta, Parnass, Kandyli und Dirphys in Euboea, auf den Bergen des Peloponnes etc. etc.) in einer Seehöhe von circa 2500 oder 3000 bis zu 5000 Fuss ausgedehnte Waldgürtel bildet. Die beiden zuletzt genannten Coniferen treten erst wieder am thessalischen Olymp auf, wo sie zum Theil mit Buchen abwechselnd grosse Wälder bilden. Am Olymp fand ich auch noch eine andere *Pinus*-Art, nämlich *P. leucodermis Ant. (P. Heldreichii Christ)*, nach Nyman eine Subspecies von *P. nigricans Host*, welche hier die Südgrenze ihrer Verbreitung erreicht. Bemerkenswerth ist es, dass Dicaearchos in der schon erwähnten Beschreibung des Pelion unter den daselbst wachsenden Bäumen zugleich mit der Buche (ὀξύη), den Ahornarten (σφένδαμνος und ζυγία), der Cypresse (Κυπάρισσος) und dem *Juniperus Oxycedrus* (Κέδρος) auch die Edeltanne (ἐλάτη) aufzählt. Sollte die Tanne im Alterthum auf dem Pelion heimisch gewesen und seitdem verschwunden sein, oder die Angabe des Dicaearchos auf einem Irrthum beruhen? —

Erwähnenswerth sind zwei wohl kaum bekannte Mineralquellen, die beide sehr wasserreich und beim Volke unter dem Namen κοκκινόνερο »rothes Wasser« wegen des rostfarbenen Eisenniederschlages bekannt sind und am Ostabhange des Ossa eine gute Wegstunde südlich vom Dorfe Karytza entspringen. Dem Geschmack nach zu urtheilen, enthält das Wasser der einen Quelle nebst Eisen auch Schwefel und Natronsalze, das der anderen dagegen keinen Schwefel, aber statt dessen mehr Natron und sehr viel Kohlensäure; es hat ganz den Geschmack des Wassers aus der Quelle Hauterive in Vichy. Beide Quellen sind kalt, d. h. sie haben eine Temperatur von circa 12° C. Sie verdienen jedenfalls noch näher untersucht zu werden.

Südlich vom Ossa, zwischen diesem und dem nördlichen unter dem Namen Mavrovuni bekannten Theile des Pelion, liegt das fruchtbare Thal von Agyiá mit dem Städtchen gleichen Namens und mehreren Dörfern. In der schönen wohlbewässerten Thalebene wird Getreide, Mais, sehr viel Sesam (*Sesamum Indicum L.*) und Wein gebaut, auch giebt es bei Agyiá und Retziani grosse Pflanzungen von Maulbeerbäumen zur Seidenzucht.

Eine der fruchtbarsten und besonders für die Maiskultur geeignetsten Gegenden Thessaliens ist die Küstenebene, die sich vom Ossa und der Mündung des Peneios bei Tziágesi und Laspochori längs des thermaïschen Meerbusens zwischen diesem und dem Olymp bis an die macedonische Grenze bei Katerine hinzieht. Mais ist hier das Hauptproduct. Bei Laspochori werden auch in grosser Menge vorzügliche Wassermelonen (*Cucumis Citrullus L.*) gezogen. Es ist hier auch ein kräftiger Baumwuchs, namentlich sieht man zahlreiche schöne Bäume von *Celtis australis L.*, *Ulmus campestris L.*, *Populus alba L.*, *Quercus pedunculata Ehrh.*, *Fraxinus excelsior L.* und *Acer campestre L.* Dazwischen wuchert oft mannshoch *Pteris aquilina*, aus der die noch höheren Blüthenstengel von *Inula Helenium L.* hervorragen. Letztere ist besonders häufig am Fuss des Olymp. Ebendaselbst findet sich auch in grosser Menge und sehr oft baumförmig *Ilex Aquifolium L.* und *Buxus sempervirens L.*

Der Peneios entspringt auf der Pinduskette an der Westgrenze Thessaliens, strömt bei Trikala und Larissa vorüber und immer in östlicher Richtung durch den ca. 15^{km} langen Engpass zwischen Ossa und Olymp — das im Alterthume so berühmte Tempethal. Die meist sehr schroffen malerisch gestalteten Felsenwände und Bergabhänge zu beiden Seiten und die reiche Vegetation von Bäumen und Sträuchern, welche alles dicht bekleidet von den Höhen bis an die Ufer des Flusses und oft bis in diesen selbst, dann zuletzt der überraschende und herrliche Blick auf das Meer, bevor das Thal unweit Laspochori in die Küstenebene ausmündet, bilden ein stets wechselndes Bild von so vorzüglicher landschaftlicher Schönheit, dass man den Ruf, den das Tempethal deshalb genoss, vollkommen gerechtfertigt findet, ein Ruf, der dem Natursinn der Alten alle Ehre macht. Vorherrschende Baumformen im Tempethal sind folgende: *Platanen* und *Weiden (Salix alba L.)* am Ufer und oft auch mitten im Peneios, wilde *Feigenbäume* und *Keuschlamm (Vitex Agnus castus L.)* ebenfalls am Flussufer, dann mehr an den Abhängen *Quercus coccifera L.*, *Q. Ilex L.*, *Carpinus Duinensis Scop.*, *Ostrya carpinifolia Scop.*, *Olea Europaea var. Oleaster DC.*, *Phillyrea media L.*, *Fraxinus Ornus L.*, *Paliurus aculeatus Lam.*, *Pistacia Terebinthus L.*, *Rhus Cotinus L.*, *Punica*

Granatum L. wild oder verwildert, und *Cercis Siliquastrum L. Clematis Vitalba L., Epheu* und wilde *Reben* umranken malerisch die Bäume. Bei der köstlichen kalten Quelle, die am Fusse des Κάστρον τῆς Ὡραίας (Burg der Schönen) mitten im Tempethal hervorquillt, fand ich an schattigen Felsenwänden *Grammitis Ceterach (L.), Polypodium vulgare L., Asplenium trichomanes L., Anomodon viticulosus Hook. et Tayl.* und noch eine neue Moosart *(Leskea Heldreichii Fehlner).*

Zum Schluss noch einige Worte über die grosse thessalische Ebene, die sich in geringer Seehöhe zwischen Volo und Larissa östlich und zwischen Pharsala, Karditza und Trikala im Westen ausdehnt, fast in der Mitte der Länge nach durch einen Höhenzug in zwei etwas ungleiche Hälften getheilt, wovon eine jede bei 60—70^{km} Länge 15—30^{km} Breite hat. Sie ist höchst einförmig und fast ganz baumlos und wird zum grössten Theil mit Getreide angebaut, dessen Ausfuhr die bedeutendste Einkunftsquelle für das Land ausmacht. Im Winter oft überschwemmt und zum Theil in seeartige Sümpfe verwandelt, ist die Ebene im Sommer ein grosses Stoppelfeld und wegen der unerträglichen Hitze nur bei Nacht zu bereisen. Der Botaniker findet hier nicht viel zu beobachten. Die ganze Flora besteht zur Sommerzeit aus einigen Disteln und Ackerpflanzen, zu denen sich merkwürdigerweise einige Arten gesellen, die sonst den Meeresniederungen eigen sind, hier aber noch tief im Lande in beträchtlicher Entfernung von der Küste auftreten. Als in der thessalischen Ebene allgemein verbreitete Pflanzen notirte ich folgende: *Ammi Visnaga L.*, die bekannte Zahnstocherpflanze, die in grosser Masse alle Stoppelfelder bedeckt, *Echinops microcephalus Sibth., Centaurea Salonitana Vis., Carthamus dentatus (Vahl), Xanthium spinosum L., Marrubium peregrinum L., Peganum Harmala L.* (deren Asche als rother Färbestoff benutzt wird), *Hypericum crispum L.*[1], *Leontice Leontopetalum L.* und an mehr feuchten Stellen, die im Winter überschwemmt sind, die Seestrandpflanzen *Eryngium Creticum Lam., Cardopatium corymbosum (L.), Statice Limonium L.* und *Juncus acutus L.* — Bei Larissa an den Ufern des Peneios ist die Vegetation auch sehr einförmig und arm an Arten. Sie beschränkt sich auf eine Weidenart (*Salix alba L.*), *Tamarix Pallasii Desv., Lythrum Salicaria L., Artemisia compestris L.*, eine Riesenform von *Salsola Kali L.* und im Ufersande *Glinus lotoides L., Heliotropium supinum L.* und *Fimbristylis dichotoma (Rottb.).*

Am Meeresstrande bei Volo fand ich in grosser Menge mehrere

[1] Die starren, viel verästelten Blüthenstengel von *Hypericum crispum* und *Marrubium peregrinum* in grosse Büschel zusammengebunden, werden in Thessalien allgemein als Kehrbesen benutzt.

Salsolaceen: Salsola Soda L., S. Kali L., Suaeda setigera DC., Salicornia fruticosa L., Atriplex portulacoides L. und *Chenopodium urbicum L.*, ferner *Ammi majus L., Echinophora Sibthorpiana Guss, Cynanchum acutum L., Datura Stramonium L., Statice Limonium L.* u. s. w., und als Auswurf des Meeres drei Seegräser (nämlich *Zostera marina L., Z. nana Roth.* und *Cymodocea nodosa (Ucria)* nach der Bestimmung des Hrn. Prof. Ascherson und mit der Bemerkung, dass das Vorkommen der beiden letzteren in den griechischen Gewässern bis jetzt noch nicht nachgewiesen war).

Von den in Thessalien von mir beobachteten Pflanzen finden nach unserer jetzigen Kenntniss über deren Verbreitung in Europa folgende Arten die äquatoriale Grenze derselben am Pelion und Ossa: *Tilia argentea Desf.* (am Ossa), *Malachium aquaticum (L.)* (im Thale von Agyiá am Fuss des Ossa), *Geranium nodosum L.* (am Pelion), *Cytisus Austriacus L.* (am Olymp und Pelion), *Astragalus glycyphyllos L.* (am Pelion), *Rubus saxatilis L.* und *R. caesius L.* (am Olymp), *Epilobium spicatum Lam.* (am Olymp und Pelion), *Circaea lutetiana L.* (am Ossa und Pelion), *Sison Amomum L.* (am Ossa und Pelion; nach Boissier's Flora Orient. aus der Balkanhalbinsel noch gar nicht bekannt), *Achillea compacta W.* (Macedonien und Pelion), *Artemisia campestris L.* (thessalische Ebene und Pelion), *Lysimachia punctata Jacq.* (Pelion), *Gentiana verna L.* (Olymp), *Digitalis grandiflora All.* (Olymp und Pelion), *Linaria Macedonica Grisb.* (Macedonien, Pelion), *Cyperus flavescens L.* (Pelion). — *Ilex Aquifolium L.* findet sich auch noch, obwohl selten, in Euboea und am Oeta. *Buxus sempervirens L.*, so häufig am Olymp, findet sich auch, jedoch seltener am Pelion, und ausserdem nur noch in Mitteleuboea an einer einzigen nach seinem Vorkommen Pyxariá benannten Localität.

Im Ganzen beobachtete ich während meiner vorjährigen Reise in Thessalien circa 450 Pflanzenarten. Rechnet man zu diesen circa 250 schon früher in Thessalien und meist speciell am Olymp beobachtete Arten, so ergiebt sich 700 als beiläufige Totalsumme der bis jetzt aus Thessalien bekannten Arten, d. h. höchst wahrscheinlich kaum die Hälfte der in dieser Provinz wildwachsenden Gefässpflanzen. Ich habe ein genaues systematisches Verzeichniss aller von meinen Vorgängern und mir in Thessalien bis jetzt aufgefundenen Pflanzen aufgestellt und zwar mit Berücksichtigung der einzelnen Hauptlocalitäten (Olymp, Ossa, Pelion, thessalische Ebene etc.) und zugleich zum Vergleiche in besondere Columnen die Summe der aus Euboea und Nordgriechenland bekannten Pflanzen, ebenfalls nach Hauptlocalitäten geordnet (Oeta, Korax, Tymphrestos, Phthiotis, Parnassos, Euboea etc.). Ich halte es jedoch noch nicht an der Zeit, es zu

veröffentlichen, weil es für Thessalien noch zu unvollständig ist. Zur Vervollständigung ist wenigstens noch eine Excursion nach Thessalien durchaus nothwendig, und wäre es auch nur auf den Pelion, um dort die sehr mangelhaft bekannte Frühlingsflora kennen zu lernen. Ich beabsichtige daher zu diesem Zwecke im Laufe des Frühjahrs einen Ausflug nach Volo und auf den Pelion zu unternehmen.

6. Über Mantipus und Phrynocara, zwei neue Batrachiergattungen aus dem Hinterlasse des Reisenden J. M. Hildebrandt von Madagascar.

Von W. Peters.

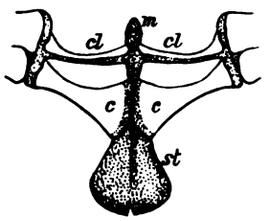
(Vorgelegt am 8. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VI]: — ausgegeben am 15. Februar.)

In der Sammlung der Naturalien, welche der auf Madagascar verstorbene Reisende J. M. Hildebrandt hinterlassen, sind mir zwei neue Gattungen von Batrachiern aufgefallen, die zu der merkwürdigen Gruppe der *Dyscophi* gehören, welche ich mir erlaube vorzulegen.

Mantipus nov. gen.[1]

Dentes intermaxillares, maxillares. Series dentium vomerinorum elongata, post choanas posita. Pupilla horizontalis? Lingua ovalis, integra, elongata, postice libera. Membrana tympani obtecta, vix visibilis. Digiti liberi, apice furcillati. Metatarsi externi conjuncti. Coracoidea robusta, claviculae tenues, manubrium sterni cartilagineum, sternum cartilagineum, magnum disciforme. Processus sacrales transversi modice dilatati.

Vom Habitus der Laubfrösche. Vomerzähne in einer langen Querreihe hinter den Choanen. Zunge verlängert, oval, ganzrandig, hinten und an den Seiten frei. Trommelfell wenig sichtbar. Pupille scheinbar horizontal. Keine Paratoiden. Finger und Zehen frei, am Ende verbreitert, die letzte Phalanx gabelförmig. Äussere Mittelfussglieder mit einander verbunden. Sternalapparat mit starken Coracoidea, dünnen, hinten knorpeligen, Claviculae, elliptischem knorpeligen Manubrium und knorpeligem, in der Mitte des hinteren Randes eingeschnittenem Sternum. Querfortsätze des Kreuzbeins mässig plattenförmig verbreitert.



[1] Μάντις, πούς.

[2] Sternalapparat von *Mantipus Hildebrandti*: *cl* Clavicula, *c* Coracoideum, *m* Manubrium sterni, *st* Sternum. Einmal vergrössert.

Mantipus Hildebrandti n. sp.

M. supra fusconiger, subtus pallidior.

Habitatio: Madagascar centralis.

Kopf abgeplattet, breiter als lang. Schnauze dreieckig, stumpfspitzig, etwas länger als das Auge, mit deutlichem Canthus rostralis; Nasenlöcher der Schnauzenspitze viel näher als dem Auge. Interorbitalraum doppelt so breit wie das obere Augenlid. Die Pupille scheint horizontal zu sein, ist aber nicht deutlich erkennbar. Das Trommelfell ist von der Haut überzogen, wenig erkennbar, im Durchmesser nur halb so gross wie das Auge. Vomerzähne bilden jederseits eine lange Reihe, welche hinter und nach aussen von den Choanen beginnt. Sie convergiren nach hinten und werden in der Mitte durch einen kleinen Zwischenraum von einander getrennt. Die Zunge ist gross, länglich oval, vorn zugespitzt, hinten und an den Seiten frei.

Der Körper ist oben und unten glatt. Auch die hintere Seite der Oberschenkel zeigt nur einige kleine Granula.

Die vordere Extremität reicht mit dem dritten längsten Finger an die Analöffnung. Die Finger sind ganz frei und am Ende dreieckig verbreitert. Der erste Finger ist merklich kürzer als der zweite, welcher letztere aber von dem vierten überragt wird, während der dritte bei weitem am längsten ist. Die hintere Extremität reicht mit dem Tibiatarsalgelenk bis zu der Mitte des Auges. Die Zehen sind ganz frei, die äusseren Metatarsalglieder aneinander geheftet, die Verbreiterung der Zehenenden klein, aber dreieckig, wie die der Finger. Die Fusssohle ist glatt, unter der Basis des ersten Metatarsalgliedes ein kaum merklicher länglicher Höcker.

In dem jetzigen Zustande erscheint das Thier einfarbig braunschwarz. Nur auf der Schnauze und am Bauche erscheinen Spuren einer graublauen Färbung.

Totallänge 53^{mm}; Kopflänge 17^{mm}; Kopfbreite 21^{mm}; vordere Extremität 37^{mm}; Hand 15^{mm}; hintere Extremität 9^{cm}; Fuss 42^{mm}.

Ein einziges Exemplar aus dem Innern Madagascars befand sich in der Sammlung von J. M. Hildebrandt.

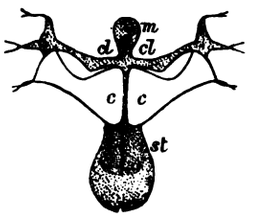
Phrynocara nov. gen.[1]

Dentes intermaxillares, maxillares; vomerini post choanas seriem transversam formantes. Pupilla horizontalis. Lingua ovalis, magna, libera. Membrana tympani distincta. Digiti liberi, apice attenuati. Metatarsi externi

[1] Φρῦνος, κάρα.

conjuncti. Coracoidea robusta, claviculae tenues, cartilagineae, manubrium ovale, cartilagineum, sternum ovale, cartilagineum, postice excisum. Processus sacrales dilatati.

Krötenförmig. Zwischenkiefer und Oberkiefer wohlbezahnt. Hinter den Choanen eine breite Querreihe von Vomerzähnen. Die Pupille ist deutlich horizontal, das Trommelfell frei, die Zunge gross, oval, hinten und an den Seiten frei, keine Paratoiden. Die Finger und Zehen sind frei, ziemlich kurz und am Ende zugespitzt. Die äusseren Metatarsalglieder sind aneinander geheftet. Am Sternalapparat sind die Coracoidea sehr stark, dagegen die Claviculae sehr dünn und knorpelig. Ebenso sind auch das Sternum und das Manubrium knorpelig dünn. Die Querfortsätze des Kreuzbeines sind deutlich verbreitert.



Phrynocara tuberatum n. sp.

Phr. supra tuberatum, fuscum, nigromaculatum, subtus fuscum flavopunctatum vel flavomaculatum.
Habitatio: Madagascar centralis.

Von dem Habitus eines *Bufo granulosus*. Schnauze etwas länger als das Auge, an der Spitze abgerundet, mit deutlichem, zwischen dem Nasenloch und dem Auge bogenförmigem, nach innen concavem Canthus rostralis. Nasenlöcher näher der Schnauzenspitze als dem Auge. Augen nach vorn convergirend, Interorbitalraum etwas breiter als das obere Augenlid. Trommelfell gross, nur ein wenig kleiner als das Auge. Zunge gross, oval, ganzrandig, hinten und an den Seiten frei. Bei den Männchen jederseits neben dem hinteren Theile der Zunge eine grosse Längsspalte. Vomerzähne bilden hinter den Choanen eine fast die ganze Gaumenbreite einnehmende Querbinde, welche eine bogenförmige, in der Mitte nach hinten convexe Linie bildet.

Die ganze Oberseite des Kopfes und Körpers ist mit grossen erhabenen Höckern versehen, an der Unterseite glatt, an der Hinterseite der Oberschenkel feiner granulirt.

Die vordere Extremität ragt bis zu der Inguinalgrube. Die Finger sind ganz frei, der erste ist kürzer als der zweite, welcher eben so

[1] Sternalapparat von *Phrynocara tuberatum*. *c* Coracoideum, *cl* (knorpelige) Clavicula, *m* Manubrium sterni, *st* Sternum. Einmal vergrössert.

weit vorragt wie der vierte, während der dritte diese um die ganze Länge des ersten Fingers überragt. Unter der Hand ein innerer stärkerer und ein mittlerer schwächerer länglicher Höcker. Die hintere Extremität überragt mit der längsten vierten Zehe die Schnauze, hat die Zehen ganz frei und, wie die Finger, am Ende verschmälert. Unter dem Metatarsus zwei rundliche Höcker, von denen der innere der viel stärkere ist.

Oben graubraun oder gelblich dunkelbraun mit dunklen, schwärzlichen Flecken. Der hintere Theil der Körperseite und der Inguinalgegend gelb gefleckt. Unten dunkelbraun mit gelben Punkten oder Flecken; die Weibchen sind auch an der Kehle gefleckt, die Männchen dagegen hier einfach dunkelbraun. Die Hinterseite der vorderen Gliedmassen, die vordere und hintere Seite der Oberschenkel, die Unterseite der Unterschenkel und die Oberseite des Fusses mit den vier inneren Zehen gelbgefleckt.

Totallänge 42^{mm}; Kopflänge 13^{mm}; Kopfbreite 16^{mm}; vordere Extremität 26^{mm}; Hand 10^{mm}; hintere Extremität 5^{cm}; Fuss 24^{mm}.

Fünf Exemplare verschiedener Grösse aus dem Innern von Madagascar, aus der hinterlassenen Sammlung von J. M. Hildebrandt.

7. Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften.

Von R. Lipschitz.

(Vorgelegt von Hrn. Kronecker am 18. Januar: — gedruckt im Bericht vom 8. Februar [St. VI]: — ausgegeben am 15. Februar.)

(Fortsetzung der Mittheilung vom 14. December 1882.)

III.

Bevor in die Betrachtung die zu unserem Raume gehörige Voraussetzung $n = 3$ eingeführt wird, bemerke ich, dass die in (28), I und (30), I gegebenen Darstellungen der Formen $\sum_a dx_a^2$ und $\sum_a d\xi_a^2$ den in (6), I und (7), I ausgedrückten Sätzen entsprechen, welche in dem Aufsatze des Hrn. Darboux: Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques, comptes rendus de l'ac. des sc. de Paris, t. LXIX, année 1869, 9 août, p. 392 berührt sind. Die n Grössen ξ_a, die der Gleichung $\sum_a \xi_a^2 = 1$ genügen und daher die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Gauss'schen Kugel in dem nach Riemann's Ausdruck ebenen Raume von n Dimensionen darstellen, bilden ferner eine Mannigfaltigkeit von $n - 1$ Dimensionen und von constantem der positiven Einheit gleichem Krümmungsmaasse, wie von Hrn. Helmholtz in der Abhandlung: Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen, Nachrichten der K. G. d. Wiss. zu Göttingen, 1868, 3. Juni, für $n = 4$ nachgewiesen, und in dem Aufsatze: Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, Borchardt's Journal f. Math., Bd. 72, S. 37 u. ff. allgemein gezeigt ist.

Bei der nunmehrigen Annahme $n = 3$ werde ich die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume mit x, y, z, die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes der Gauss'schen Kugel, welche der Normale der Fläche $\Phi(x, y, z) = \text{const.}$ im Punkte (x, y, z) entspricht, mit ξ, η, ζ bezeichnen, und in (26), I statt $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $A_{2,3}$, respective A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 setzen. Dann folgt aus (4), I die

Darstellung des reciproken Krümmungsradius eines Normalschnittes der Fläche $\Phi(x, y, z) = \text{const.}$ im Punkte (x, y, z)

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\xi dx + d\eta dy + d\zeta dz}{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

aus (26), I das System von Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 1 \\ A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 = 1 \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \\ A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \\ A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \zeta = 0 \\ A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 \zeta = 0; \end{cases}$$

zugleich folgen aus (28), I, (30), I, (27), I die Umformungen

$$(3) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \rho_1^2 (A_1 d\xi + B_1 d\eta + C_1 d\zeta)^2 + \rho_2^2 (A_2 d\xi + B_2 d\eta + C_2 d\zeta)^2.$$

$$(4) \quad d\xi dx + d\eta dy + d\zeta dz = \rho_1 (A_1 d\xi + B_1 d\eta + C_1 d\zeta)^2 + \rho_2 (A_2 d\xi + B_2 d\eta + C_2 d\zeta)^2.$$

$$(5) \quad d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = (A_1 d\xi + B_1 d\eta + C_1 d\zeta)^2 + (A_2 d\xi + B_2 d\eta + C_2 d\zeta)^2,$$

$$(6) \quad \begin{cases} dx = \rho_1 A_1 (A_1 d\xi + B_1 d\eta + C_1 d\zeta) + \rho_2 A_2 (A_2 d\xi + B_2 d\eta + C_2 d\zeta) \\ dy = \rho_1 B_1 (A_1 d\xi + B_1 d\eta + C_1 d\zeta) + \rho_2 B_2 (A_2 d\xi + B_2 d\eta + C_2 d\zeta) \\ dz = \rho_1 C_1 (A_1 d\xi + B_1 d\eta + C_1 d\zeta) + \rho_2 C_2 (A_2 d\xi + B_2 d\eta + C_2 d\zeta). \end{cases}$$

Die Fläche $\Phi(x, y, z) = \text{const.}$ ist hier nur der einen Bedingung unterworfen, dass das Krümmungsmaass $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ nicht gleich Null sein darf; mithin sind die abwickelbaren Flächen allein von der Untersuchung ausgeschlossen. Es mögen nun die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ vermittelst der Gleichungen

$$(7) \qquad \xi = \cos\vartheta, \ \eta = \sin\vartheta \cos\phi, \ \zeta = \sin\vartheta \sin\phi$$

durch die unabhängigen Polarcoordinaten ϑ und ϕ ausgedrückt werden, wo der Winkel ϑ von o bis π, der Winkel ϕ von o bis 2π geht. Alsdann genügt den Gleichungen (2) das folgende besondere System von Grössen

$$(8) \qquad A_1 = \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta}, \ B_1 = \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta}, \ C_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta}$$

$$A_2 = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \phi}, \ B_2 = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial \eta}{\partial \phi}, \ C_2 = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi},$$

wie sich leicht ergiebt, sobald man die mit zwei verschiedenen Differentiationszeichen d und δ aus (7) abgeleitete Gleichung

$$(9) \qquad d\xi \, \delta\xi + d\eta \, \delta\eta + d\zeta \, \delta\zeta = d\vartheta \, \delta\vartheta + \sin^2\vartheta \, d\phi \, \delta\phi$$

benutzt. Bekanntlich lässt sich der Inhalt des Systems (2) durch die Forderung ersetzen, dass die Gleichung, welche aus (5) entsteht, indem auf der rechten Seite der Ausdruck $(\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta)^2$ hinzuaddirt wird, für unabhängige Werthe der drei Differentiale $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ befriedigt werden soll. Wenn daher zwei Systeme A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2

von der verlangten Beschaffenheit vorliegen, deren eines durch einen oben hinzugefügten Strich ausgezeichnet werde, so folgt durch doppelte Anwendung der eben erwähnten Gleichung, dass die Relation

$$(10)\quad \begin{aligned}&(A_1\,d\xi + B_1\,d\eta + C_1\,d\zeta)^2 + (A_2\,d\xi + B_2\,d\eta + C_2\,d\zeta)^2\\ &= (\overline{A_1}\,d\xi + \overline{B_1}\,d\eta + \overline{C_1}\,d\zeta)^2 + (A_2\,d\xi + \overline{B_2}\,d\eta + C_2\,d\zeta)^2\end{aligned}$$

für unabhängige Differentiale $d\xi, d\eta, d\zeta$ erfüllt sein muss. Daher wird das allgemeinste System A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 aus einem besonderen System $\overline{A_1}$, $\overline{B_1}$, $\overline{C_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{B_2}$, C_2 abgeleitet, indem man die allgemeinste Transformation einer Summe von zwei Quadraten in sich selbst zu Hülfe nimmt. Diese Thatsache ist in II für einen beliebigen Werth der Zahl n hervorgehoben. Auf die algebraischen Eigenschaften der Summen von zwei Quadraten gründet sich die Einführung der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$. Indem nun die linke und rechte Seite von (10) mit Zuziehung dieser Einheit in complexe Factoren zerlegt wird, folgt durch bekannte Schlüsse entweder die mit der reellen Grösse σ gebildete Gleichung

$$(11)\quad \begin{aligned}&A_1d\xi + B_1d\eta + C_1d\zeta + i(A_2d\xi + B_2d\eta + C_2d\zeta)\\ &= e^{i\sigma}(\overline{A_1}d\xi + \overline{B_1}d\eta + \overline{C_1}d\zeta + i(\overline{A_2}d\xi + \overline{B_2}d\eta + \overline{C_2}d\zeta)).\end{aligned}$$

oder die mit der reellen Grösse τ gebildete Gleichung

$$(11^*)\quad \begin{aligned}&A_1d\xi + B_1d\eta + C_1d\zeta - i(A_2d\xi + B_2d\eta + C_2d\zeta)\\ &= e^{i\tau}(\overline{A_1}d\xi + \overline{B_1}d\eta + \overline{C_1}d\zeta + i(\overline{A_2}d\xi + \overline{B_2}d\eta + \overline{C_2}d\zeta)).\end{aligned}$$

Substituirt man für $\overline{A_1}$, $\overline{B_1}$, $\overline{C_1}$, A_2, $\overline{B_2}$, C_2 die in (8) auf der rechten Seite angegebenen besonderen Werthe, so entstehen aus (11) die Bestimmungen

$$(12)\quad \begin{cases} A_1 + iA_2 = e^{i\sigma}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial\vartheta} + \dfrac{i}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial\xi}{\partial\phi}\right)\\ B_1 + iB_2 = e^{i\sigma}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\vartheta} + \dfrac{i}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial\eta}{\partial\phi}\right)\\ C_1 + iC_2 = e^{i\sigma}\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial\vartheta} + \dfrac{i}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial\zeta}{\partial\phi}\right), \end{cases}$$

dagegen aus (11*) die folgenden

$$(12^*)\quad \begin{cases} A_1 - iA_2 = e^{i\tau}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial\vartheta} + \dfrac{i}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial\xi}{\partial\phi}\right)\\ B_1 - iB_2 = e^{i\tau}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\vartheta} + \dfrac{i}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial\eta}{\partial\phi}\right)\\ C_1 - iC_2 = e^{i\tau}\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial\vartheta} + \dfrac{i}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial\zeta}{\partial\phi}\right). \end{cases}$$

Wenn aber jede der drei letzten Gleichungen auf beiden Seiten mit i multiplicirt und $\tau = \sigma - \dfrac{\pi}{2}$ genommen wird, so gehen die linken

Seiten respective in $A_2 + iA_1$, $B_2 + iB_1$, $C_2 + iC_1$ über, und der Factor $ie^{i\sigma}$ ist gleich $e^{i\sigma}$. Daher können die Gleichungen (12*) aus (12) erhalten werden, indem man gleichzeitig A_1 mit A_2, B_1 mit B_2, C_1 mit C_2 vertauscht. Mit Rücksicht auf diesen Umstand wird es genügen, im Folgenden nur die Gleichung (11) und die dazu gehörigen Folgerungen (12) zu benutzen. Vermöge derselben werden A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 durch die unabhängigen Variabeln ϑ und ϕ, und die einzige reelle Grösse σ dargestellt.

Die aus (8) entnommenen Werthe liefern für die auf der rechten Seite von (11) vorkommenden Ausdrücke mit Anwendung von (9) die Darstellungen

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial\vartheta}d\vartheta + \dfrac{\partial\eta}{\partial\vartheta}d\vartheta + \dfrac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}d\vartheta = d\vartheta \\ \dfrac{1}{\sin\vartheta}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial\phi}d\phi + \dfrac{\partial\eta}{\partial\phi}d\phi + \dfrac{\partial\zeta}{\partial\phi}d\phi\right) = \sin\vartheta d\phi. \end{cases}$$

Dadurch geht (11) in die Gleichung

$$(14)\quad A_1 d\xi + B_1 d\eta + C_1 d\zeta + i(A_2 d\xi + B_2 d\eta + C_2 d\zeta) = e^{i\sigma}(d\vartheta + i\sin\vartheta d\phi)$$

über, welche in die beiden Gleichungen

$$(15)\qquad \begin{cases} A_1 d\xi + B_1 d\eta + C_1 d\zeta = \cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi \\ A_2 d\xi + B_2 d\eta + C_2 d\zeta = \sin\sigma d\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta d\phi \end{cases}$$

zerfällt. Somit nehmen (3), (4), (5), (6) die folgende Gestalt an

$$(16)\qquad \begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 = \rho_1^2(\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi)^2 + \rho_2^2(\sin\sigma d\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta d\phi)^2 \\ d\xi dx + d\eta dy + d\zeta dz = \rho_1(\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi)^2 + \rho_2(\sin\sigma d\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta d\phi)^2 \\ d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2, \end{cases}$$

$$(17)\qquad \begin{cases} dx = \rho_1 A_1(\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi) + \rho_2 A_2(\sin\sigma d\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta d\phi) \\ dy = \rho_1 B_1(\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi) + \rho_2 B_2(\sin\sigma d\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta d\phi) \\ dz = \rho_1 C_1(\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi) + \rho_2 C_2(\sin\sigma d\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta d\phi), \end{cases}$$

während (12) die Bestimmungen liefert

$$(18)\qquad \begin{cases} A_1 + iA_2 = e^{i\sigma}(-\sin\vartheta) \\ B_1 + iB_2 = e^{i\sigma}(\cos\vartheta\cos\phi - i\sin\phi) \\ C_1 + iC_2 = e^{i\sigma}(\cos\vartheta\sin\phi + i\cos\phi). \end{cases}$$

Lässt man den Punkt (ϑ, ϕ) auf der Gauss'schen Kugel ein Mal so weiter rücken, dass $\sin\sigma d\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta d\phi$ verschwindet, ein zweites Mal so, dass $\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi$ verschwindet, so werden dx, dy, dz respective das erste Mal den Grössen A_1, B_1, C_1, das zweite Mal den Grössen A_2, B_2, C_2 proportional. Bei dem ersten Fortschreiten wird vermöge (16) $\rho = \rho_1$, bei dem zweiten zum ersten senkrechten Fortschreiten $\rho = \rho_2$; es ist also

$$(19)\qquad \sin\sigma d\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta d\phi = 0$$

die Differentialgleichung der Linie auf der Gauss'schen Kugel, welche der einen Krümmungslinie auf der Fläche $\Phi(x, y, z) = \text{const.}$, dagegen

$$(20)\qquad \cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi = 0$$

die Differentialgleichung der Linie auf der GAUSS'schen Kugel, welche der anderen Krümmungslinie entspricht. Mithin sind A_1, B_1, C_1 die Cosinus der mit den Coordinatenaxen gebildeten Neigungswinkel der Richtung in der Tangentialebene der Fläche $\Phi(x, y, z) = \text{const.}$, die zu dem ersten Hauptnormalschnitte gehört, und A_2, B_2, C_2 die Cosinus der Neigungswinkel der in derselben Tangentialebene befindlichen auf der ersten senkrechten Richtung, die zu dem zweiten Hauptnormalschnitte gehört. Diese beiden Richtungen und die zu ihnen senkrechte Flächennormale werden auf der GAUSS'schen Kugel durch die Ecken eines sphärischen Dreiecks repräsentirt, dessen Winkel und Seiten gleich Rechten sind, und zwar fällt das Element der der ersten Krümmungslinie entsprechenden Linie mit dem Element der von (A_1, B_1, C_1) nach $(\cos\vartheta, \sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\sin\phi)$ gezogenen Seite, das Element der der zweiten Krümmungslinie entsprechenden Linie mit dem Element der von (A_2, B_2, C_2) nach $(\cos\vartheta, \sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta, \sin\phi)$ gezogenen Seite zusammen. Die eingeführte Grösse σ bestimmt die Stellung der auf einander senkrechten Hauptkrümmungsrichtungen mit Beziehung auf eine durch den Punkt (x, y, z) gezogene Parallele zur x-Axe. Wird von einem beliebigen Punkte dieser Parallele auf die Tangentialebene ein Loth gefällt, und von dem Fusspunkte desselben durch den Punkt (x, y, z) eine gerade Linie gezogen, so misst σ nach (18) den Winkel, welchen diese Linie mit der zu ρ_1 gehörigen Hauptkrümmungsrichtung bildet. Es kann daher σ als der auf die x-Axe bezogene Stellungswinkel der Hauptkrümmungsrichtungen bezeichnet werden. Wählt man bei der Determination des Stellungswinkels statt der x-Axe eine andere feste Richtung im Raume, so lassen die Gleichungen (18) erkennen, wie sich der Winkel mitändert, und wie insbesondere bei einer Vertauschung der Axen desselben rechtwinkligen Systems die für $A_1 + iA_2$, $B_1 + iB_2$, $C_1 + iC_2$ aufgestellten Ausdrücke ihre Rollen entsprechend vertauschen. Bekanntlich gilt für den auf der rechten Seite von (14) in der Klammer befindlichen Ausdruck die Darstellung

$$\frac{1}{\sin\vartheta}(d\vartheta + i\sin\vartheta d\phi) = d\log\frac{\eta + i\zeta}{1 + \xi}.$$

Daher wird die ganze rechte Seite mit Anwendung von (18) gleich dem Product

$$(14_a) \qquad -(A_1 + iA_2)\, d\log\frac{\eta + i\zeta}{1 + \xi},$$

welches vermöge einer cyklischen Vertauschung der Axen auch die beiden anderen Darstellungen gestattet

$$(14_1)\qquad (B_1 - iB_2)\, d \log \frac{\zeta - i\xi}{1 - \pi},$$

$$(14_2)\qquad (C_1 - iC_2)\, d \log \frac{\xi - i\pi}{1 - \zeta},$$

die leicht zu verificiren sind.

Nach dem Vorhergehenden genügt bei einer bestimmten Oberfläche die Kenntniss der beiden Hauptkrümmungsradien ρ_1 und ρ_2 und des Stellungswinkels σ als Functionen des Ortes (ϑ, ϕ) auf der zugeordneten Gauss'schen Kugel zur Darstellung von $\frac{1}{\rho}$ und daher auch zur vollständigen Kenntniss der Krümmungsverhältnisse; ferner sind in Folge dessen auch die in (17) angegebenen Ausdrücke der Differentiale dx, dy, dz bekannt. Wenn dagegen ρ_1, ρ_2 und σ als beliebige Functionen von ϑ und ϕ gegeben sind, wenn beurtheilt werden soll, ob zu den vorgelegten Functionen überhaupt eine Fläche gehört, und wenn für diesen Fall die Fläche gefunden werden soll, so werden diese Fragen auf die in II angegebene Weise erledigt, indem man für die auf der rechten Seite von (17) aufgestellten Ausdrücke die Bedingungen der Integrabilität bildet. Dort ist zugleich nachgewiesen, dass, wenn die drei Integrabilitätsbedingungen respective zuerst mit A_1, B_1, C_1 multiplicirt und addirt, hierauf mit A_2, B_2, C_2 multiplicirt und addirt werden, zwei Gleichungen entstehen, welche hinreichen, um die drei Integrabilitätsbedingungen vollständig zu ersetzen. Statt die Integrabilitätsbedingungen wie an jenem Orte aufzustellen, darf man hierbei auch die unabhängigen Variabeln ϑ und ϕ benutzen, und erhält so die drei Gleichungen

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial (A_1\rho_1 \cos\sigma + A_2\rho_2 \sin\sigma)}{\partial\phi} = \frac{\partial(-A_1\rho_1 \sin\sigma \sin\vartheta + A_2\rho_2 \cos\sigma \sin\vartheta)}{\partial\vartheta}\\
&\frac{\partial (B_1\rho_1 \cos\sigma + B_2\rho_2 \sin\sigma)}{\partial\phi} = \frac{\partial(-B_1\rho_1 \sin\sigma \sin\vartheta + B_2\rho_2 \cos\sigma \sin\vartheta)}{\partial\vartheta}\\
&\frac{\partial (C_1\rho_1 \cos\sigma + C_2\rho_2 \sin\sigma)}{\partial\phi} = \frac{\partial(-C_1\rho_1 \sin\sigma \sin\vartheta + C_2\rho_2 \cos\sigma \sin\vartheta)}{\partial\vartheta}.
\end{aligned}\right.$$

Zu dem angegebenen Zwecke wende ich sogleich die complexen Factoren $A_1 + iA_2$, $B_1 + iB_2$, $C_1 + iC_2$ an, und erhalte durch Addition eine einzige Gleichung, welche die beiden abzuleitenden in sich schliesst. Vorher mögen die drei Gleichungen (21) in eine Gestalt gebracht werden, die für die erste Gleichung die folgende ist,

$$(22)\qquad \frac{\partial\big((A_1 + iA_2)(\rho_1 \cos\sigma - i\rho_2 \sin\sigma) + (A_1 - iA_2)(\rho_1 \cos\sigma + i\rho_2 \sin\sigma)\big)}{2\partial\phi}$$

$$\frac{\partial\big((A_1 + iA_2)(\rho_1 \sin\sigma + i\rho_2 \cos\sigma)\sin\vartheta + (A_1 - iA_2)(\rho_1 \sin\sigma - i\rho_2 \cos\sigma)\sin\vartheta\big)}{2\partial\vartheta}.$$

Nun kann man aus (22) die Gleichungen

$$(23)\quad \begin{cases} (A_1 + iA_2)^2 + (B_1 + iB_2)^2 + (C_1 + iC_2)^2 = 0 \\ (A_1 + iA_2)(A_1 - iA_2) + (B_1 + iB_2)(B_1 - iB_2) + (C_1 + iC_2)(C_1 - iC_2) = 2 \end{cases}$$

ableiten, ferner mit Zuziehung von (18) bei Anwendung einer Differentiationscharakteristik δ die Gleichungen

$$(24)\quad \begin{cases} (A_1+iA_2)(\delta A_1 + i\delta A_2) + (B_1+iB_2)(\delta B_1 + i\delta B_2) + (C_1+iC_2)(\delta C_1 + i\delta C_2) = 0 \\ (A_1+iA_2)(\delta A_1 - i\delta A_2) + (B_1+iB_2)(\delta B_1 - i\delta B_2) + (C_1+iC_2)(\delta C_1 - i\delta C_2) = 2i(-\delta\sigma + \cos\vartheta\delta\phi) \end{cases}$$

erhalten. Somit entsteht die Gleichung

$$(25)\quad \frac{\partial(\rho_1\cos\sigma + i\rho_2\sin\sigma)}{\partial\phi} + i\left(-\frac{\partial\sigma}{\partial\phi} + \cos\vartheta\right)(\rho_1\cos\sigma + i\rho_2\sin\sigma)$$
$$= -\frac{\partial\left((\rho_1\sin\sigma - i\rho_2\cos\sigma)\sin\vartheta\right)}{\partial\vartheta} + i\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}(\rho_1\sin\sigma - i\rho_2\cos\sigma)\sin\vartheta.$$

Indem jetzt

$$\rho_1\cos\sigma + i\rho_2\sin\sigma = \frac{\rho_1+\rho_2}{2}e^{i\sigma} + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-i\sigma},\ \rho_1\sin\sigma - i\rho_2\cos\sigma = -i\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}e^{i\sigma} - \frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-i\sigma}\right)$$

gesetzt und (25) mit $e^{-i\sigma}$ multiplicirt wird, entsteht die Gestalt

$$(26)\quad \frac{\partial\left(\rho_1 + \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)e^{-2i\sigma}\right)}{\partial\phi} + i\cos\vartheta\left(\rho_1 + \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)e^{-2i\sigma}\right)$$
$$= i\frac{\partial\left((\rho_1 + \rho_2 - (\rho_1 - \rho_2)e^{-2i\sigma})\sin\vartheta\right)}{\partial\vartheta}.$$

Diese Gleichung enthält für ein System von drei Functionen ρ_1, ρ_2, σ der Variabeln ϑ und ϕ die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Fläche existirt, bei welcher dieselben die Bedeutung der beiden Hauptkrümmungsradien und des Stellungswinkels übernehmen können. Sobald (26) erfüllt ist, werden die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes dieser Fläche durch die Integration der in (17) angegebenen vollständigen Differentiale dargestellt, welche nach Einsetzung der aus (18) entnommenen Werthe in die folgenden Ausdrücke übergehen,

$$(27)\quad \begin{cases} dx = -\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2} + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\cos 2\sigma\right)\sin\vartheta d\vartheta + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\sin 2\sigma\sin^2\vartheta d\phi \\ dy = \left(\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2} + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\cos 2\sigma\right)\cos\vartheta\cos\phi + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\sin 2\sigma\sin\phi\right)d\vartheta \\ \quad + \left(-\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2} - \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\cos 2\sigma\right)\sin\phi - \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\sin 2\sigma\cos\vartheta\cos\phi\right)\sin\vartheta d\phi \\ dz = \left(\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2} + \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\cos 2\sigma\right)\cos\vartheta\sin\phi - \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\sin 2\sigma\cos\phi\right)d\vartheta \\ \quad + \left(\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2} - \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\cos 2\sigma\right)\cos\phi - \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\sin 2\sigma\cos\vartheta\sin\phi\right)\sin\vartheta d\phi. \end{cases}$$

Diese sind lineare homogene Functionen der drei Verbindungen

$$\rho_1 + \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\cos 2\sigma,\ \rho_1 + \rho_2 - (\rho_1 - \rho_2)\cos 2\sigma,\ (\rho_1 - \rho_2)\sin 2\sigma,$$

aus denen sich die reellen und imaginären Theile der in (26) vorkommenden complexen Grössen zusammensetzen. Die letzteren erscheinen bei der Zerlegung der quadratischen Form von $d\vartheta$ und $d\phi$, durch welche in (16) das Quadrat des Linearelements auf der betrachteten Fläche ausgedrückt ist, in Factoren ersten Grades, indem

$$(28)\quad dx^2+dy^2+dz^2=\left(\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}\right)d\vartheta+\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}-\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}\right)i\sin\vartheta d\phi\right)$$
$$\cdot\left(\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{2i\sigma}\right)d\vartheta-\left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}-\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{2i\sigma}\right)i\sin\vartheta d\phi\right)$$

wird.

Denkt man sich die betreffende Fläche auf irgend eine Art in elementare Theile zerlegt, so gehört zu jedem Element eine bestimmte Richtung der Normale, ferner das System der beiden Hauptkrümmungsradien und des auf eine gewisse Axe bezogenen Stellungswinkels. Dadurch, dass diese drei Grössen als Functionen der Richtung der Normale gegeben werden, sind die charakteristischen Eigenschaften jedes einzelnen Flächenelements bekannt, die sich nicht ändern, wofern dasselbe ohne Deformation und ohne Drehung von einem Orte des Raumes nach einem anderen verschoben wird. Man kennt also die Gestalt und Stellung der einzelnen Flächenelemente, aber nicht deren Anordnung im Raume.

Die Gleichung (26) umfasst dann die sämmtlichen Bedingungen dafür, dass die gegebenen Elemente zu einer Fläche angeordnet werden können, und die aus (27) abzuleitenden Ausdrücke der Coordinaten x, y, z liefern die gesuchte Anordnung der Elemente im Raume.

Wie aus der oben erwähnten Bedeutung von (19) und (20) hervorgeht, bezeichnet der Stellungswinkel σ zugleich den Winkel, welchen die der ersten Krümmungslinie entsprechende Linie auf der Gauss'schen Kugel mit dem Bogen eines grössten Kreises bildet, der von dem betreffenden Punkte (ϑ, ϕ) der Kugel nach dem der positiven x-Axe zugeordneten Pole gezogen wird. Für den Fall, dass eine der Krümmungslinien, etwa die erste, in einer und derselben Ebene liegt, müssen die Coordinaten x, y, z des Punktes der Fläche, sobald die zugehörige Gleichung (19) erfüllt ist, der mit den vier Constanten l, m, n, p gebildeten Gleichung $lx + my + nz = p$ genügen, wo $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ist, und deren Differentiale der Gleichung

$$ldx + mdy + ndz = 0.$$

Also ergiebt sich aus den Darstellungen von dx, dy, dz in (17). dass wegen der Gültigkeit von (19) für A_1, B_1, C_1 die Gleichung

$$lA_1 + mB_1 + nC_1 = o$$

besteht. Substituirt man hier die Werthe aus (18), so findet sich für die Grösse σ die Proportion

$$\cos\sigma : \sin\sigma = -m\sin\phi + n\cos\phi : -l\sin\vartheta + m\cos\vartheta\cos\phi + n\cos\vartheta\sin\phi.$$

Mithin verwandelt sich (19) in die Gleichung

$$(-l\sin\vartheta + m\cos\vartheta\cos\phi + n\cos\vartheta\sin\phi)\,d\vartheta + (-m\sin\phi + n\cos\phi)\sin\vartheta\,d\phi = o,$$

deren linke Seite ein vollständiges Differential ist und durch Integration zu der Gleichung

$$l\cos\vartheta + m\sin\vartheta\cos\phi + n\sin\vartheta\sin\phi = P$$

führt, wo P eine Constante bedeutet. Gleichzeitig erhält man für die zugehörigen Grössen A_2, B_2, C_2, wenn $Q^2 = 1 - P^2$ gesetzt wird, die Gleichung

$$lA_2 + mB_2 + nC_2 = Q.$$

Es ist daher gegenwärtig die der ersten Krümmungslinie entsprechende Linie auf der GAUSS'schen Kugel ein Kreis, einem Satze entsprechend, den JOACHIMSTHAL in der Abhandlung: Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium, CRELLE's Journal f. Math., Bd. 30, S. 347 aufgestellt hat. Betrachtet man die Bewegung des vorhin erwähnten sphärischen Dreiecks auf der GAUSS'schen Kugel, so leuchtet ein, dass der Punkt (A_1, B_1, C_1) auf einem grössten Kreise, der Punkt $(\cos\vartheta, \sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\cos\phi)$ auf einem mit diesem parallelen, der Punkt (A_2, B_2, C_2) auf einem anderen mit dem ersten ebenfalls parallelen Kreise fortschreitet.

IV.

Die so eben entwickelten Resultate stehen in Beziehung zu dem Inhalt des mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces von Hrn. OSSIAN BONNET, LIOUVILLE's Journal de mathématiques, 2ième série, t. V, 1860, p. 153. Um die dortigen Sätze in die von mir gebrauchten Bezeichnungen zu übertragen, mögen respective

$$\text{statt } \xi,\ \eta,\ \zeta,\quad x,\quad y,\quad z$$
$$\text{die Zeichen } y,\ z,\ x,\ \phi,\ \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta,\ T$$

gesetzt werden. Bei Hrn. OSSIAN BONNET bildet die Function

$$T = -\frac{x\cos\vartheta + y\cos\phi\sin\vartheta + z\sin\phi\sin\vartheta}{\sin\vartheta}$$

den Ausgangspunkt. Diese hat wegen der für die zugehörige Fläche geltenden Gleichung

$$dx\cos\vartheta + dy\cos\phi\sin\vartheta + dz\sin\phi\sin\vartheta =$$

die Eigenschaft, dass in ihrem vollständigen Differential das Aggregat, welches die Differentiale dx, dy, dz enthält, fortfällt. Mithin wird

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = y \sin\phi - z\cos\phi, \quad \frac{\partial T}{\partial \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta} = \frac{x}{\sin\vartheta},$$

und man findet für die Functionen u, v, w die Ausdrücke

$$u = \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} x + T = \frac{\partial y}{\partial \phi}\sin\phi - \frac{\partial z}{\partial \phi}\cos\phi,$$

$$v = \frac{\partial^2 T}{\partial\phi\,\partial \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial x}{\partial \phi},$$

$$w = \frac{\partial^2 T}{(\partial \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta)^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} x = \frac{\partial x}{\partial \vartheta}.$$

Hieraus folgt aber, sobald die partiellen Differentialquotienten von x, y, z nach ϑ und ϕ aus (27), III genommen werden,

$$u = \left(-\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\cos 2\sigma\right)\sin\vartheta.$$

$$v = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\sin 2\sigma \sin\vartheta,$$

$$w = \left(-\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} - \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\cos 2\sigma\right)\sin\vartheta.$$

Da aus der Gleichung $y = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta$ die Bestimmungen

$$dy = \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}, \quad i \operatorname{tg} iy = \cos\vartheta$$

hervorgehen, so nehmen die von Hrn. Ossian Bonnet auf S. 157 mit (7) bezeichneten partiellen Differentialgleichungen die Gestalt an

$$\begin{cases} \sin\vartheta \dfrac{\partial u}{\partial \vartheta} = \dfrac{\partial v}{\partial \phi} + \cos\vartheta\, w \\ \dfrac{\partial w}{\partial \phi} = \sin\vartheta \dfrac{\partial v}{\partial \vartheta} + \cos\vartheta\, v. \end{cases}$$

Andererseits entstehen aber dieselben Gleichungen, sobald man in (26), III den reellen und imaginären Theil von einander trennt.

Auf die Abhängigkeit, in welcher die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes einer Fläche von dem Orte des zugehörigen Punktes der Gauss'schen Kugel stehen, beziehen sich ferner die Abhandlung des Hrn. Enneper: Zur Theorie der Flächen und partiellen Differentialgleichungen, Schlömilch's Zeitschrift f. Math. und Phys., 7. Jahrgang, S. 1, so wie die Arbeiten des Hrn. Christoffel: Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch locale Messungen auf derselben, Borchardt's Journal f. Math., Bd. 64, S. 193, und: Über einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen, dasselbe Journal, Bd. 67, S. 218. Hr. Enneper hat denselben Gegenstand in dem Aufsatze: Über Flächen mit besonderen Meridiancurven, der kürzlich im

29. Bande der Abhandlungen d. K. G. d. W. zu Göttingen erschienen ist, wieder aufgenommen. Der Vergleichung wegen werde ich

statt $x,\ y,\ z,\quad u,\quad v,\quad A,\ B,\ C$

die Zeichen $y,\ z,\ x,\ \pi-\vartheta,\ \phi,\quad M,\ N,\ L$

anwenden. Hr. ENNEPER beginnt mit der Betrachtung der Function

$$S=\frac{x\cos\vartheta+y\sin\vartheta\cos\phi+z\sin\vartheta\sin\phi}{\cos\vartheta},$$

welche auf Grund der oben erwähnten Gleichung die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial S}{\partial\phi}=\frac{y\sin\vartheta\sin\phi-z\sin\vartheta\cos\phi}{\cos\vartheta},\quad \frac{\partial S}{\partial\vartheta}=\frac{-y\cos\phi-z\sin\phi}{\cos^2\vartheta}$$

liefert. Weiter erhält man

$$L\sin\vartheta=\frac{\partial\cot g\vartheta\dfrac{\partial S}{\partial\phi}}{\partial\vartheta}\sin\vartheta=\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial x}{\partial\phi},$$

$$M\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\partial\cos^2\vartheta\dfrac{\partial S}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta}\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\partial x}{\partial\vartheta},$$

$$N\cot g\vartheta=\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2}+\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{\partial S}{\partial\vartheta}\right)\cot g\vartheta=\frac{\partial y}{\partial\phi}\sin\phi-\frac{\partial z}{\partial\phi}\cos\phi.$$

Es fallen daher respective die Functionen $L\sin\vartheta$, $M\operatorname{tg}\vartheta$, $N\cot g\vartheta$ mit den vorhin definirten Functionen r, w, u zusammen, und das von Hrn. ENNEPER auf S. 12 gegebene System der partiellen Differentialquotienten von x, y, z nach ϑ und ϕ stimmt mit dem obigen System (27). III überein. Den Zusammenhang der gegenwärtigen Untersuchung mit der Abhandlung von E. BOUR: Théorie de la déformation des surfaces. Journal de l'école polytechnique, cahier 39, t. 22, p. 1 und den einschlagenden Arbeiten der HH. BRIOSCHI und BELTRAMI werde ich später erörtern.

V.

Aus dem Umstande, dass die Gleichung (26), III in Bezug auf die Verbindungen $\rho_1+\rho_2$, $(\rho_1-\rho_2)\cos 2\sigma$, $(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma$ linear und homogen ist, und die Ausdrücke (27), III ebenso beschaffen sind, lässt sich ein allgemeines Verfahren der Zusammensetzung von Flächen ableiten. Es mögen für eine beliebige Anzahl von nicht abwickelbaren Flächen die Krümmungsradien und der Stellungswinkel der Krümmungsrichtungen als Functionen des Ortes (ϑ,ϕ) auf der GAUSS'schen Kugel gegeben sein: die zu einer Fläche $F^{(\gamma)}$ gehörigen Stücke seien durch Zusetzen des Zeigers γ unterschieden. Den Werthen $\gamma=1,\ 2,\ 3,\ldots$ entsprechend

werde nun eine Reihe von reellen Constanten $m^{(\gamma)}$ ausgewählt, die für die Functionen $\rho_1^{(\gamma)}, \rho_2^{(\gamma)}, \sigma^{(\gamma)}$ geltende Gleichung

$$(1)\quad \frac{\partial\left(\rho_1^{(\gamma)}+\rho_2^{(\gamma)}+(\rho_1^{(\gamma)}-\rho_2^{(\gamma)})e^{-2i\sigma^{(\gamma)}}\right)}{\partial\phi} + i\cos\vartheta\left(\rho_1^{(\gamma)}+\rho_2^{(\gamma)}+(\rho_1^{(\gamma)}-\rho_2^{(\gamma)})e^{-2i\sigma^{(\gamma)}}\right)$$
$$= i\,\frac{\partial\left(\left(\rho_1^{(\gamma)}+\rho_2^{(\gamma)}-(\rho_1^{(\gamma)}-\rho_2^{(\gamma)})e^{-2i\sigma^{(\gamma)}}\right)\sin\vartheta\right)}{\partial\vartheta}$$

mit $m^{(\gamma)}$ multiplicirt, und von allen Gleichungen die Summe genommen. Bestimmt man jetzt drei Grössen P_1, P_2, T durch die Gleichungen

$$(2)\quad \left.\begin{aligned} \Sigma m^{(\gamma)}(\rho_1^{(\gamma)}+\rho_2^{(\gamma)}) &= P_1+P_2\\ \Sigma m^{(\gamma)}(\rho_1^{(\gamma)}-\rho_2^{(\gamma)})\cos\sigma^{(\gamma)} &= (P_1-P_2)\cos T\\ \Sigma m^{(\gamma)}(\rho_1^{(\gamma)}-\rho_2^{(\gamma)})\sin\sigma^{(\gamma)} &= (P_1-P_2)\sin T, \end{aligned}\right\}$$

so entsteht für P_1, P_2, T eine partielle Differentialgleichung, die wieder genau die Gestalt von (26). III hat. Daraus folgt aber nach dem Vorhergehenden das Vorhandensein einer Fläche, bei welcher P_1, P_2, T die beiden Hauptkrümmungsradien und den Stellungswinkel als Functionen des Ortes (ϑ, ϕ) auf der Gauss'schen Kugel bedeuten, und es werden die vollständigen Differentiale der rechtwinkligen Coordinaten X, Y, Z des zugeordneten Punktes der neuen Fläche erhalten, indem man in (27), III statt ρ_1, ρ_2, σ beziehungsweise P_1, P_2, T substituirt. Bildet man für jede einzelne Fläche $F^{(\gamma)}$ die betreffenden Differentiale $dx^{(\gamma)}, dy^{(\gamma)}, dz^{(\gamma)}$, multiplicirt ebenfalls mit $m^{(\gamma)}$ und addirt, so erhält man Summen, die wegen (2) respective gleich dX, dY, dZ sind, und die Ausführung der Integrationen giebt die Gleichungen

$$(3)\quad \left.\begin{aligned} X &= \Sigma m^{(\gamma)}x^{(\gamma)} + \text{const.}\\ Y &= \Sigma m^{(\gamma)}y^{(\gamma)} + \text{const.}\\ Z &= \Sigma m^{(\gamma)}z^{(\gamma)} + \text{const.} \end{aligned}\right\}$$

Da aus den Gleichungen

$$dx^{(\gamma)}\cos\vartheta + dy^{(\gamma)}\sin\vartheta\cos\phi + dz^{(\gamma)}\sin\vartheta\sin\phi = 0$$

die correspondirende Relation für dX, dY, dZ folgt, so hat die durch Zusammensetzung entstandene neue Fläche ebenfalls die Eigenschaft, dass in dem Punkte (X, Y, Z) derselben die Normalenrichtung mit der gemeinsamen Normalenrichtung in den Punkten $(x^{(\gamma)}, y^{(\gamma)}, z^{(\gamma)})$ der gegebenen Flächen übereinstimmt. Offenbar kann man aber auch umgekehrt mit Hülfe der Gleichungen (3) aus einer beliebigen Anzahl gegebener Flächen eine neue Fläche zusammensetzen, und dann den Schluss ziehen, dass für die hervorgehende neue Fläche die Gleichungen (2) erfüllt sind. Hiernach erhält man den folgenden Satz:

Wenn beliebig viele nicht abwickelbare Flächen irgend welcher Art so auf einander bezogen werden, dass der Punkt $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$ der Fläche $F^{(1)}$, der Punkt $(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})$ der Fläche $F^{(2)}$ u. s. f. dieselbe Normalenrichtung haben, wenn

man dann durch die Gleichungen (3) für jedes System zugeordneter Punkte $(x^{(\gamma)}, y^{(\gamma)}, z^{(\gamma)})$ einen Punkt (X, Y, Z) bestimmt, so bilden dieselben eine neue Fläche, bei welcher die Normalenrichtung im Punkte (X, Y, Z) mit der gemeinsamen Normalenrichtung in den Punkten $(x^{(\gamma)}, y^{(\gamma)}, z^{(\gamma)})$ zusammenfällt, und zugleich die Hauptkrümmungsradien P_1, P_2 und der Stellungswinkel T durch die Gleichungen (2) ausgedrückt sind.

Das angegebene Verfahren der Zusammensetzung ist nach seiner Natur von der Reihenfolge, in der die einzelnen Flächen zusammengesetzt werden, vollkommen unabhängig. Bemerkenswerth scheint ferner, dass das Krümmungsmaass $\frac{1}{P_1 P_2}$ in dem Punkte (X, Y, Z) der neuen Fläche durch die Gleichung

$$(4)\quad 4P_1P_2 = \left(\Sigma m^{(\gamma)}(\rho_1^{(\gamma)} + \rho_2^{(\gamma)})\right)^2 - \left(\Sigma m^{(\gamma)}(\rho_1^{(\gamma)} - \rho_2^{(\gamma)})\cos 2\sigma^{(\gamma)}\right)^2 - \left(\Sigma m^{(\gamma)}(\rho^{(\gamma)} - \rho^{(\gamma)})\sin 2\sigma^{(\gamma)}\right)^2$$

bestimmt wird. In dem Falle, dass die Constanten $m^{(\gamma)}$ sämmtlich positiv sind und ihre Summe gleich der Einheit ist, geht das in (3) ausgedrückte Verfahren in die Construction des Schwerpunktes eines Massensystems über, bei dem im Punkte $(x^{(\gamma)}, y^{(\gamma)}, z^{(\gamma)})$ die Masse $m^{(\gamma)}$ vorhanden ist.

Wendet man die Zusammensetzung auf eine beliebige Fläche und eine Kugelfläche von dem Radius c an, so ist für die letztere $\rho_1^{(2)} + \rho_2^{(2)} = 2c$, $\rho_1^{(2)} - \rho_2^{(2)} = 0$, und es liefern die Gleichungen (2) das Resultat

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} m^{(1)}(\rho_1^{(1)} + \rho_2^{(1)}) + 2m^{(2)}c &= P_1 + P_2 \\ m^{(1)}(\rho_1^{(1)} - \rho_2^{(1)})\cos\sigma^{(1)} &= (P_1 - P_2)\cos T \\ m^{(1)}(\rho_1^{(1)} - \rho_2^{(1)})\sin\sigma^{(1)} &= (P_1 - P_2)\sin T, \end{aligned}\right.$$

wonach

$$(5^*)\quad \sigma^{(1)} = T,\ m^{(1)}(\rho_1^{(1)} - \rho_2^{(1)}) = P_1 - P_2$$

ist. Ferner folgen aus (3) die Gleichungen

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} X &= m^{(1)}x^{(1)} + m^{(2)}c\cos\vartheta + \text{const.} \\ Y &= m^{(1)}y^{(1)} + m^{(2)}c\sin\vartheta\cos\phi + \text{const.} \\ Z &= m^{(1)}z^{(1)} + m^{(2)}c\sin\vartheta\sin\phi + \text{const.} \end{aligned}\right.$$

Mithin entsteht aus $F^{(1)}$ dieselbe Fläche, welche erhalten wird, indem man $F^{(1)}$ zuerst in dem Linearverhältniss $m^{(1)} : 1$ vergrössert, und hierauf auf jeder Normale nach derselben Seite ein Stück von dem Betrage $m^{(2)}c$ abschneidet; das giebt aber eine Parallelfläche.

Das beschriebene Verfahren der Zusammensetzung kann mit einer angemessenen Modification auch auf beliebige Linien ausgedehnt werden, die nur die eine Bedingung erfüllen, in keinem endlichen Theile gerade zu sein. Es behalten nämlich die Ausdrücke (17), III noch einen ganz bestimmten Sinn, wenn eine der beiden Grössen ρ_1 oder ρ_2 gleich Null genommen wird. Indem man $\rho_2 = 0$

setzt und für ρ_1 das Zeichen r substituirt, gehen jene Ausdrücke in die folgenden über

$$(7)\qquad \begin{cases} dx = rA_1(\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi) \\ dy = rB_1(\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi) \\ dz = rC_1(\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi), \end{cases}$$

und die drei Bedingungen der Integrabilität sind in der aus (26), III entstehenden Gleichung

$$(8)\qquad \frac{\partial(r+re^{-2i\sigma})}{\partial\phi} + i\cos\vartheta(r+re^{-2i\sigma}) = i\frac{\partial(r-re^{-2i\sigma})}{\partial\vartheta}$$

enthalten. Weil nun nach (7) die Grössen x, y, z Functionen derselben Variable werden, so stellt der Inbegriff der zugehörigen Punkte eine Linie dar. Dass aber umgekehrt jede beliebige, in keinem endlichen Theile gerade Linie in der bezüglichen Weise dargestellt werden kann, ergiebt sich durch die folgende Überlegung.

Es seien die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes einer beliebigen krummen Linie als Functionen der Grösse s gegeben, welche von einem bestimmten Punkte ab die Länge der Linie misst; dann ist

$$(9)\qquad dx = \frac{dx}{ds}ds,\quad dy = \frac{dy}{ds}ds,\quad dz = \frac{dz}{ds}ds$$

und zugleich

$$(10)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Um die Gleichungen (9) in die Gestalt (7) zu bringen, ist wegen der ersten Gleichung in (2), III erstens

$$(11)\qquad \frac{dx}{ds} = A_1,\quad \frac{dy}{ds} = B_1,\quad \frac{dz}{ds} = C_1$$

und zweitens

$$(12)\qquad ds = r(\cos\sigma d\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta d\phi)$$

zu setzen. Aus (11) und der fünften Gleichung in (2), III folgt

$$(13)\qquad \frac{dx}{ds}\cos\vartheta + \frac{dy}{ds}\sin\vartheta\cos\phi + \frac{dz}{ds}\sin\vartheta\sin\phi = 0.$$

Da ferner nach (18), III die Grössen A_1, B_1, C_1 diese Werthe haben

$$(14)\qquad A_1 = -\cos\sigma\sin\vartheta,\ B_1 = \cos\sigma\cos\vartheta\cos\phi + \sin\sigma\sin\phi,\ C_1 = \cos\sigma\cos\vartheta\cos\phi - \sin\sigma\cos\phi,$$

so kommt durch Auflösen

$$(15)\qquad \begin{cases} \cos\sigma = -\frac{dx}{ds}\sin\vartheta + \frac{dy}{ds}\cos\vartheta\cos\phi + \frac{dz}{ds}\cos\vartheta\sin\phi \\ \sin\sigma = \qquad\qquad \frac{dy}{ds}\sin\phi \qquad - \frac{dz}{ds}\cos\phi; \end{cases}$$

die für $\cos\sigma$ und $\sin\sigma$ gefundenen Ausdrücke stimmen unter einander überein, weil die Summe der Quadrate derselben vermöge (10)

gleich der Einheit ist. Insofern die gegebene Linie in keinem endlichen Theile gerade ist, haben die Functionen $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ bestimmte mit s veränderliche Werthe, und es dient die Gleichung (13), um s als Function der Variabeln ϑ und ϕ zu bestimmen. Das nothwendige Verschwinden des vollständigen Differentials der linken Seite von (13) liefert die Gleichung

$$(16)\quad \frac{dx}{ds} d(\cos\vartheta) + \frac{dy}{ds} d(\sin\vartheta\cos\phi) + \frac{dz}{ds} d(\sin\vartheta\sin\phi) + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\cos\vartheta + \frac{d^2y}{ds^2}\sin\vartheta\cos\phi + \frac{d^2z}{ds^2}\sin\vartheta\sin\phi\right) ds = 0,$$

wo der Factor von ds für keinen endlichen Theil der Linie gleich Null ist. Durch (15) geht die Gleichung (12) in die folgende über

$$(17)\quad ds = r\left(\frac{dx}{ds} d(\cos\vartheta) + \frac{dy}{ds} d(\sin\vartheta\cos\phi) + \frac{dz}{ds} d(\sin\vartheta\sin\phi)\right);$$

die Übereinstimmung von (16) und (17) wird aber hergestellt, indem man für r die Gleichung

$$(18)\quad \frac{1}{r} = -\frac{d^2x}{ds^2}\cos\vartheta - \frac{d^2y}{ds^2}\sin\vartheta\cos\phi - \frac{d^2z}{ds^2}\sin\vartheta\sin\phi$$

aufstellt. Hiermit ist in der That gezeigt, dass für jede krumme Linie die Gleichungen (7) angewendet werden dürfen.

Weil in der Gleichung (8) die Integrabilitätsbedingungen der rechten Seiten von (7) zusammengefasst sind, und weil die Bestimmung von r und σ durch (13), (15), (18) immer möglich ist, so stellen diese Gleichungen eine vollständige Auflösung der Gleichung (8) dar.

Nach (13) sind $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\phi$, $\sin\vartheta\sin\phi$ beziehungsweise die Cosinus der Neigungswinkel, welche irgend eine im Punkte (x, y, z) gegen die gegebene Linie gezogene Normale mit den drei Axen bildet. Alle diese Normalen liegen in derselben Ebene und werden auf der GAUSS'schen Kugel durch die Punkte desselben grössten Kreises vertreten. Auf diese Weise entspricht jedem Punkte der gegebenen Linie ein grösster Kreis auf der GAUSS'schen Kugel, und da kein endlicher Theil der Linie gerade sein darf, so entspricht einem endlichen Theile der Linie wieder ein endlicher Theil der Kugel. Wie leicht zu sehen, ist die in (18) definirte Grösse $\frac{1}{r}$ gleich dem Product des reciproken Krümmungsradius der gegebenen Linie in den Cosinus des Winkels, welchen die durch ϑ und ϕ charakterisirte Normale mit der von dem Krümmungsmittelpunkt aus gezogenen Normale bildet. Dies ist also der geometrische Begriff, welcher in Verbindung

mit dem in (15) definirten Winkel σ auftritt, sobald das in Rede stehende Verfahren der Zusammensetzung unter Benutzung der Gleichungen (7) und (8) auf Linien übertragen wird.

Bei der Zusammensetzung einer beliebigen nicht geraden Linie und einer Kugelfläche von dem Radius c ergeben die Gleichungen (5), (5*) und (6), indem $\rho_1^{(1)} = r$, $\rho_1^{(2)} = 0$, $\sigma^{(1)} = \sigma$ und überdies der Einfachheit halber $m^{(1)} = m^{(2)} = 1$ gesetzt wird, dass die entstehende Fläche eine mit dem Radius c gebildete Parallelfläche zu der gegebenen Linie, oder eine Canalfläche ist, bei der $P_1 = r + c$, $P_2 = c$ ist. In gleicher Weise lässt sich für nicht abwickelbare Flächen der Satz beweisen, den MONGE in der Application de l'analyse à la géometrie, 4ième édition, §. XVIII. p. 162 u. ff. ausgesprochen hat, dass eine Fläche, bei welcher der eine Hauptkrümmungsradius constant ist, eine Canalfläche sein muss. Auch kann man bei der Ausdehnung des Verfahrens der Zusammensetzung auf Flächen und Linien die Linien als Canalflächen von verschwindendem Radius auffassen.

VI.

Sobald die Flächen gefunden werden sollen, welche in Bezug auf ihre Krümmungsverhältnisse vorgeschriebene Eigenschaften haben, sind diese Eigenschaften als Relationen zwischen den Hauptkrümmungsradien ρ_1 und ρ_2 und dem Stellungswinkel σ auszudrücken und der obigen Gleichung (26), III hinzuzufügen. Alsdann ist zu ermitteln, ob das so enstandene System von partiellen Differentialgleichungen lösbar sei oder nicht, und sind im ersteren Falle die sämmtlichen Lösungen aufzusuchen. Hat man dies gethan, so liefern die Gleichungen (17), III nach Ausführung der vollständigen Integrationen die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z des Punktes der Fläche. Der Gleichung (26), III gebe ich, nachdem sie mit $\sin\vartheta$ multiplicirt ist, die für manche Zwecke geeignetere Gestalt

$$(1)\quad \frac{\partial\left(\rho_1+\rho_2+(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\tau}\right)}{\partial\vartheta}\sin\vartheta - i\frac{\partial\left((\rho_1+\rho_2-(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\tau})\sin^2\vartheta\right)}{\partial\vartheta} + 2i\sin\vartheta\cos\vartheta(\rho_1+\rho_2) = 0,$$

und wende mich zu Anwendungen.

Die erste Frage möge sich auf die Flächen beziehen, für welche die Summe der Hauptkrümmungsradien gleich Null ist, oder die Minimalflächen. Durch die Relation

$$(2)\qquad \rho_1 + \rho_2 = 0$$

geht (1) in die Gleichung

$$(3)\qquad \frac{\partial\left((\rho_1-\rho_2)e^{-2i\tau}\sin^2\vartheta\right)}{\sin\vartheta\,\partial\phi} + i\frac{\partial\left((\rho_1-\rho_2)e^{-2i\tau}\sin^2\vartheta\right)}{\partial\vartheta} = 0$$

über, welche aussagt, dass das vollständige Differential des complexen Ausdrucks $(\rho_1 - \rho_2)\, e^{-2i\sigma} \sin^2 \vartheta$ durch $\frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} - i d\phi$, oder der Ausdruck eine Function der complexen Grösse $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta - i\phi$, mithin der conjugirte Ausdruck $(\rho_1 - \rho_2) e^{2i\sigma} \sin^2 \vartheta$ eine Function der conjugirten complexen Grösse $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta + i\phi$ ist. Bekanntlich ist alsdann zugleich das Product

$$(4) \qquad -(\rho_1 - \rho_2)\, e^{2i\sigma} \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} + i d\phi \right)$$

ein vollständiges Differential. Vermöge der Gleichheit der Ausdrücke (14_a), (14_b), (14_c) in III sind aber auch die Quotienten

$$\frac{B_1 + iB_2}{A_1 + iA_2} = \frac{\cos \vartheta \cos \phi - i \sin \phi}{-\sin \vartheta}, \qquad \frac{C_1 + iC_2}{A_1 + iA_2} = \frac{\cos \vartheta \sin \phi + i \cos \phi}{-\sin \vartheta}$$

Functionen von $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta + i\phi$. Demzufolge müssen die aus (4) durch Multiplication mit diesen beiden Quotienten entstehenden Producte

$$(5) \qquad (\rho_1 - \rho_2)\, e^{2i\sigma} \sin^2 \vartheta \, \frac{\cos \vartheta \cos \phi - i \sin \phi}{\sin \vartheta} \left(\frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} + i d\phi \right),$$

$$(6) \qquad (\rho_1 - \rho_2)\, e^{2i\sigma} \sin^2 \vartheta \, \frac{\cos \vartheta \sin \phi + i \cos \phi}{\sin \vartheta} \left(\frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} + i d\phi \right)$$

ebenfalls vollständige Differentiale sein. Nun sind die reellen Theile von (4), (5), (6), halb genommen, respective den betreffenden Ausdrücken von dx, dy, dz in (27), III gleich, da gegenwärtig $\rho_1 + \rho_2 = 0$ ist. Wenn daher in den drei durch Ausführung der Integrationen von (4), (5), (6) entstehenden complexen Grössen, die Factoren von i beziehungsweise mit $2\mathfrak{x}$, $2\mathfrak{y}$, $2\mathfrak{z}$ bezeichnet werden, so gelten die Gleichungen

$$(7) \quad \begin{cases} dx + i d\mathfrak{x} = -\frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2)\, e^{2i\sigma} \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} + i d\phi \right) \\ dy + i d\mathfrak{y} = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2)\, e^{2i\sigma} \sin^2 \vartheta \, \frac{(\cos \vartheta \cos \phi - i \sin \phi)}{\sin \vartheta} \left(\frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} + i d\phi \right) \\ dz + i d\mathfrak{z} = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2)\, e^{2i\sigma} \sin^2 \vartheta \, \frac{(\cos \vartheta \sin \phi + i \cos \phi)}{\sin \vartheta} \left(\frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} + i d\phi \right). \end{cases}$$

Ferner nimmt die Darstellung des Quadrats des Linearelements der betrachteten Minimalfläche nach (28), III durch (2) die folgende Gestalt an

$$(8) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} e^{-2i\sigma} (d\vartheta - i \sin \vartheta d\phi) \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} e^{2i\sigma} (d\vartheta + i \sin \vartheta d\phi).$$

Dieselbe drückt den von RIEMANN in der Abhandlung: Über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung, Bd. 13 der Abhandlungen d. K. G. A. W. zu Göttingen, ausgesprochenen Satz aus, dass die Minimalfläche und ihre Abbildung auf der GAUSS'schen Kugel einander in den kleinsten Theilen ähnlich sind, ferner stimmen die in (7) enthaltenen Darstellungen der Differentiale der rechtwinkligen Coordinaten mit den von RIEMANN gegebenen Ausdrücken überein. Andererseits folgt aus (7) mit Zuziehung von (23), III, dass $x+i\mathfrak{x}$, $y+i\mathfrak{y}$, $z+i\mathfrak{z}$ Functionen derselben complexen Grösse sind und zugleich die Bedingung

$$(9) \qquad \overline{d(x+i\mathfrak{x})}^2 + \overline{d(y+i\mathfrak{y})}^2 + \overline{d(z+i\mathfrak{z})}^2 = 0$$

erfüllen. Dies ist die Eigenschaft der Minimalflächen, welche Hr. WEIERSTASS in der Abhandlung über die Flächen, deren mittlere Krümmung gleich Null ist, Monatsbericht d. Ak. vom 18. October 1866, zu Grunde gelegt hat. In der schon angeführten Arbeit: Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen und in einem am 27. Mai 1872 der Akademie vorgelegten Auszuge habe ich bei dem dort untersuchten verallgemeinerten Problem einen genau entsprechenden Satz nachgewiesen.

Eine zweite hier zu behandelnde Aufgabe besteht darin, dass, während die beiden Hauptkrümmungsradien als Functionen des entsprechenden Ortes auf der GAUSS'schen Kugel gegeben sind, die Bedingungen für die Existenz einer zugehörigen Fläche aufgesucht werden sollen, und eventuell die Fläche zu bestimmen ist. Nach der in III entwickelten Auffassung ist alsdann die Gestalt des zu einer bestimmten Normalenrichtung gehörenden Elements der Fläche, jedoch nicht die Stellung der Hauptkrümmungsradien gegeben, so dass sowohl diese Stellung, wie auch die Anordnung der Elemente im Raume zu ermitteln bleibt.

Zunächst unterscheide ich den Fall, dass die beiden Hauptkrümmungsradien einander gleich gegeben sind. In Folge dessen liefert die Gleichung (1) die beiden Gleichungen

$$(10) \qquad \frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\phi} = 0, \quad \frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta} = 0,$$

welche zeigen, dass $\rho_1+\rho_2$ constant sein muss. Die betreffende Fläche ist also vermöge (27), III eine Kugelfläche, einem Satze entsprechend, den MONGE in dem angeführten Werke § XIX nachgewiesen hat.

Nachdem somit die Voraussetzung $\rho_1-\rho_2=0$ absolvirt ist, schliesse ich dieselbe von der ferneren Betrachtung aus, dividire die Gleichung (1) durch den Ausdruck $(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\tau}\sin\vartheta$, und erhalte

$$(11)\quad \frac{\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\phi}}{(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}}+\frac{\partial\log(\rho_1-\rho_2)}{\partial\phi}-2i\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}-i\frac{\sin\vartheta\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta}}{(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}}$$
$$+i\sin\vartheta\left(\frac{\partial\log\left((\rho_1-\rho_2)\sin^2\vartheta\right)}{\partial\vartheta}-2i\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}\right)=0.$$

Die Trennung des reellen und imaginären Theils liefert die folgenden zwei Gleichungen für die partiellen Differentialquotienten der Function σ

$$(12)\quad \begin{cases} 2\sin\vartheta\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}=-\frac{\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\phi}}{\rho_1-\rho_2}\cos 2\sigma-\frac{\sin\vartheta\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta}}{\rho_1-\rho_2}\sin 2\sigma-\frac{\partial\log(\rho_1-\rho_2)}{\partial\phi} \\ 2\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}=-\frac{\sin\vartheta\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta}}{\rho_1-\rho_2}\cos 2\sigma+\frac{\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\phi}}{\rho_1-\rho_2}\sin 2\sigma+\sin\vartheta\frac{\partial\log\left((\rho_1-\rho_2)\sin^2\vartheta\right)}{\partial\vartheta}. \end{cases}$$

Der Kürze wegen werde

$$(13)\quad \frac{\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\phi}}{\rho_1-\rho_2}=U,\ \frac{\sin\vartheta\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta}}{\rho_1-\rho_2}=V,\ (\rho_1-\rho_2)\sin^2\vartheta=W$$

gesetzt, so dass die Gleichungen (12) in

$$(14)\quad \begin{cases} 2\sin\vartheta\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}=-U\cos 2\sigma-V\sin 2\sigma-\frac{\partial\log W}{\partial\phi} \\ 2\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}=-V\cos 2\sigma+U\sin 2\sigma+\sin\vartheta\frac{\partial\log W}{\partial\vartheta} \end{cases}$$

übergehen. Es müssen nun die auf zwei verschiedene Arten gebildeten zweiten partiellen Differentialquotienten von σ einander gleich sein, woraus die Gleichung folgt

$$(15)\quad \frac{\partial U}{\partial\phi}\cos 2\sigma-\frac{\partial V}{\partial\phi}\sin 2\sigma-\frac{\partial^2\log W}{\partial\phi^2}+(U\sin 2\sigma-V\cos 2\sigma)2\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}$$
$$=-\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\cos 2\sigma+\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\sin 2\sigma+\sin\vartheta\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial\log W}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta}$$
$$+(V\sin 2\sigma+U\cos 2\sigma)2\sin\vartheta\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}.$$

Diese geht aber durch Einsetzen der Ausdrücke von $\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}$ und $\sin\vartheta\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}$ in eine Gleichung über, die sich folgendermassen zusammenzieht:

$$(16)\quad \left(U\frac{\partial \log W}{\partial \phi}\frac{\partial U}{\partial \phi} - V\sin\Im\frac{\partial \log W}{\partial \Im} + \sin\Im\frac{\partial V}{\partial \Im}\right)\cos 2\sigma$$
$$+\left(V\frac{\partial \log W}{\partial \phi}\frac{\partial V}{\partial \phi} + U\sin\Im\frac{\partial \log W}{\partial \Im} - \sin\Im\frac{\partial U}{\partial \Im}\right)\sin 2\sigma$$
$$+\frac{U^2+V^2}{2}\sin\Im\frac{\partial\left(\sin\Im\frac{\partial \log W}{\partial \Im}\right)}{\partial \Im} - \frac{\partial^2 \log W}{\partial \phi^2} = 0.$$

Durch diese für jede der Functionen $\cos 2\sigma$ oder $\sin 2\sigma$ quadratische Gleichung wird der Stellungswinkel σ als Function der gegebenen Functionen ρ_1 und ρ_2 und ihrer ersten und zweiten nach $\Im$ und ϕ genommenen partiellen Differentialquotienten bestimmt. Aus den Auflösungen derselben sind die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial\sigma}{\partial\Im}$ und $\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}$ abzuleiten, und mit den in (14) gegebenen Ausdrücken zu vergleichen. Dann und nur dann, wenn eine Übereinstimmung stattfindet, existirt die gesuchte Fläche, und im Falle ihrer Existenz werden die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes derselben aus (27), III erhalten. Wofern ρ_1 und ρ_2 constant, aber nicht einander gleich gegeben sind, werden nach (13) die Grössen U und V gleich Null. W aber wird gleich dem Product der Constante $\rho_1 - \rho_2$ in die Function $\sin^2\Im$. Bei der betreffenden Substitution verschwindet aber die linke Seite von (16) nicht. Demnach existirt keine abwickelbare Fläche, in welcher die beiden Krümmungsradien constant, jedoch von einander verschieden sind, und es bleibt unter den nicht abwickelbaren Flächen mit constanten Krümmungsradien nur die Kugelfläche möglich. Diesen Satz hat Hr. J. Bertrand in der Abhandlung: Démonstration géométrique de quelques théorèmes relatifs à la théorie des surfaces. Liouville's Journal t. 13, 1848, p. 73, aufgestellt und begründet.

8. Zur Theorie der elliptischen Functionen.[1]

Von K. Weierstrass.

(Vorgelegt am 15. Februar: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VIII]; — ausgegeben am 22. Februar.)

Um die elliptischen Functionen

$$\sin \operatorname{am}(u, k), \quad \cos \operatorname{am}(u, k), \quad \Delta \operatorname{am}(u, k)$$

durch die Jacobi'schen Functionen

$$\begin{aligned}
\vartheta(x, q) &= 1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \ldots \\
\vartheta_1(x, q) &= 2\sqrt[4]{q} \cdot (\sin x - q^2 \sin 3x + q^6 \sin 5x - \ldots) \\
\vartheta_2(x, q) &= 2\sqrt[4]{q} \cdot (\cos x + q^2 \cos 3x + q^6 \cos 6x + \ldots) \\
\vartheta_3(x, q) &= 1 + 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \ldots .
\end{aligned}$$

auszudrücken, hat man die Aufgabe zu lösen, für jeden gegebenen Werth von k einen die Gleichung

$$(1.) \qquad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} = 2\sqrt[4]{q} \cdot \frac{1 + q + q^6 + q^{12} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}$$

befriedigenden Werth von q zu bestimmen. Ist ein solcher Werth gefunden, so hat man, wenn

$$(2.) \qquad \frac{2K}{\pi} = \vartheta_3^2(0, q), \quad x = \frac{u\pi}{2K}$$

gesetzt wird,

$$(3.) \qquad \begin{cases} \sqrt{k} \cdot \sin \operatorname{am}(u, k) = \dfrac{\vartheta_1(x, q)}{\vartheta(x, q)} \\ \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt[4]{1 - k^2}} \cdot \cos \operatorname{am}(u, k) = \dfrac{\vartheta_2(x, q)}{\vartheta(x, q)} \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{1 - k^2}} \cdot \Delta \operatorname{am}(u, k) = \dfrac{\vartheta_3(x, q)}{\vartheta(x, q)}. \end{cases}$$

Dabei kann der Werth einer der beiden Wurzelgrössen $\sqrt{k}$, $\sqrt[4]{q}$ beliebig fixirt werden, worauf dann der Werth der anderen durch die Gleichung (1.)

[1] Durch diese Abhandlung soll eine Lücke ausgefüllt werden, welche sich in der Jacobi'schen »Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet« (Gesammelte Werke, Band I, S. 497 ff.) findet, und auf die ich in einer Anmerkung auf S. 545 a. a. O. aufmerksam gemacht habe. Es sind deshalb hier durchgehends die Jacobi'schen Bezeichnungen von mir angewandt worden.

bestimmt wird. Der Werth von $\sqrt[4]{1-k^2}$ ist so zu wählen, dass

$$(4.) \qquad \sqrt[4]{1-k^2} = \frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}$$

wird.

In der nachgelassenen Abhandlung Jacobi's »Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet« ist die genannte Aufgabe für den Fall, dass k eine reelle, zwischen 0 und 1 enthaltene Grösse ist, behandelt (§. 6) und nachgewiesen worden, dass man von der Gleichung (1) ausgehend zu demselben Ausdrucke von q gelangt, den Jacobi in den »Fund. nov. funct. ellipt.« auf dem in diesem Werke eingeschlagenen Wege erhalten hatte. Ich werde jetzt zeigen, wie man mit den von Jacobi in der genannten Abhandlung angewandten Hülfsmitteln für jeden (complexen) Werth von k alle die Gleichung (1.) befriedigenden Werthe von q bestimmen kann, und zwar mittels einer Reihe, welche nicht nur ihrer starken Convergenz wegen für einen numerisch gegebenen Werth von k eine bequeme Berechnung der zugehörigen Werthe von q gestattet, sondern auch, wenn man k als eine veränderliche Grösse und q als Function derselben betrachtet, dazu dienen kann, die charakteristischen Eigenschaften dieser Function aufzufinden. Es kommen dabei hauptsächlich in Anwendung die beiden, auch von Jacobi benutzten Gleichungen

$$(5.) \qquad \begin{cases} \vartheta_3(0,q) = \vartheta_3(0,q^4) + \vartheta_2(0,q^4) \\ \vartheta(0,q) = \vartheta_3(0,q^4) - \vartheta_2(0,q^4), \end{cases}$$

welche sich unmittelbar aus den Ausdrücken von $\vartheta_3(0,q)$, $\vartheta(0,q)$ ergeben, und die Relation

$$(6.) \qquad \vartheta^4(0,q) + \vartheta_2^4(0,q) = \vartheta_3^4(0,q).$$

I.

Ich betrachte zunächst ausschliesslich reelle, der Bedingung

$$0 < q < 1$$

unterworfene Werthe der Grösse q, und setze fest, dass im Folgenden, wenn a eine positive Grösse ist, unter $\log a$ der reelle Werth des natürlichen Logarithmus von a, und unter a^m für einen beliebigen Werth von m, der durch die Formel

$$e^{m \log a}$$

gegebene Werth der Potenz a^m verstanden werden soll. Dann haben $\vartheta(0,q)$, $\vartheta_2(0,q)$, $\vartheta_3(0,q)$ stets reelle Werthe und sind stetige Functionen von q. Ferner ist aus den Ausdrücken der Grössen $\vartheta_2(0,q)$, $\vartheta_3(0,q)$ unmittelbar ersichtlich, dass die zweite beständig positiv ist, und für die erste, die für $q = 0$ verschwindet, dasselbe gilt, wenn $q > 0$.

Was aber $\vartheta(o, q)$ angeht, so würde, wenn diese Grösse für einen bestimmten Werth von q gleich Null wäre, aus (5.) folgen:

$$\vartheta_3(o, q^4) = \vartheta_2(o, q),$$

und es müsste demnach (gemäss Gleichung (6.)) auch $\vartheta(o, q^4) = o$ sein. Daraus würde dann weiter folgen, dass auch $\vartheta(o, q^{16}), \vartheta(o, q^{64})$ u. s w. gleich Null wären, was unmöglich ist, weil $\vartheta(o, q^m)$ für einen unendlich grossen positiven Werth von m unendlich wenig von 1 verschieden ist. Es kann also $\vartheta(o, q)$ für keinen der betrachteten Werthe von q verschwinden und ist demnach beständig positiv.

Hiernach ist

$$\frac{\vartheta_2(o, q)}{\vartheta_3(o, q)}$$

eine stetige Function von q, die für $q = o$ verschwindet und für jeden anderen Werth von q einen positiven Werth hat. Dieselbe ist, indem in Folge der Gleichung (5.)

$$\vartheta_3^4(o, q) > \vartheta_2^4(o, q),$$

stets kleiner als 1; es lässt sich aber zeigen, dass sie sich, wenn q von der Grenze Null an stetig wachsend der Grenze 1 sich nähert, ebenfalls beständig wachsend, derselben Grenze nähert.

Da nämlich

$$\frac{\vartheta_2(o, q)}{\vartheta_3(o, q)} = \frac{2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \ldots)}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots},$$

so lässt sich jedenfalls eine positive Grösse q_0, die < 1 ist, so annehmen, dass

$$\frac{\vartheta_2(o, q)}{\vartheta_3(o, q)}$$

beständig zunimmt, wenn q stetig wachsend das Intervall $(o \ldots q_0)$ durchläuft. Aus den Gleichungen (5) folgt aber, wenn $q^{\frac{1}{4}}$ für q gesetzt wird

$$(7.) \qquad \frac{\vartheta\left(o, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3\left(o, q^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{1 - \frac{\vartheta_2(o, q)}{\vartheta_3(o, q)}}{1 + \frac{\vartheta_2(o, q)}{\vartheta_3(o, q)}}.$$

Hiernach nimmt $\frac{\vartheta\left(o, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3\left(o, q^{\frac{1}{4}}\right)}$ beständig ab, wenn q stetig wachsend das genannte Intervall durchläuft, oder es nimmt, was dasselbe besagt, $\frac{\vartheta(o, q)}{\vartheta_3(o, q)}$ beständig ab, wenn q stetig wachsend von o aus in $q_0^{\frac{1}{4}}$ übergeht. Es ist aber

$$\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} = \left(1 - \frac{\vartheta^4(0,q)}{\vartheta_3^4(0,q)}\right)^{\frac{1}{4}};$$

es wächst also $\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$ gleichzeitig mit q, so lange $q < q_0^{\frac{1}{4}}$ ist. Daraus folgt sofort, dass dasselbe gilt, so lange q kleiner als

$$q_0^{\frac{1}{16}},\ q_0^{\frac{1}{64}},\ \text{u. s. w.}$$

ist. Die Glieder dieser Reihe convergiren aber gegen die Grenze 1; es wächst also $\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$ gleichzeitig mit q, wie nahe auch q der Einheit kommen möge. Es ist ferner, wenn

$$\delta = 1 - \frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$$

gesetzt wird, nach (7.)

$$\frac{\vartheta\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)} < \delta,$$

$$1 - \frac{\vartheta_2^4\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3^4\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{\vartheta^4\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3^4\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)} < \delta^4,$$

und somit auch

$$1 - \frac{\vartheta_2\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta_3\left(0, q^{\frac{1}{4}}\right)} < \delta^4.$$

Daraus folgt für jeden ganzzahligen positiven Werth von m

$$1 - \frac{\vartheta_2\left(0, q^{\frac{1}{4^m}}\right)}{\vartheta_3\left(0, q^{\frac{1}{4^m}}\right)} < (\delta)^{4^m};$$

es nähert sich daher, wenn m unendlich gross wird, der Werth von $q^{\frac{1}{4^m}}$ also der Grenze 1 unendlich nahe kommt,

$$\frac{\vartheta_2\left(0, q^{\frac{1}{4^m}}\right)}{\vartheta_3\left(0, q^{\frac{1}{4^m}}\right)}$$

ebenfalls dieser Grenze. Damit ist das oben hinsichtlich der Function $\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$ Behauptete bewiesen.

Dies vorausgeschickt, denke man sich nun den Quotienten

$$\frac{\vartheta_2^4(0,q)}{\vartheta_3^4(0,q)}$$

in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(q)$ entwickelt. Das Anfangsglied derselben ist $16q$, und ihre Coefficienten sind sämmtlich rationale Zahlen; man kann daher eine unendliche Reihe rationaler Zahlen

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

so bestimmen, dass für hinlänglich kleine Werthe von q die Gleichung

$$(8.) \qquad q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathfrak{P}^{n+1}(q)$$

besteht, aus welcher sich, da $\alpha_0 = \frac{1}{16}$ ist,

$$(9.) \qquad \log(16q) = \log \mathfrak{P}(q) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathfrak{P}^n(q)$$

ergiebt, wo $\beta_1, \beta_2, \ldots$ ebenfalls rationale Zahlen sind.

Nimmt man nun eine positive Grösse q_0, die < 1 ist, so an, dass dieselbe im Convergenzbezirke der Reihe $\mathfrak{P}(q)$ liegt, und zugleich, wenn man

$$t_0 = \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4$$

setzt, die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| t_0^n$$

(wo $|\beta_n|$ den absoluten Betrag von β_n bezeichnet) einen endlichen Werth hat, so gilt die Gleichung

$$(10.) \qquad \log q + \log 16 = 4 \log \frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^{4n}$$

sicher für die der Bedingung

$$0 < q \leq q_0$$

entsprechende Werthe von q, weil für jeden solchen Werth nach dem Vorhergehenden

$$0 < \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 \leq t_0$$

ist.

Man bezeichne

$$\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 \text{ mit } t,$$

und setze in (10.) q^4 für q, so erhält man, da nach den Gleichungen (5.)

$$(11.) \qquad \frac{\vartheta_2(0,q^4)}{\vartheta_3(0,q^4)} = \frac{1 - \frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}}{1 + \frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}} = \frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

ist, einen zweiten Ausdruck für $\log q$, nämlich

$$(12.) \quad 4\log q + \log 16 = 4\log\left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{1 - (1-t)^{\frac{1}{4}}}{1 + (1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}.$$

Aus (10.) und (12.) ergiebt sich dann die Gleichung

$$(13.)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n t^n = \log\left(\frac{8}{t}\,\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}.$$

Bei der Herleitung dieser Gleichung ist t als Function von q angenommen worden. Da aber, wenn q stetig wachsend das Intervall $(0\ldots q_0)$ durchläuft, t ebenfalls beständig wachsend vom Werthe 0 zum Werthe t_0 übergeht, so erhellt, dass die Gleichung (13.) besteht, wenn man t als eine unabhängige Veränderliche betrachtet und derselben irgend einen dem Intervall $(0\ldots t_0)$ angehörigen Werth giebt.

Es ist aber

$$d\log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)=\frac{\frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt}{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}+\frac{\frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt}{1-(1-t)^{\frac{1}{2}}}=\left(\tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}}+\tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\right)\frac{dt}{t};$$

entwickelt man also $\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}}$ nach Potenzen von t und setzt

$$(14.)\quad \tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{4}}+\tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{4}}=1+\varepsilon_1 t+2\varepsilon_2 t^2+3\varepsilon_3 t^3+\ldots,$$

so ergiebt sich

$$(15.)\quad \log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)=\log\frac{t}{8}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu t^\nu,$$

und es sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ sämmtlich rationale und positive Zahlen. Aus (15.) folgt sodann

$$(16.)\quad \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^m = t^m\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_{m,\nu}t^\nu,$$

wo für einen beliebigen Exponenten m die Coefficienten $\varepsilon_{m,\nu}$ mittels der aus (16.) und (14.) sich ergebenden Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(m+\nu)\varepsilon_{m,\nu}t^{m+\nu-1}=m\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_{m,\nu}t^{m+\nu}\cdot\left(\frac{1}{t}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\varepsilon_\nu t^{\nu-1}\right)$$

bestimmt werden können. Man erhält aus dieser Gleichung die Recursionsformel

$$(17.)\quad \nu\varepsilon_{m,\nu}=m\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu\varepsilon_\mu\varepsilon_{m,\nu-\mu}\qquad(\nu>0)$$

aus welcher, da $\varepsilon_{m,0}=(\frac{1}{8})^m$ ist, sich die wichtige Folgerung ergiebt, dass für einen positiven Werth von m die Grössen $\varepsilon_{m,\nu}$ sämmtlich positive Zahlen sind.

Die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu t^\nu,\ \sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_{m,\nu}t^\nu$$

convergiren, wie aus der Herleitung derselben erhellt, für jeden (reellen oder complexen) Werth von t, dessen absoluter Betrag kleiner als 1 ist. Bei der angegebenen Beschaffenheit der Grössen $\varepsilon_\nu, \varepsilon_{m,\nu}$ ist also für jeden zwischen 0 und 1 enthaltenen reellen Werth von t und jeden positiven Werth von m

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu t^\nu < \log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right) + \log\frac{8}{t}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}\varepsilon_{m,\nu}t^{m+\nu} < \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^m.$$

Daraus ergiebt sich, wenn man t gegen die Grenze 1 convergiren lässt,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu \leqq \log 8,\ \sum_{\nu=0}^{n}\varepsilon_{m,\nu} \leqq 1,$$

oder vielmehr, da dies auch gilt, wenn man $n+1$ für n setzt,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu < \log 8,\ \sum_{\nu=0}^{n}\varepsilon_{m,\nu} < 1.$$

Demnach convergiren die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu t^\nu,\ \sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_{m,\nu}t^\nu$$

auch für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag gleich 1 ist, und es ergiebt sich aus den Gleichungen (15, 14), wenn man t der Grenze 1 sich nähern lässt,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu = \log 8,\ \sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_{m,\nu} = 1. \tag{18.}$$

Es werde jetzt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_{m,\nu}t^{m+\nu} \text{ mit } \mathfrak{P}(t,m)$$

bezeichnet, so gilt nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n t^n + \tfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\mathfrak{P}(t,4n) \tag{19.}$$

für jeden in dem Intervall $(0\ldots t_0)$ enthaltenen reellen Werth von t. Es möge jetzt aber t_0 irgend eine positive Grösse, die < 1 ist und zugleich im Innern des Convergenzbezirks der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n t^n$ liegt, bedeuten. Dann ist, wenn man

$$t_1 = t_0^{\frac{1}{4}}$$

setzt, in Folge des Umstandes, dass die Coefficienten der Reihe $\mathfrak{P}(t,4n)$ sämmtlich positiv sind und die Summe derselben den Werth 1 hat,

$\mathfrak{P}(t_1,4n)$ positiv, aber kleiner als t_0^n,

und daher

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| \mathfrak{P}(t_1, 4n) < \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| t_0^n.$$

Für jeden der Bedingung

$$|t| \leqq t_1$$

entsprechenden Werth von t ist nun

$$|\mathfrak{P}(t, 4n)| \leqq \mathfrak{P}(t_1, 4n),$$

und hat also die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_n| |\varepsilon_{4n,\nu}| |t|^{4n+\nu}$$

einen endlichen Werth. Es ist deshalb die Reihe

$$\sum_{n,\nu} \beta_n \varepsilon_{4n,\nu} t^{4n+\nu} \qquad (n = 1 \ldots \infty, \nu = 0 \ldots \infty)$$

unbedingt convergent und es ergiebt sich, wenn man alle Glieder derselben, welche dieselbe Potenz von t enthalten, in eines zusammenzieht,

$$(20.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathfrak{P}(t, 4n) = \Sigma(r, \rho) t^{r+\rho}, \qquad (\rho = 0, 1, 2, 3, r = 1 \ldots \infty)$$

wo

$$(21.) \qquad (r, \rho) = \sum_{n=1}^{r} \varepsilon_{4n, 4r-4n+\rho} \beta_n.$$

Aus der Gleichung (19.) erhält man hiernach

$$(22.) \qquad \begin{cases} \beta_1 = \varepsilon_1, \quad \beta_2 = \varepsilon_2, \quad \beta_3 = \varepsilon_3, \\ \beta_{4r+\rho} = \varepsilon_{4r+\rho} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{r} \varepsilon_{4n, 4r-4n+\rho} \beta_n, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} r = 1 \ldots \infty \\ \rho = 0, 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

und kann also die Grössen β_n der Reihe nach berechnen, nachdem man zuvor die durch die Gleichungen (14, 17.) definirten Zahlen ε_n, $\varepsilon_{4n,\nu}$ bestimmt hat.

Aus den vorstehenden Formeln (22.) ist ersichtlich, dass die Grösse β_n ebenso wie die ε_r, $\varepsilon_{4n,\nu}$ sämmtlich positive rationale Zahlen sind.

Es ergiebt sich aber auch aus dem Vorhergehenden, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$$

für jeden (reellen oder complexen) Werth von t, dessen absoluter Betrag nicht grösser als 1 ist, unbedingt convergirt.

Um dies nachzuweisen, bemerke ich zunächst, dass man die im Vorstehenden gemachte Voraussetzung, es liege die mit t_0 bezeichnete Grösse im Innern des Convergenzbezirkes der Reihe $\Sigma \beta_n t^n$, jetzt fallen lassen kann und nur anzunehmen braucht, es sei die Reihe für $t = t_0$ convergent. Denn nach dem eben Bewiesenen ist $|\beta_n| = \beta_n$, und es bleibt somit bestehen, dass die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (20.) für $t = t_0^{\frac{1}{4}}$ convergirt. Für denselben Werth von t convergirt aber auch die Reihe $\Sigma \varepsilon_n t^n$; die Gleichung (19.) lehrt also,

dass, wenn die Reihe $\Sigma\beta_n t^n$ für $t = t_0$ convergirt, dasselbe nothwendig auch für $t = t_0^{\frac{1}{4}}$ und somit auch für

$$t = t_0^{\frac{1}{16}}, t_0^{\frac{1}{64}}, \ldots$$

stattfindet. Demgemäss convergirt die Reihe für positive Werthe von t, die der Einheit so nahe kommen, wie man will, und es ist also der Radius ihres Convergenzbezirks nicht kleiner als 1.

Hiernach gilt die Gleichung (10.)

$$\log q + \log 16 = 4 \log\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^{4n}$$

für jeden der Bedingung

$$0 \leq q < 1$$

entsprechenden Werth von q. Nähert sich aber q der Grenze 1, so convergirt der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung gegen die Grenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n,$$

und es ist daher

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = \log 16.$$

Demzufolge convergirt die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n t^n$$

auch dann, wenn der absolute Betrag von t gleich 1 ist, und stellt für den durch die Bedingung

$$|t| \leq 1$$

definirten Bereich der Grösse t eine continuirliche analytische Function derselben dar.

Setzt man nun

$$\psi(t) = \frac{t}{16} e^{\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n t^n}, \tag{23.}$$

so erhält man

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^{n+1}, \tag{24.}$$

wo die Coefficienten α_n identisch sind mit den in der obigen Gleichung (8.)

$$q = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \mathfrak{P}^{n+1}(q)$$

vorkommenden, welche also aus den β_n berechnet werden können und ebenso wie diese sämmtlich positive rationale Zahlen sind. Lässt man t der Grenze 1 sich nähern, so ergiebt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = e^{-\log 16 + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n} = 1. \tag{25.}$$

Die Function $\psi(t)$ ist demnach durch die Gleichung (24.) für jeden der Bedingung

$$|t| \leq 1$$

entsprechenden Werth der Veränderlichen t definirt. Für $t = 1$ ist $\psi(t) = 1$, dagegen für jeden anderen Werth von t

$$|\psi(t)| < 1.$$

Nun besteht nach dem Obigen die Gleichung

(26.) $$q = \psi(t),$$

wenn man

$$t = \left(\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\right)^4$$

setzt, sicher für die einem gewissen Intervall $(0 \ldots q_0)$ angehörigen reellen Werthe von q. Für alle diesen Werthen von q entsprechenden Werthe von t gilt also die Gleichung

(27.) $$\left(1 + 2\psi(t) + 2\psi^4(t) + 2\psi^9(t) + \ldots\right)^4 \cdot t = 16\psi(t)\left(1 + \psi^2(t) + \psi^6(t) + \ldots\right).$$

Es sind aber, wenn man t als eine unabhängige Veränderliche betrachtet und auf den durch die Bedingung

$$|t| \leq 1$$

definirten Bereich beschränkt, den Werth $t = 1$ jedoch ausschliesst, beide Seiten der vorstehenden Gleichung eindeutige und continuirliche analytische Functionen von t, weil für jeden der betrachteten Werthe dieser Grösse

$$|\psi(t)| < 1$$

ist. Nach einem bekannten Satze besteht also die Gleichung für jeden dem angegebenen Bereiche angehörigen Werth von t. Es lässt sich ferner zeigen, dass $\vartheta_3(0, q)$ auch für einen complexen Werth von q nicht verschwinden kann, und zwar in derselben Weise wie oben unter der Voraussetzung, dass q eine positive Grösse sei, für die Function $\vartheta(0, q)$ bewiesen worden ist, dass sie nicht gleich Null werden kann.

Hiermit ist nun bewiesen:

Ist t eine (reelle oder complexe) Grösse, deren absoluter Betrag die Einheit nicht übersteigt, und die auch nicht gleich 1 ist, so wird die Gleichung

$$\left(\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\right)^4 = t$$

befriedigt, wenn man

$$q = \psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n+1}$$

setzt.

Wenn also der Modul (k) der elliptischen Functionen seinem absolutem Betrage nach die Einheit nicht übersteigt und sein Quadrat

nicht gleich 1 ist, so gelten die unter (3.) aufgestellten Ausdrücke von

$$\sin \operatorname{am}(u, k),\ \cos \operatorname{am}(u, k),\ \Delta \operatorname{am}(u, k),$$

wenn man

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n k^{2n+2}$$

nimmt. Da ferner die elliptischen Functionen eines beliebigen Moduls auf solche, deren Modul den eben angegebenen Bedingungen entspricht, zurückgeführt werden können, so genügt das Vorstehende zu dem Nachweise, dass jede der genannten Functionen als Quotient zweier Thetareihen darstellbar ist.

In einer folgenden Mittheilung werde ich aber zeigen, wie man die Reihe

$$\Sigma \alpha_n t^n$$

in eine für jeden Werth von t convergirende umgestalten kann, und zugleich nachweisen, wie sich mit den hier angewandten Hülfsmitteln auch die Aufgabe lösen lässt, aus einem die Gleichung

$$\left(\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}\right)^4 = t$$

befriedigenden Werthe von q alle übrigen abzuleiten.

9. Bericht über die Fortsetzung der Untersuchungen an elektrischen Fischen.

Beiträge zur Embryologie von Torpedo.

Von Gustav Fritsch
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. du Bois-Reymond am 15. Februar: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VIII]; — ausgegeben am 22. Februar.)

Hierzu Taf. II.

Die Untersuchung der Torpedo-Embryonen ergab bisher folgende Resultate:

1. Die Entwickelung der elektrischen Organe bestätigt durchaus ihre phylogenetische Herleitung aus umgewandelten Muskeln in der von Hrn. Babuchin angedeuteten Weise.

2. Es ergiebt sich, dass es sich bei dieser Umwandlung um die äussere Gruppe der besonderen Kiemen- und Kiefermuskeln handelt, welche vorwiegend ventral entwickelt sind, während die tiefer gelegenen dorsal entspringenden Kiemenmuskeln mit dem Homologon des Digastricus am Kiefer der Muskelfunction ganz erhalten bleiben.

Abgesehen von den Muskeln, welche den Kiemenkorb als Ganzes bewegen, schafft bei Torpedo die völlige Einrahmung desselben durch die sich aneinander legenden Kopf- und Flossenknorpel den übrig bleibenden Muskeln so viel günstigere Stützpunkte, dass sie einer erhöhten Anforderung an ihre Leistung wohl genügen können. Die geschwächten Beissmuskeln entsprechen der Schwäche des Kieferapparates überhaupt; da der Fisch durch die furchtbare Waffe des elektrischen Schlages die Kiefer als Waffe weniger benöthigt, bewältigt und verschlingt er trotz dieser Schwäche andere Fische von unglaublich scheinender Grösse.

3. Die Musculatur von fünf Visceralbögen hat das Material für die elektrischen Organe zu liefern, wobei der Kiefer-Zungenbeinbogen als der erste zählt, während der letzte Kiemenbogen an der Bildung unbetheiligt ist. Da die zu den Bögen gehörigen Nerven stets in den Bogenzwischenräumen verlaufen und es selbstverständlich zwischen diesen fünf Bögen nur vier Zwischenräume giebt, zeigt der Embryo (wie der erwachsene Fisch) nur vier elektrische Nerven.

4. Der Process der Umbildung embryonaler Muskelanlagen in elektrische Säulen erscheint makroskopisch als ein Schwellungsvorgang an den äusseren, unteren Winkeln der Bögen, mikroskopisch als ein Quellungsprocess der Muskelscheiden bei starker Kernvermehrung (Nucleation, VIRCHOW) der embryonalen Muskelelemente.

5. Sobald die wuchernden Theile der Visceralbögen an den Berührungsstellen mit einander verschmelzen, leitet sich die Anlage der elektrischen Säulen ein, welche von der Peripherie her in der Weise entstehen, dass die aus indifferenten embryonalen Zellen sich herausbildenden Muskelfasern zu allmählich sich vergrössernden Gruppen oder Primitivbündeln verkleben, welche durch die peripherisch neu hinzukommenden mehr und mehr medianwärts gedrängt werden.

Diese elektrischen Säulenanlagen sind embryonalen Muskelprimitivbündeln durchaus ähnlich, sie gruppiren sich um die elektrischen Nerven und stellen für einen ganz kurzen Zeitraum (im Übergang zum Stadium rajiforme) demnach vier gesonderte Provinzen dar. Der beste Beweis, wie ähnlich die Säulen alsdann noch embryonalen Muskeln sind, ergiebt sich daraus, dass DE SANCTIS eine fünfte Provinz solcher Säulen mit einem fünften elektrischen Nerven darstellt, während diese angeblichen elektrischen Säulen Muskelbündel sind und bleiben.

Die Säulen sind in dieser Zeit längsfaserig mit länglichen Kernen ohne eine Spur von Plattenbildung; der Faserinhalt zeigt schwache Querstreifung ähnlich wie in den gleichzeitigen Muskelelementen.

6. Unter rapider Vermehrung der Säulenzahl geht der Embryo in das Stadium torpediniforme über. Sobald dies erreicht ist, zeigen die Organe nicht nur die normale Säulenzahl, sondern auch die wesentlichen Eigenthümlichkeiten, welche das Mosaik der entwickelten Organe erkennen lässt, nämlich: verhältnissmässig grosse Säulen der Scheibe und des inneren Randes, kleine und unvollkommen entwickelte an der Peripherie, welche letzteren der umhüllenden Schicht eng anhaften. Da sich der Differenzirungsprocess von hier aus entwickelt, so sind diese unvollkommenen Säulen, welche beim Erwachsenen so leicht Unsicherheit in die Zählungen tragen, als ein Zeichen der definitiven Erschöpfung des Säulenbildungsmaterials aufzufassen. Wenn sie sich bei besserer Ausbildung der Organfascie später auch etwas mehr abrunden, lässt sich die Abplattung derselben gegen die Peripherie selbst am entwickelten Fisch nachweisen.

7. Als weiterer Rest embryonaler Bildung, welche sich noch im ausgewachsenen Thier nachweisen lässt, ist die eigenthümliche, reihenweise Anordnung der Säulen im Organ zu bezeichnen. Es markirt sich, besonders nach dem inneren Rande zu, eine radiäre, ungefähr

auf die Medulla spinalis unterhalb des Lobus electricus gerichtete Reihenstellung der Säulen; diese rührt her von den Begrenzungen der embryonalen Provinzen des Organs, sowie von dem Verlauf der ausstrahlenden elektrischen Hauptnervenstämme; ausserdem aber eine reihenweise Anordnung parallel dem Organumfang der äusseren Peripherie: diese bezeichnet die gleichzeitige Loslösung hier gebildeter Säulen von der Matrix.

8. Die selbständige Bedeutung der Quellungsprocesse für die Organbildung macht sich in diesem Stadium auf höchst eigenthümliche Weise bemerklich, indem die durch bindegewebige Scheiden gebildeten, prismatischen Fächer für die Säulen bereits angelegt werden, lange bevor die Säulen im Stande sind, diese Fächer auszufüllen.

Der Organlängsschnitt (Querschnitt der Säulen) zeigt also die rundlichen Säulen in weitem Abstande von polygonalen Höfen umzogen, den Zwischenraum, abgesehen von Nerven und Gefässen, mit unreifem, sehr gequollenem Bindegewebe erfüllt. Diese Beobachtung ist bei dem gewöhnlich erst spätem Erscheinen festerer Scheiden meiner Überzeugung nach nur so zu deuten, dass der dem *Perimysium externum* der embryonalen Säulen eigene Quellungsvorgang an der weiteren Säulenperipherie die Bindegewebselemente zu anfangs unvollständigen Scheiden zusammendrängt, indem jedem Säulenindividuum dadurch gleichsam der später erforderliche Raum gesichert wird (vergl. Taf. II.).

Die definitive prismatische Gestaltung der Säulen, respective der elektrischen Platten entsteht also nicht durch das Aneinanderdrängen der wachsenden Platten, sondern durch das Aneinanderdrängen der gequollenen Perimysien.

Die anfänglich noch gleichwerthig erscheinende Provinz des letzten Kiemenbogens ist jetzt bereits von dem verbreiterten Organ vollständig überflügelt und erscheint als ein schmales, etwa dreieckiges Muskelfeld am hinteren, inneren Winkel des Organs (*x* der Taf. II.).

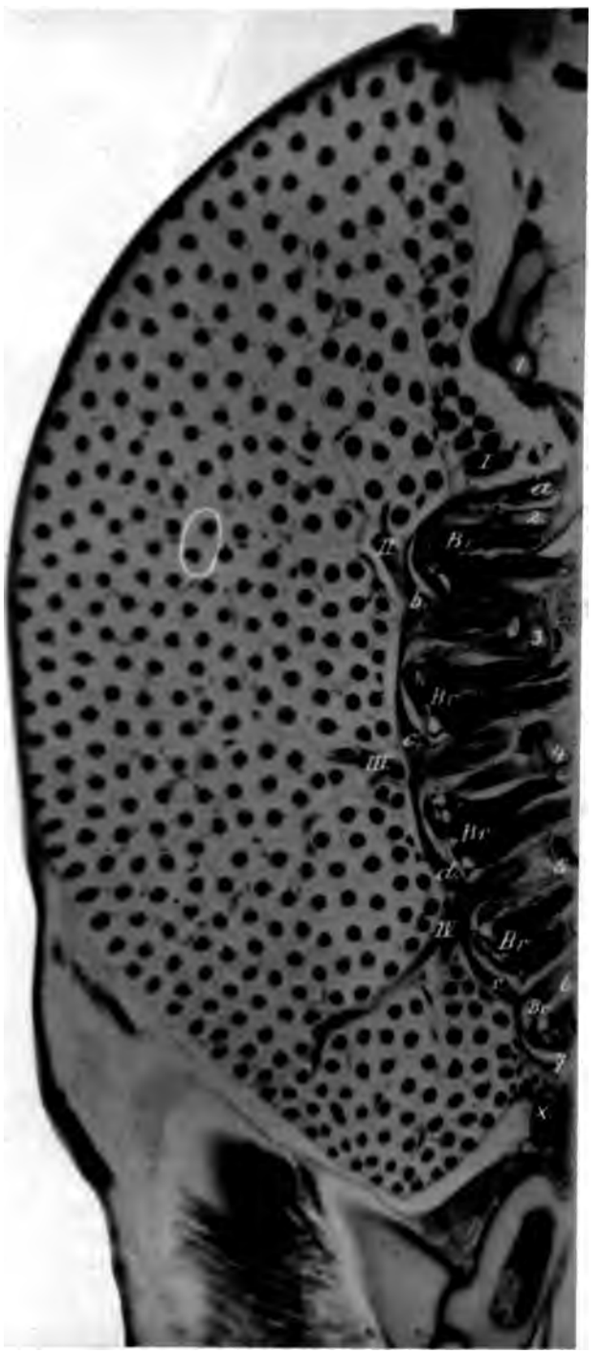
9. Zu dieser Zeit ist die Plattenbildung bereits in vollem Gange, da sie im vollendeten Stadium rajiforme sofort ihren Anfang nimmt. Charakteristisch ist für die Einleitung des Processes die Häufigkeit der Kerntheilungsfiguren, wobei die ursprünglich längliche Figur des Kernes an den Tochterkernen in eine regelmässige runde übergeht. Die gebildeten Kerngruppen ordnen sich reihenweise neben einander in querer Richtung zur Säulenaxe an, während der zugehörige Zellkörper unter Vermehrung des Protoplasma ihnen in gleicher Richtung folgt und dicke, kuchenförmige Körper (Babuchin's »Plattenbildner«) darstellt, als die erste Anlage der elektrischen Platten.

Birnförmige »Plattenbildner«, wie sie nach Hrn. Babuchin's Abbildung des Säulenlängsschnittes die embryonalen Zellen hier und da auseinander drängen, kann ich an meinen Praeparaten nicht finden, doch glaube ich gern, dass durch Maceration isolirte Elemente solche Gestalt annehmen können. Auch habe ich mich nicht davon überzeugen können, dass der Process der Kernvermehrung nur vom Bauchende der embryonalen Faser seinen Ursprung nimmt. Die je nach dem Alter der Säule längeren oder kürzeren Querreihen der proliferirenden Kerne sind so dicht gestellt, dass das zu ihnen gehörige Protoplasma nur an dünnsten Schnitten überhaupt zu umgrenzen ist, zumal zwischen den runden Kernen der entstehenden Platten sich noch Babuchin's »innere Belegzellen« einschieben. Demnach erscheint mir der Vorgang der Kernvermehrung als das wesentliche Moment der Plattenbildung, die Wucherung des Protoplasma's nur ein untergeordnetes, was auch der weitere Verlauf bestätigt, nämlich Zurückbildung des Protoplasma's der Platte bei Erhaltung der Kerne, welche an den ausgebildeten Platten von einem fast leer erscheinenden Hof umgeben sind.

10. Mit der Kernvermehrung geht bei steigender Regelmässigkeit der Plattenanordnung ein Untergang der musculären Längsfaserung einher, von welcher nur die früher von mir beschriebenen, von der »Couche dorsale« (Ranvier) ausgehenden, bindegewebigen Verbindungen zwischen den Platten übrig bleiben. Je weiter die Nucleation vorschreitet, um so stärker wird der Säulendurchmesser; ob dabei auch Verschmelzungen benachbarter Kerngruppen, resp. der umhüllenden Protoplasmamassen vorkommen, ist schwer festzustellen, doch erscheint sie mir unwahrscheinlich. Während im ersten Stadium der Säulenbildung die Kerne der embryonalen Muskelfasern im Allgemeinen länglich, die der bindegewebigen Zwischensubstanz rundlich sind, hat sich jetzt das Verhältniss umgekehrt, indem die Plattenkerne rundlich, die Scheidenkerne länglich, platt oder unregelmässig geworden sind.

Die weiteren Veränderungen der zum nervösen Glied gehörigen »inneren Belegzellen«, sowie der »äusseren Belegzellen« der Säulen, welche ebenfalls hauptsächlich zu den Nerven und Gefässen in Beziehung treten, hat Hr. Babuchin mit ebenso grosser Sorgfalt als Geschicklichkeit verfolgt, und habe ich zur Zeit dazu Nichts hinzuzufügen, sondern bestätige sie vollkommen.

11. Ausser diesen histologischen Elementen der Organe selbst ist noch die Entwickelung der elektrischen Nerven zu berücksichtigen. Auch in diesem Kapitel schliesse ich mich Hrn. Babuchin vollständig an; besonders hervorheben möchte ich aber dabei, dass es leider vollkommen richtig ist, wenn der genannte Autor klagt, wie schwierig



Horizontalschnitt durch das rechte elektrische Organ vom Embryo des Torpedo ocellata.

Vergröss. 16.

LICHTDRUCK VON STRUMPER & CO., HAMBURG

oder unmöglich es sich erweist, die sehr früh in dichten Bündeln auftretenden Nervenfibrillen ihrer Entstehung nach auf Zellen zurückzuführen, so plausibel solche Herleitung auch erscheint. Hierin müssen wir aber weiteren Aufschluss von der Zukunft erhoffen.

Es ergiebt sich aus der Summe der vorstehend verzeichneten Beobachtungen, dass die ganze Entwickelung der elektrischen Organe in allen ihren einzelnen Phasen unverträglich ist mit der Annahme, es fände sich am ausgebildeten Thier noch eine Vermehrung der Säulen. Die Betrachtung lehrt gleichzeitig, welche Anforderungen man hinsichtlich des Nachweises im extrauterinen Leben entstehender Säulen histologisch zu stellen hätte.

An dieser Stelle sei mir vergönnt auf die grosse Zuvorkommenheit hinzuweisen, mit welcher mich sowohl die zoologische Station zu Neapel als auch die österreichische zu Triest, und endlich die französische zu Villafranca mit reichlichem Material versorgt haben. Den Leitern dieser Stationen, den HH. Prof. Dohrn, Prof. Claus und Dr. Barrois, spreche ich hierdurch meinen herzlichsten Dank aus, zumal demjenigen der französischen Station, der mich in liebenswürdigster Weise unterstützte, obwohl die Umstände mich leider verhinderten, mit ihm persönlich in Verbindung zu treten.

Zeichenerklärung zu Taf. II.

Horizontalschnitt durch das rechte elektrische Organ des Embryo von *Torpedo ocellata*.

O. = elektrisches Organ.
Br. = Kiemen.
I, II, III, IV. = die durchschnittenen elektrischen Nerven.
1—6 = die durchschnittenen Visceralbögen.
a—f = die tieferen Kiemenmuskeln.
x = äusseres Muskelfeld des letzten Bogens.

10. Untersuchungen über die Befruchtung der Florideen.

Von Fr. Schmitz
in Bonn.

(Vorgelegt von Hrn. Pringsheim am 22. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. X]; ausgegeben am 1. März.)

Hierzu Taf. III.

Die neueren botanischen Forschungen haben in immer zahlreicheren Fällen nachgewiesen, dass bei der geschlechtlichen Befruchtung eine directe Vereinigung zweier sexuell differencirter Zellen stattfindet, deren Product als befruchtete Eizelle zum Keim einer neuen Pflanze sich ausbildet. Als wesentlichstes Moment bei dieser Vereinigung der beiden Sexualzellen stellte sich dabei die Vereinigung des Zellkerns der männlichen Zelle, der zuweilen fast die ganze Masse dieser männlichen Zelle ausmacht, mit dem Zellkern der weiblichen Zelle heraus, in ganz analoger Weise, wie dies auch bei den thierischen Befruchtungsvorgängen der Fall ist[1]. Einer Verallgemeinerung dieser Resultate stehen jedoch bisher noch mehrere, nicht genügend aufgeklärte Befruchtungsvorgänge im Wege. Vor allem aber bieten die Florideen, bei denen die Vereinigung der beiden Sexualzellen meistens die Weiterentwickelung einer dritten, mehr oder weniger weit entfernten Zelle zur Folge hat, einer allgemeinen Theorie der Sexualität grosse Schwierigkeiten dar.

Meine eigenen Beobachtungen über die Entwickelung der Squamarieen[2] hatten mich nun bei der Fruchtbildung dieser Florideen-Gruppe eigenthümliche Vorgänge auffinden lassen, welche den früheren Beobachtungen von Thuret und Bornet über die Befruchtung von *Dudresnaya* und *Polyides* sich anschlossen. Dies veranlasste mich, meine Untersuchungen weiter auszudehnen und die allgemeine Lösung der Frage nach dem Modus der geschlechtlichen Befruchtung und Fruchtbildung bei den Florideen in Angriff zu nehmen.

[1] Vergl. auch Strasburger, Über den Befruchtungsvorgang. Sitzb. der niederrhein. Ges. für Nat. u. Heilkunde zu Bonn. Sitzung vom 4. December 1882.

[2] Sitzungsberichte der niederrhein. Ges. für Nat. u. Heilkunde zu Bonn. 1879. S. 376—377. Sitzung vom 4. August.

Die Lösung dieser Aufgabe ward ausserordentlich dadurch erschwert, dass an meinem (im Binnenlande gelegenen) Wohnorte die Beschaffung des erforderlichen Untersuchungsmaterials mit der grössten Schwierigkeit verbunden war. Ich fühle mich deshalb der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin zu besonderem Danke verpflichtet, dass sie mir im Herbste 1881 einen längeren Aufenthalt an der Seeküste ermöglichte. Und ebenso sage ich hierdurch Hrn. Dr. Bornet in Paris für seine freigebige und jederzeit bereitwillige Unterstützung mit Untersuchungsmaterial meinen verbindlichsten Dank.

Diese Schwierigkeit der Beschaffung geeigneten Untersuchungsmaterials, um die begonnenen Studien zu vervollständigen und abzuschliessen, mag es auch rechtfertigen, dass ich im Folgenden[1] die gewonnenen Resultate als Bericht über meine bisherigen Untersuchungen zusammenstelle, ohne schon jetzt auf die Einzelheiten genauer einzugehen. Ich beabsichtige, diese Bearbeitung der Florideen noch weiterhin fortzusetzen und womöglich durch Untersuchung sämmtlicher Typen der europäischen Meere zu vervollständigen.

I.

Der Thallus der Florideen baut sich allgemein aus verzweigten Zellfäden auf. Diese einzelnen verzweigten Zellfäden sind bald frei *(Chantransia, Callithamnion)*, bald durch eine mehr oder minder dichte Gallerte zusammengehalten *(Batrachospermum, Crouania, Nemalion)*, bald durch eine sehr dichte und zähe Intercellularsubstanz so fest und dicht zusammengeschlossen, dass sie einen parenchymatischen Zellkörper darstellen[2]. Bald ragt dabei der Hauptast eines Verzweigungssystems

[1] Auf die zahlreichen Angaben der Litteratur, welche den verschiedenen einzelnen Punkten der nachfolgenden Darstellung entgegenstehen, kann hier nicht im Einzelnen näher eingegangen werden. Es muss dies der späteren speciellen Bearbeitung der einzelnen Florideen-Gruppen überlassen bleiben.

[2] Bei dieser verschiedenartigen Ausbildung des Thallus erscheinen die habituellen Differenzen der einzelnen Thallusformen weit grösser, als es die Unterschiede der ganzen Wachsthumsweise wirklich sind. Diese laufen im Wesentlichen auf ein differentes Verhalten der älteren Lamellen der Mutterzellhäute hinaus. Werden nämlich diese älteren Lamellen der Mutterzellhäute bei dem Auswachsen einer Astzelle local durchbrochen, so wächst die Astzelle zu einem freien Fadenaste heran. Werden diese Lamellen dagegen von der heranwachsenden Astzelle nur gedehnt und abgehoben, so bleibt die Astzelle mit den benachbarten Zellen in mehr oder minder dicht geschlossenem, sogenanntem parenchymatischen Zellverbande vereinigt und durch gemeinsame Aussenhaut zusammengehalten. Verquellen dabei diese gemeinsamen Zellhautlagen gallertig, so erscheint der Thallus in Gestalt eines Systemes verzweigter Zellfäden, die von mehr oder minder dichter Gallerte eingeschlossen und umhüllt sind.

Diese verschiedenartige Ausbildung des Thallus schliesst somit eine nahe Verwandtschaft zweier Florideengattungen, wie verschieden auch auf den ersten Blick der Habitus derselben sein mag, niemals aus.

inmitten seiner zahlreichen Seitenäste besonders hervor *(Batrachospermum)*, bald wird er durch rasches Heranwachsen der Seitenäste, die sich in gleicher Ausbildung und Stärke ihm zur Seite ordnen, verdeckt und unkenntlich.

Die einzelnen Fäden wachsen durch Spitzenwachsthum in die Länge unter acropetal fortschreitender Gliederung der Endzelle, die bald durch Grösse hervorragt und dann leicht als Scheitelzelle unterschieden wird, bald nicht von den übrigen Zellen verschieden ist. Daher erscheinen die einzelnen Thalluszweige bald mit einer deutlichen Scheitelzelle an der Spitze des Hauptastes des ganzen Verzweigungssystemes versehen, bald wachsen sie, wenn weder der Hauptspross des Verzweigungssystemes deutlich hervortritt, noch die Endzellen der einzelnen Zweige sich deutlich abheben, anscheinend mit einer Scheitelfläche in die Länge, während doch in allen Fällen dieselbe Weise des Spitzenwachsthums sich vollzieht.

Dem Spitzenwachsthum des Zellfadens folgt allgemein ein oft sehr ausgiebiges intercalares Wachsthum durch Dehnung der einzelnen Zellen. Hierbei aber erfolgt niemals eine (orthogonale oder schräge) Quertheilung der einzelnen Gliederzelle und ebensowenig eine Längstheilung, deren Theilungswand die organische Längsaxe der Gliederzelle in sich fasst[1]. Die einzigen Theilungen vielmehr, welche die einzelnen Fadenzellen zerlegen, schneiden Stücke des Randes ab[2], die nun zu kürzeren oder längeren Seitenzweigen sich ausbilden.

Ebensowenig aber kann aus demselben Grunde eine nahe Verwandtschaft zweier Gattungen dadurch ausgeschlossen werden, dass die sporenbildende Gewebemasse, der sogenannte Kern des Cystocarps, in dem einen Falle einen geschlossenen Zellkörper, im anderen Falle ein verzweigtes Fadenbüschel darstellt (vergl. z. B. *Helminthora* und *Nemalion*, *Callithamnion* und *Seirospora*, *Cruoria* und *Cruoriopsis*, *Chylocladia* und *Lomentaria* u. a. m.)

[1] Zur Feststellung dieser Thatsache bedarf es in vielen Fällen sehr langwieriger und mühsamer Untersuchungen, sodass dieselbe leicht übersehen werden kann. In der Litteratur finden sich daher auch manche entgegengesetzten Angaben (von Nägeli, Kny, Reinke u. a.). In allen Fällen jedoch, die ich bisher habe nachuntersuchen können, habe ich diese Angaben nicht zu bestätigen vermocht und glaube mich nun nach sehr zahlreichen Einzeluntersuchungen berechtigt, die obigen Sätze als allgemeingültig für die Florideen aufzustellen. Sollten wirklich hie und da Ausnahmen vorkommen, so finden dieselben doch jedenfalls nur äusserst selten statt.

[2] Auf diesem Umstande, dass bei den Florideen niemals eine Gliederzelle durch eine Querwand oder durch eine (organisch-) mediane Längswand getheilt wird, vielmehr stets nur seitliche Randzellen von einer solchen Gliederzelle abgeschnitten werden, beruht auch die Thatsache, dass das Zellgewebe des Florideen-Thallus stets auf ein System verzweigter Zellfäden zurückzuführen ist, selbst bei körperlichem Thallus und lückenlosem Zusammenschluss der einzelnen Zellen. Ein jeder Zellkörper, den man unter Einhaltung dieser Bedingung construirt, muss ja dasselbe Verhalten zeigen, und nur auf dem Wegfall dieser Bedingung beruht es, dass nicht auch

Diese Randzellen werden an der einzelnen Gliederzelle bald in Einzahl, bald in Mehrzahl, bald simultan, bald succedan angelegt und bewirken je nach ihrer Anzahl und ihrer früheren oder späteren Ausbildung einen sehr verschiedenartigen Habitus der Zelltheilung und der Verzweigung der einzelnen Fäden. Sehr verbreitet dabei ist der Modus, dass am oberen Ende einer eben entstandenen Gliederzelle sofort eine Astzelle ausgegliedert wird, die sich neben der Endzelle des Fadens fast ebenso rasch und kräftig wie diese selbst hervorstreckt und dadurch leicht den Anschein einer regelmässig dichotomischen Verzweigung hervorruft; es sei im Folgenden dieser Verzweigungsmodus mit Borner als subdichotom bezeichnet. —

Bei jeder Theilung einer Florideenzelle wird im organischen Mittelpunkt der gebildeten Scheidewand ein eigenthümlicher Tüpfel angelegt, der die beiden Schwesterzellen in Verbindung erhält, so lange dieselben lebendig bleiben. Dieser Tüpfel fällt niemals bei einer späteren Theilung der Zelle, wodurch ja, wie erwähnt, stets nur Randzellen abgetrennt werden, einer solchen Randzelle zu, sondern bleibt stets der Gliederzelle selbst erhalten. Bei jeder Abschneidung einer Randzelle wiederholt sich das Gleiche, sodass aus der Anzahl und Vertheilung dieser Tüpfel, selbst an den ganz ungleichmässig gedehnten Zellen erwachsener Thalluszweige, noch genau der genetische Zusammenhang der einzelnen Zellen mit ihren sämmtlichen Nachbarzellen erkannt werden kann, wofern nicht das Auftreten secundärer Tüpfel Schwierigkeiten hervorruft. — Solche secundären Tüpfel aber finden sich vielfach, namentlich bei Arten mit kleinzelligem Thallus, in der Weise ausgebildet, dass die einzelnen Thalluszellen mit sämmtlichen

die Zellmassen der Wurzeln, Stengel, Blätter u. s. w. der Archegoniaten und Phanerogamen auf ein System einfacher verzweigter Zellfäden zurückgeführt werden können.

Ein ganz ähnliches Verhalten wie die Florideen aber zeigen die Ascomyceten, bei deren grosser Mehrzahl nur selten eine Quertheilung der einzelnen Gliederzellen vegetativer Zellfäden erfolgt. Infolge dessen tritt auch bei diesen Ascomyceten der Aufbau des Thallus aus verzweigten Zellfäden meist ebenso deutlich, wenn nicht noch deutlicher als bei den Florideen hervor, und beruht das gelegentliche Auftreten parenchymatischer Zellkörper (z. B. bei der Anlage der Perithecien von *Pleospora herbarum* [vgl. Bauke in der Botanischen Zeitung 1877 S. 315 ff.]) wohl ebenso wie bei den Florideen nur auf dichtem, festem Zusammenschluss der sehr kurzgliederigen verzweigten Zellfäden.

[1] Ein solcher Tüpfel findet sich demzufolge sowohl in der unteren, als auch in der oberen Querwand einer jeden Gliederzelle. Zwischen den beiden Tüpfeln dieser beiden Querwände verläuft die organische Längsachse der Gliederzelle. Da nun, wie oben erwähnt, niemals eine Quertheilung, noch eine (organisch-) mediane Längstheilung einer Gliederzelle eintritt, somit niemals in der Gliederzelle eine Scheidewand gebildet wird, welche die organische Längsachse derselben schneidet oder in sich fasst, so folgt hieraus, dass die Gliederzelle stets die beiden ursprünglichen Tüpfel in den beiden Endflächen behalten muss, wie es in der That auch der Fall ist.

angrenzenden Zellen durch nachträgliche Ausbildung von ein oder mehreren Tüpfeln in den trennenden Scheidewänden in Verbindung treten, ohne Rücksicht darauf, ob sie durch diese Scheidewände von Schwesterzellen getrennt werden oder nicht. Ja durch solche secundären Tüpfel treten zuweilen sogar die Zellen der secundären, rhizoidartigen Markfäden dickerer Florideen-Stämme mit einzelnen Zellen des Gewebes, durch welches sie hindurchwachsen, in nähere Verbindung.

Diese (im Allgemeinen kreisförmigen) Tüpfel sind durch äusserst dünne Membranlamellen geschlossen. Diesen Schliesshäuten aber liegt beiderseits eine dicke Platte einer sehr dichten (durch Hämatoxylin und analoge Färbungsmittel sehr leicht und intensiv tingirbaren[1]) Substanz so dicht und fest an, dass es nur selten und nur durch Verquellen der Schliesshaut gelingt, dieselbe abzulösen[2]. Beide Platten stehen durch zahlreiche Stränge, welche hauptsächlich (zuweilen anscheinend ausschliesslich) im Umkreise des Tüpfels die Schliesshaut durchsetzen und hier vielfach seitlich zu hohlcylindrischem Verbande zusammenschliessen, in unmittelbarer Verbindung[3]. Andererseits aber hängen diese Platten mit dem wandständigen Protoplasma der betreffenden Zelle direct und fest zusammen und bilden anscheinend nur den Abschluss des wandständigen Protoplasmaschlauches[4] längs der Tüpfelfläche (in Wirklichkeit dürften sie aber wohl, wenigstens gegen

---

[1] Hinsichtlich ihres Verhaltens gegen Färbungsmittel zeigt die Substanz dieser Verschlussplatten der Tüpfel eine sehr grosse Analogie mit dem sogenannten Schleim der Siebröhren, den ich jedoch auf Grund wiederholter Untersuchungen (an Cucurbitaceen) ganz anders auffassen zu müssen glaube, als zur Zeit gewöhnlich geschieht.

Während man nämlich allgemein diesen Schleim als leblos betrachtet und denselben in den Siebröhren von Zelle zu Zelle fortwandern lässt, vermag ich meinerseits für ein solches Wandern des Schleimes in den Thatsachen selbst gar keinen Anhalt zu finden. Meines Erachtens bleibt dieser »Schleim« vielmehr in bestimmter Gestaltung (die allerdings bei der Präparation ausserordentlich leicht verletzt wird) in den einzelnen Zellen, in denen er gebildet wurde, erhalten. In den complicirteren Fällen (z. B. eben bei den Cucurbitaceen) stehen die gestalteten »Schleimmassen« (Verschlussplatten der Siebplatten und verbindende hohlcylindrische Stränge) der einzelnen Siebröhrenglieder (Zellen) sämmtlich unter einander in Verbindung und stellen so in der Pflanze ein zusammenhängendes System eigenthümlicher Stränge dar.

[2] In sehr instructiver Weise gelang mir dies z. B. an Exemplaren von *Griffithsia Schousboei* J. Ag. und *Pterothamnion Plumula* Naeg., die mittelst Pikrinsäure gehärtet wurden.

[3] Inwieweit analoge Verschlussplatten auch den Tüpfeln anderer Algen (Fucaceen, Dictyotaceen, Volvocaceen, u. a.) zukommen, muss weitere Untersuchung erst entscheiden. Die Thatsache, dass bei der Contraction des Plasmas an diesen Tüpfeln ziemlich regelmässig Plasmastränge haften bleiben, lässt ähnliche Verhältnisse im Bau dieser Tüpfel wohl erwarten. Doch erschwert die geringe Grösse der meisten dieser Gebilde die sichere Entscheidung der Frage gar sehr.

[4] Ob diese Platten durch locale Differenzirung (chemische Umwandlung) des wandständigen Protoplasmas entstehen, mag vorläufig dahin gestellt bleiben; doch möchte ich dies für nicht unwahrscheinlich halten.

das Zellenlumen hin, von einer sehr dünnen Protoplasmaschicht überzogen sein). — An getödtetem Materiale, dessen Zellwände gewöhnlich mehr oder weniger gallertig aufquellen, bleiben die Plattenpaare verbunden, und dementsprechend sieht man die contrahirten Plasmakörper der sämmtlichen einzelnen Zellen, gegen die Nachbarzellen hin mehr oder weniger zu strangförmigen Fortsätzen ausgezogen, vermittelst jener Plattenpaare unter einander in Verbindung.

So wird vermittelst der Stränge, welche die Schliesshäute der Tüpfel durchsetzen und die beiden Platten der einzelnen Paare verbinden, ein directer Zusammenhang der benachbarten Zellen unter einander hergestellt und damit eine unmittelbare Verbindung aller Thalluszellen[1] erzielt, die es ermöglicht, dass diese Thalluszellen trotz ihrer ausserordentlich grossen Anzahl in einheitlichem Zusammenwirken ein einheitliches Ganzes, ein einzelnes Pflanzen-Individuum, bilden[2].

Eine offene Communication, sodass ein Austausch geformter Protoplasmatheile, Zellkerne oder Chromatophoren zwischen den beiden benachbarten Thalluszellen stattfinden könnte, wird jedoch durch jene Tüpfel nicht hergestellt. Eine solche offene Communication wird vielmehr nur in einigen wenigen Fällen (Corallineen[3]) durch die Ausbildung grösserer offener Poren, welche nachträglich in der gemeinsamen Scheidewand benachbarter Thalluszellen angelegt werden, ermöglicht, analog den so vielfach verbreiteten H-förmigen Verbindungen der Hyphen von Ascomyceten und Basidiomyceten.

---

[1] Den unmittelbaren Zusammenhang aller Thalluszellen vermittelst dieser Tüpfel hat bereits Bornet (Études phycologiques p. 100) hervorgehoben, doch hielt er diese Tüpfel für vollständig offene Canäle. Er suchte sogar eben durch diesen unmittelbaren Zusammenhang aller Thalluszellen die Thatsache begreiflich zu machen, dass von der befruchteten weiblichen Zelle der befruchtende Einfluss auf jene Zelle, die zur Sporenfrucht auswächst, sich fortpflanzt.

[2] Meines Dafürhaltens dienen jene Verbindungsstränge zwischen den beiden Verschlussplatten der Tüpfel wesentlich der Übertragung dynamischer Einwirkungen von Zelle zu Zelle, die entsprechenden Poren der Zellhaut aber ermöglichen daneben auch einen leichteren Austausch gelöster Substanzen zwischen den beiden benachbarten Zellen. Ein Wandern des Protoplasmas selbst von einer Zelle zur anderen vermittelst dieser offenen Verbindungswege halte ich für ausgeschlossen.

Mancherlei Momente scheinen mir sogar dafür zu sprechen, in den beiden Verschlussplatten der Tüpfel diejenigen Organe der einzelnen Zelle, welche die von der Nachbarzelle übermittelten Reize aufnehmen und verarbeiten, zu erblicken.

Und ebenso möchte ich aus mancherlei Gründen es nicht für unmöglich halten, dass die erwähnten (meines Erachtens mit den Verschlussplatten substanziell übereinstimmenden) »Schleimmassen« der Siebröhren eine ganz analoge Function wie jene Verschlussplatten und ihre Verbindungsstränge besitzen, nämlich wesentlich der Verarbeitung und Fortleitung dynamischer Reize dienen, sodass der Gedanke Hanstein's (Protoplasma S. 172), dass möglicherweise die Siebröhren der Pflanzen den thierischen Nerven vergleichbar seien, sich bestätigen würde.

[3] Vergl. Schmitz in Sitzungsb. d. niederrh. Ges. f. Nat. u. Heilkunde. 1880 S. 122. Sitz. am 7. Juni 1880.

II.

An diesem Thallus entstehen die Sexualzellen durch Differenzirung einzelner Endzellen des ganzen Systems verzweigter Zellfäden.

Die männlichen Zellen werden gewöhnlich in grösserer Anzahl neben einander gebildet. Neben der zumeist ziemlich kleinen Endzelle eines kürzeren oder längeren Fadenastes werden von der obersten Gliederzelle (eine oder) mehrere kleine Astzellen angelegt, die ebenso wie die Endzelle selbst zu männlichen Zellen sich ausbilden. An der zweiten und oft auch der dritten Gliederzelle (zuweilen auch den folgenden Gliederzellen) wiederholt sich das Gleiche, oder es treten aus diesen Gliederzellen kurze, ein- bis mehrzellige Seitenästchen hervor, die nun ihre Endzellen, sowie die Astzellen der oberen Gliederzellen zu männlichen Zellen ausgestalten. Daher stehen die männlichen Zellen zu mehreren vereint auf der Spitze der obersten Zelle und am oberen Ende der nächstangrenzenden Gliederzellen eines einfachen oder verzweigten Fadenastes. — Solche Äste aber sind bald einzeln, bald in Gruppen vereinigt am Thallus der einzelnen Florideen-Species vertheilt und bilden dadurch sogenannte Antheridien von sehr mannigfaltig wechselnder Gestaltung.

Solche Antheridien zeigen zuweilen die Gestalt einzelner grösserer oder kleinerer Fadenbüschel (*Callithamnion, Scinaia* u. s. w.); meist aber sind mehrere oder zahlreiche derartige Büschel zu Gruppen zusammengestellt, welche kleinere oder grössere Strecken der Thallusoberfläche überziehen (*Nitophyllum, Peyssonelia, Polyides, Ceramium* u. s. w.). Zuweilen sind solche Gruppen eingesenkt und kleiden Vertiefungen der Thallusoberfläche aus, oder es sind gar diese Vertiefungen zu krugförmigen Behältern gestaltet, die in ihrer Ausbildung die grösste Ähnlichkeit mit den Spermogonien der Flechten und Ächidiomyceten darbieten (*Gracilaria, Galaxaura,* viele Corallineen). In allen Fällen aber gehen die männlichen Zellen ausschliesslich (ich habe niemals eine Ausnahme beobachtet) aus den Endzellen kürzerer oder längerer Äste der Thallusfäden hervor, niemals aus Gliederzellen derselben[1]. —

[1] Einige wenige entgegengesetzte Angaben der Litteratur (über die Bildung der Spermatien von *Melobesia deformans* bei Solms [Corallinenalgen des Golfes von Neapel S. 53] und von *Hildenbrandtia rivularis* bei Borzì [Rivista Scientifica I. No. 1. Messina 15 maggio 1880]) muss ich bisher noch dahingestellt lassen, da ich die betreffenden Fälle noch nicht selbst habe untersuchen können. Allein da ich bei allen genauer untersuchten Florideen die obige Regel bestätigt fand, auch wenn der erste Anblick der Antheridien eine ganz andere Entwicklungsweise der Spermatien in Aussicht stellte, so möchte ich es für nicht unwahrscheinlich halten, dass bei genauerer Untersuchung auch die genannten Ausnahmefälle auf jene Regel sich zurückführen lassen.

Die einzelne männliche Zelle erwies sich in allen genauer untersuchten Fällen von ihrer ersten Entstehung an farblos; geformte Chromatophoren waren innerhalb derselben niemals zu erkennen. Dagegen war überall ein ziemlich grosser Zellkern innerhalb des Protoplasmas, das meist einige kleine glänzende Körnchen einschloss, nachzuweisen. Bei vollständiger Reife der männlichen Zelle reisst die Membran derselben an der Spitze auf, der Plasmakörper tritt als dichter, kugeliger oder länglicher Körper, der zuweilen am unteren Ende in eine schwanzartige Spitze ausgezogen ist *(Cruoria purpurea, Corallina, Amphiroa)*, ins Freie hervor. Im Inneren dieses hervorgetretenen Spermatiums aber umschliesst stets ein ziemlich dichtes Protoplasma mit einigen kleinen glänzenden Körnchen einen ziemlich grossen, bald central, bald etwas excentrisch gelagerten Zellkern.

Die Entwickelung und Entleerung der einzelnen Spermatien eines Antheridiums erfolgt successive. Sehr häufig aber wächst nach der Entleerung einer Spermatium-Mutterzelle die Trägerzelle derselben durch und entwickelt innerhalb der entleerten Hülle der Spermatium-Mutterzelle eine neue männliche Zelle *(Batrachospermum, Cantransia)*, bis die Inhaltsmassen der Trägerzellen verbraucht sind.

Die einzelnen, ins Freie hervorgetretenen Spermatien stellen membranlose kleine Zellchen dar, denen der herrschenden Ansicht zufolge jegliche selbständige Beweglichkeit mangelt. Meine eigenen Beobachtungen haben bisher ebenfalls nicht vermocht, an diesen Zellen Bewegungsorgane oder überhaupt eine auffallende selbständige Beweglichkeit irgend welcher Art sicher nachzuweisen. Doch veranlasst mich eine Reihe von Beobachtungen[1] zu der Vermuthung, dass die

[1] Ich sah z. B. bei der Beobachtung lebender Spermatien von *Polysiphonia elongata* Grev. (in Helgoland) ganz deutlich ein einzelnes Spermatium langsam durch das Gesichtsfeld des Mikroskopes fortrücken, während die übrigen Spermatien vollständig stille lagen.

Mehrmals auch sah ich Spermatien derselben *Polysiphonia* an anderen Körpern in solcher Weise festhaften, dass das kugelige Spermatium um etwa die doppelte Länge seines Körperdurchmessers von dem Substrate abstand, gleichwohl aber mit diesem fest zusammenhing, da es alle, selbst die kleinsten Bewegungen des Substrates seinerseits durch pendelartig schwingende Bewegungen begleitete. Es lag nahe, in dem fadenförmigen Verbindungsstrange, der hier, wie nach dem Gesagten angenommen werden musste, das Spermatium an das Substrat befestigte, die bisher vergebens gesuchte Zilie des Spermatiums zu erblicken. Allein es gelang mir leider trotz aller aufgewandten Mühe nicht, diese supponirte Zilie deutlich zu erkennen, so oft ich dieselbe auch zu erkennen glaubte.

Weiterhin deutet auf eine selbständige Beweglichkeit der Florideen-Spermatien doch auch die Thatsache hin, dass bei *Batrachospermum* die Spermatien durch die Gallerthülle der Thalluszweige hindurchdringen müssen, um an die Spitze der vollständig eingesenkten Carpogonien zu gelangen. Zu einem solchen Vordringen aber dürften sie doch wohl kaum ohne eigene (vielleicht amöboide?) Beweglichkeit befähigt sein.

bisherige Annahme, wonach die Spermatien nur passiv durch die Bewegung des umgebenden Wassers zu den weiblichen Zellen hingelangen, keineswegs vollständig die Thatsachen erschöpft, und möchte ich deshalb meinerseits die Frage nach der Beweglichkeit der isolirten Spermatien lieber noch unentschieden lassen.

III.

Die weiblichen Sexualzellen der Florideen entstehen ausnahmslos aus den Endzellen kürzerer oder längerer Seitenäste des ganzen Verzweigungssystems der Thallusfäden. Diese Äste werden vielfach erst nach der Anlage der sämmtlichen übrigen Auszweigungen als secundäre Seitenäste angelegt. Bald sind sie auf eine sehr geringe Anzahl von Zellen (2 oder 3, selten 1) beschränkt, bald erreichen sie eine grössere Länge; zuweilen in der Ausbildung von den übrigen benachbarten sterilen Fadenästen nicht verschieden, lassen sie sich doch in den meisten Fällen durch ihre Gestalt[1], durch die Grösse ihrer Zellen oder durch abweichende Verzweigung ihrer Gliederzellen leicht unterscheiden. In allen Fällen aber gestaltet sich ihre Endzelle schliesslich zur weiblichen Sexualzelle, indem dieselbe aus ihrer Spitze eine Ausstülpung hervortreten lässt, die in einen mehr oder minder langen, haarartig dünnen oder keulenförmig verdickten, zuweilen an seiner Basis ein- oder mehrmals spiralig gedrehten (Fig. 17, 23) oder kolbig erweiterten (Fig. 33) Fortsatz, das Trichogyn, sich verlängert. Diese weibliche Zelle sei hier (nach Analogie des Oogoniums der Chlorophyceen) als Carpogonium bezeichnet[2].

Zur Zeit der Befruchtungsreife umschliesst das Carpogonium in seinem meist eiförmig gestalteten Bauchtheile ein sehr reichliches Protoplasma mit grossem, deutlichem Zellkern. Zuweilen sind diesem Protoplasma auch wohlausgebildete, mehr oder minder intensiv gefärbte Chromatophoren eingelagert *(Nemalion, Helminthocladia, Batrachospermum)*, in anderen Fällen aber ist das Protoplasma des Carpogo-

[1] Besonders bemerkenswerth wegen ihrer Ähnlichkeit mit den »Procarpien« der Collemaceen erscheinen diese Äste nach der Beschreibung von Arcangeli (Nuov. Giorn. bot. Ital. XIV. (1882) p. 160 ff. tav. 5. fig. 1—8) bei *Batrachospermum Julianum* Arcangeli, bei welcher Species die weibliche Zelle die Spitze eines kurzgliedrigen, schraubig gekrümmten Astes einnimmt.

[2] Die Terminologie der Fructificationsorgane der Florideen ist zur Zeit ziemlich schwankend. Die Ausdrücke »Carpogon«, »Procarp«, »carpogene Zellen«, »Trichogyn«, »Trichophor«, »Befruchtungsschlauch« u. s. w. werden von verschiedenen Autoren in ziemlich verschiedener Weise verwendet. Ich sah mich deshalb gezwungen, diese Terminologie, die ohnedies für die neugewonnenen Anschauungen vielfach nicht passte, für die vorliegende Darstellung ganz selbständig, doch möglichst unter Benutzung der bisherigen Bezeichnungen, zu ordnen.

niums vollständig hyalin. Das Trichogyn, in welches dieser Bauchtheil des Carpogoniums mittelst einer kurzen halsartigen Verengerung sich fortsetzt, ist erfüllt von farblosem Protoplasma, das, in der Spitze selbst meist vakuolenfrei, im übrigen von mehr oder minder zahlreichen Vakuolen durchsetzt ist und ausserdem einzelne, grössere oder kleinere glänzende Körnchen, die sich Färbungsmitteln gegenüber analog wie die Chromatinkörnchen der Zellkerne verhalten, in wechselnder Anzahl und Vertheilung umschliesst (Fig. 8).

Zu dieser Zeit zeigen die Zellen des Carpogonastes (d. i. desjenigen Astes, dessen Endzelle zum Carpogonium sich gestaltet) bei den verschiedenen Gattungen und Arten eine sehr verschiedenartige Ausbildung. In manchen Fällen mit mehr oder minder zahlreichen und kräftigen Seitenästchen besetzt *(Batrachospermum, Lemanea sp., Naccaria, Chondria* u. s. w.), sind sie in anderen Fällen unverzweigt. Zuweilen sind diese Zellen sämmtlich etwas vergrössert und mit mehr oder minder reichlichen Plasmamassen angefüllt; in anderen Fällen sind nur einzelne der Gliederzellen des Carpogonastes vergrössert und reichlich mit Inhalt erfüllt *(Calosiphonia);* namentlich häufig aber pflegt die oberste dieser Gliederzellen, die hypogyne Zelle, vor den übrigen Zellen durch stärkere Ausbildung sich auszuzeichnen *(Gloeosiphonia* (Fig. 8—10), *Scinaia* u. a.).

Diese befruchtungsreifen Carpogonien pflegen nun in der Mehrzahl der Fälle die Spitze ihres Trichogyns aus der Thallus-Oberfläche heraus und in das umgebende Wasser hineinzustrecken. In einzelnen Fällen aber bleibt die Trichogynspitze im Inneren des Thallus verborgen resp. innerhalb der Gallerthülle desselben eingeschlossen *(Batrachospermum).* In beiden Fällen jedoch gelangen die isolirten Spermatien (durch selbständige Bewegung?) an die Trichogynspitze hin und setzen sich hier fest, indem sie sich zugleich (wohl kaum schon vorher) mit Membran umgeben. Darauf wird dann an der Anheftungsstelle die Membran des Spermatiums und der Trichogynspitze resorbirt, und durch diese Öffnung treten nun die beiden Inhaltsmassen in offene Verbindung. So vereinigen sich die Plasmakörper des Carpogoniums und des Spermatiums zu einer einzelnen, zusammenhängenden Zelle, welche zunächst noch zwei differente Zellkerne einschliesst.

Im nächsten Entwickelungstadium ist dann der Zellkern des Spermatiums von seiner früheren Stelle verschwunden und nirgends mehr im Innern der Copulationszelle aufzufinden, im Bauchtheil des Carpogoniums aber liegt nach wie vor ein einzelner Zellkern. Eine Verschmelzung der beiden ursprünglichen Zellkerne zu diesem letzteren Zellkern konnte nun zwar bisher noch nirgends direct nachgewiesen werden. Gleichwohl aber darf wohl nach Analogie anderer Fälle mit grösster

Wahrscheinlichkeit angenommen werden, dass der Zellkern des Spermatiums durch das Trichogyn hindurch in den Bauchtheil des Carpogoniums hinüberwandert und hier mit dem Zellkern des Carpogoniums verschmilzt.

Dann verdickt sich im Trichogynhals die Zellwand und verengt mehr und mehr die mittlere Öffnung, bis diese endlich in der Mitte vollständig geschlossen ist (Fig. 1, 2—4, 6—7, 10, 16, 23, 35). Dadurch wird mittelst eines mehr oder minder dicken Membranpfropfes die Verbindung zwischen dem Bauchtheil des Carpogoniums und dem Trichogyn nebst Spermatium unterbrochen, die ganze Copulationszelle in zwei selbständige Zellen getheilt.

Diese beiden Theilzellen aber sind durchaus ungleichwerthig, indem nur die untere Zelle einen Zellkern besitzt und nun eine lebhafte Weiterentwickelung beginnt, die obere dagegen eines geformten Zellkerns vollständig entbehrt und fortan bis zu ihrem früheren oder späteren Untergange unthätig verharrt. Die erstere stellt die befruchtete weibliche Zelle, die befruchtete Eizelle, dar, die letztere dagegen bildet einen unbrauchbaren Theil des Copulations-Productes der beiden Sexualzellen, der nun abgegliedert und zur Seite geworfen wird, während die befruchtete Eizelle zu weiterer Ausbildung sich anschickt.

Im Inneren der abgegliederten Trichogynzelle finden sich vielfach in wechselnder Menge und Gestalt kleinere oder grössere Körnchen, welche gegen Färbungsmittel den Chromatinkörpern der Zellkerne analog sich verhalten, jedoch niemals geformten Zellkernen angehören (Fig. 1). Ich habe nicht feststellen können, ob diese Körnchen, die schon am befruchtungsreifen Carpogonium innerhalb des Trichogyns vorhanden sind, von dem Zellkern des Carpogoniums abgesondert werden, doch liegt die Vermuthung nahe, dass dieselben in der That von den Chromatinkörpern dieses Zellkerns abstammen. Die beschriebenen Vorgänge der Befruchtung würden dann dahin zu deuten sein, dass an der weiblichen Zelle, dem Carpogonium, die Abtrennung des Richtungskörpers (d. i. eines Stückes Protoplasma mit den abgesonderten unbrauchbaren Stücken des Zellkerns) unterbleibt bis nach der Vereinigung der männlichen Zelle mit der weiblichen Zelle und der Verschmelzung des männlichen Zellkerns mit dem Zellkern der weiblichen Zelle. Ich trage kein Bedenken[1], die beschriebenen Vorgänge in der That in solcher Weise zu deuten[2].

---

[1] In der Mehrzahl der Fälle wird allerdings auch bei den Pflanzen (wie bei den Thieren) der Richtungskörper schon vor der Befruchtung von der weiblichen Zelle abgetrennt (vergl. Strasburger, Befruchtung und Zelltheilung. S. 79—80), wie z. B. unter den Algen bei *Oedogonium*, *Coleochaete* und *Vaucheria* (bei letzterer Alge enthält der Richtungskörper zahlreiche kleine Kernfragmente, die von den zahlreichen

Zellen der Centralachse oder des Hüllgewebes derselben durch Tüpfelbildung in nähere Verbindung, offenbar zu leichterer Vermittlung der Ernährung. Dies geht nun noch weiter bei einer Reihe anderer Formen, die sich hier zunächst anreihen (*Dudresnaya, Polyides, Dumontia, Calosiphonia, Gloeosiphonia*[1], — *Petrocelis, Cruoriopsis* und andere Squamarieen).

Aus der befruchteten Eizelle sprossen hier ein oder mehrere Ooblastemfäden hervor, die entweder sofort in dem umgebenden Thallusgewebe sich ausbreiten (*Dumontia, Gloeosiphonia* (Fig. 10), *Calosiphonia* (Fig. 23)) oder zunächst mit benachbarten Auxiliarzellen (meist Zellen des Carpogonastes selbst) durch Tüpfelbildung in Verbindung treten und dann erst weiterwachsen (*Petrocelis Ruprechti* Hauck) oder endlich mit diesen Auxiliarzellen eine Copulation eingehen, worauf dann erst aus der Copulationszelle die Ooblastemfäden in Einzahl oder Mehrzahl hervorsprossen *(Dudresnaya* (Fig. 17), *Polyides)*. In allen Fällen aber kriechen darauf die Ooblastemfäden, reichlich sich verzweigend, als dünne, langgliedrige Zellfäden im Inneren des Thallusgewebes umher.

Bei diesem Umherkriechen wachsen die Spitzen dieser Zellfäden deutlich auf gewisse, inhaltreiche Zellen zu, die in mehr oder minder grosser Anzahl in der Nähe der Carpogonäste innerhalb des Thalluszweiges ausgebildet werden. Bisweilen sind diese Zellen einfach Gliederzellen der gewöhnlichen sterilen Äste der Thallusfäden, kaum durch Grösse etwas von den übrigen Fadenzellen unterschieden *(Calosiphonia)*; in anderen Fällen sind diese Zellen durch besondere Grösse leicht zu erkennen *(Petrocelis, Polyides)*; in anderen Fällen endlich werden sie an eigenthümlich gestalteten Thallusfäden ausgebildet und sind dadurch leicht innerhalb des sterilen Gewebes aufzufinden *(Dudresnaya* (Fig. 18, 20), *Dumontia)*. Auf diese Zellen, die ihres weiteren Verhaltens wegen hier ebenfalls Auxiliarzellen zu nennen sind, wachsen die Ooblastemfäden zu und treten mit denselben in Verbindung.

Zuweilen (*Petrocelis Ruprechti* Hauck) wächst die Spitze des Ooblastemfadens direct auf die Auxiliarzelle zu und lehnt sich dieser fest an. Unter Resorption der trennenden Membranen geht dann die Spitzenzelle selbst mit der Auxiliarzelle eine Copulation ein. — In der Mehrzahl der Fälle aber wächst die Spitze des Ooblastemfadens nahe

[1] Ähnliche Vorgänge wie bei den oben genannten Gattungen hat Berthold auch bei anderen Cryptonemiaceen (Arten von *Halymenia, Nemastoma* und *Grateloupia*) beobachtet (vgl. Falkenberg in Schenk, Handbuch der Botanik. II. S. 184), doch bisher noch keine genaueren Mittheilungen darüber veröffentlicht. Ich selbst ward durch Berthold auf das Vorkommen derartiger Vorgänge bei *Calosiphonia* aufmerksam gemacht.

neben der Auxiliarzelle vorbei, nicht selten derselben dicht angeschmiegt (Fig. 18), und trennt sich dann als fortwachsende Endzelle ab (Fig. 20). Die neugebildete Gliederzelle aber, die nun der Auxiliarzelle mehr oder minder dicht anliegt, tritt unter Ausbildung eines kürzeren oder längeren Copulationsfortsatzes mit dieser in offene Verbindung. — In beiden Fällen vereinigen sich nach Resorption der trennenden Membranen die Plasmakörper der Auxiliarzelle und der Ooblastemzelle zu einem einheitlichen Zellkörper.

Die weitere Entwickelung dieser Copulationszelle aber ist in den verschiedenen Einzelfällen eine sehr verschiedene. In manchen Fällen *(Polyides, Petrocelis, Dudresnaya)* beschränkt sich die Verschmelzung der beiden copulirenden Zellen auf eine Vereinigung der beiden Plasmakörper zu einem einzelnen Zellkörper, während die Zellkerne der beiden copulirenden Zellen gesondert bleiben und nach wie vor innerhalb der beiden Hälften der Copulationszelle zu finden sind. In diesen Fällen sprosst dann aus derjenigen Hälfte der Copulationszelle, welche der Ooblastemzelle entspricht, seitlich ein Fortsatz hervor, dessen Spitze als selbständige Zelle abgegliedert wird (Fig. 19) und nun, weiter wachsend, einem einzelnen Sporencomplex den Ursprung giebt[1]. — In anderen Fällen *(Calosiphonia)* wächst dagegen aus derjenigen Hälfte der Fusionszelle, welche der Auxiliarzelle entspricht, (wahrscheinlich nach erfolgtem Übertritt des Zellkerns der Ooblastemzelle und der Verschmelzung beider Zellkerne) jener Fortsatz hervor, der zur Bildung des Sporencomplexes hinführt. — In anderen Fällen endlich *(Gloeosiphonia)* verschmelzen die beiden copulirenden Zellen vollständig, aus der Ooblastemzelle tritt nach und nach das gesammte Plasma sammt dem Zellkern bis auf die zurückbleibende äussere Hautschicht in die Auxiliarzelle hinüber (Fig. 11—12). Darauf grenzt sich die Auxiliarzelle als selbständige Zelle gegen die entleerte Ooblastemzelle ab und sprosst nun ihrerseits seitlich aus (Fig. 13). Diese Aussprossung aber wird als selbständige Zelle abgegliedert (Fig. 14) und giebt nun als Centralzelle einem einzelnen Sporencomplex den Ursprung (Fig. 15).

So erzeugt also im ersteren Falle die einzelne Gliederzelle des Ooblastemfadens (nach vorausgehender Copulation mit einer Auxiliarzelle) eine seitliche Astzelle, die zur Sporenbildung hinführt, ebenso wie bei

[1] Bei *Dudresnaya coccinea* Crouan wächst die Endzelle dieses Fortsatzes nicht (wie bei *Dud. purpurifera* J. Ag.) zu einem Sporencomplexe aus, sondern entwickelt sich zu einem langgliedrigen Zellfaden, der als Seitenast des Ooblastemfadens im umgebenden Gewebe sich ausbreitet. Neben diesem Fortsatze der früheren Ooblastemzelle aber treten noch (ein oder) zwei kurze Fortsätze aus derselben Zelle hervor (Fig. 21), welche sich der früheren Auxiliarzelle seitlich anlegen, dieselbe umwachsend zusammenschliessen und nun einen einzelnen, zuweilen undeutlich zweilappigen Sporencomplex erzeugen.

den zuvor besprochenen Gelidieen: nur dass diese Zelle hier nicht einer einzelnen Spore den Ursprung giebt, sondern (eben infolge jener Copulation mit der Auxiliarzelle) einem ganzen Complex von Sporen, der hier als Einzelfrucht, als einzelnes Cystocarp, individualisirt erscheint. Es wird hier die Ooblastemzelle durch die Copulation mit der Auxiliarzelle offenbar gekräftigt und zur Production zahlreicherer Sporenmutterzellen befähigt *(Polyides, Dudresnaya)*. — In dem letzteren Falle aber geht diese Zuhülfenahme der Auxiliarzelle in eine vollständige Verschmelzung und Vereinigung der Ooblastemzelle mit der Auxiliarzelle über, worauf dann die entstandene Copulationszelle in gleicher Weise sich weiter entwickelt, wie im ersteren Falle die von der Auxiliarzelle unterstützte Ooblastemzelle.

In beiden Fällen nämlich wird entweder eine seitliche Aussprossung als selbständige Zelle abgegliedert und beginnt nun ein sehr lebhaftes Wachsthum, oder seltener geht dieses lebhafte neue Wachsthum von jener Copulationszelle resp. der Ooblastemzelle selbst aus. Mehr oder minder zahlreiche Randzellen werden von dieser auswachsenden Zelle als der Centralzelle des Cystocarps abgetrennt und wachsen zu kurzgliederigen, reich verzweigten Zellfäden heran. Dadurch entsteht ein mehr oder minder reichlich ausgebildetes Fadenbüschel, dessen Fäden bald einzeln frei bleiben *(Peyssonelia, Cruoriopsis*[1]*)*, bald durch eine gemeinsame dichte und zähe Gallerthülle zu einem geschlossenen Zellkörper zusammengehalten werden *(Cruoria, Polyides, Dudresnaya, Dumontia, Gloeosiphonia, Calosiphonia)*. Die einzelnen Abschnitte dieses Fadenbüschels reifen bald gleichzeitig, bald ungleichzeitig heran; sämmtliche Fäden dieser Abschnitte aber bilden ihre oberen Zellen oder sogar fast sämmtliche einzelnen Zellen zu Sporen aus, die im letzteren Falle unmittelbar die Centralzelle, die allein steril bleibt,

[1] Für *Cruoriopsis* hatte ich früher (Sitzungsb. d. niederrh. Ges. für Nat. u. Heilkunde zu Bonn 1879. S. 377. Sitz. am 4. August) angegeben, dass nach der Copulation des »Befruchtungsschlauches« mit einer Zelle eines tricliogynlosen »Procarps« die übrigen Zellen des letzteren direct zu Sporen werden. Ich muss jetzt diese Angabe dahin berichtigen, dass nach der Copulaiton der Ooblastemzelle mit einer Auxiliarzelle (jener Zelle des trichogynlosen »Procarps«) die erstere Zelle als Centralzelle des Cystocarps aussprosst und ein oder zwei kurze, ein- bis dreizellige Seitenäste hervortreten lässt. Diese Seitenäste richten sich den aufrechten Thallusfäden parallel, so zwar, dass von zwei Seitenästen regelmässig einer aufwärts, der andere abwärts wächst. Beide zusammen gewähren dann durchaus den Anschein eines trichogynlosen »Procarps«, mit dessen mittlerer Zelle der »Befruchtungsschlauch« copulirt hat, so wie ich früher die beobachteten Thatsachen deutete.

Nachdem ich durch die vergleichende Untersuchung zahlreicher Einzelformen den Schlüssel für die Vorgänge bei der Fruchtbildung der Florideen gefunden hatte, ward es verhältnissmässig leicht, die Entwickelung von *Cruoriopsis*, deren vollständige Aufklärung im Einzelnen mir seiner Zeit sehr viel Schwierigkeiten gemacht hatte, genauer zu ergründen und in der genannten Weise festzustellen.

umhüllen *(Dumontia)*, im ersteren Falle dagegen von dieser Centralzelle durch eine mehr oder minder reichliche Masse steriler Zellen, die sogenannte Placenta der Systematik, getrennt werden *(Gloeosiphonia, Dudresnaya)*.

So führt also hier die Copulation einer Ooblastemzelle mit einer Auxiliarzelle schliesslich zur Ausbildung eines Complexes von Sporen, der als selbständig individualisirter Zellkörper, bald von dem umgebenden Thallusgewebe aus mit einer besonderen Hülle umgeben, bald ohne eine solche Hülle, im Thallusgewebe eingeschlossen ist. Ein solcher Zellkörper zeigt ganz den Habitus einer einzelnen selbständigen Sporenfrucht und wird dementsprechend auch als einzelnes selbständiges Cystocarp betrachtet. Doch ist dem Gesagten zufolge die Entstehung eines solchen Cystocarps eine ganz andere als bei dem einzelnen Cystocarp der Helminthocladieen und Gelidieen. Bei diesen wächst die befruchtete Eizelle zu einer einzelnen Sporenfrucht (Cystocarp) aus wie bei den Moosen, im vorliegenden Falle aber wächst die Eizelle zu einem verzweigten Sprosssystem heran, das an seinen Zweigen zahlreiche einzelne Cystocarpe entwickelt, analog den zahlreichen Sporenfrüchten der verzweigten Farnpflanze.

Diese einzelnen Cystocarpe rücken bei den Squamarieen vielfach so nahe zusammen, dass sie kaum als selbständige Fruchtkörper gegen einander abgegrenzt werden können. So liegen bei *Cruoriopsis cruciata* Duf. zahlreiche Cystocarpien in Gestalt kurzer Sporenketten, die meist in der Mitte durch die sterile Centralzelle unterbrochen sind, nahe neben einander zwischen den aufrechten parallelen Thallusfäden. — Bei *Peyssonelia* bilden die einzelnen, einander genäherten Cystocarpe verzweigte Fadenbüschel, deren Äste zwischen die aufrechten parallelen Fäden der Nemathecien sich einordnen und zu einzelnen Sporenketten sich ausbilden, sodass auch hier bei beginnender Sporenreife zahlreiche, anscheinend isolirte Sporenketten nahe neben einander zwischen den aufrechten sterilen Fäden eingelagert sind. Diese Sporenketten erscheinen infolgedessen als die eigentlichen, selbständig individualisirten Fruchtkörper ebenso wie bei *Cruoriopsis;* und dementsprechend hat man dieselben auch ebenso wie bei *Cruoriopsis* als die eigentlichen Cystocarpien angesprochen und unter dem Namen der Cystidien als eine besondere Form von Cystocarpien unterschieden.

4. Corallineen.

Bei den Squamarieen stehen ferner vielfach *(Petrocelis, Cruoriopsis)* parallele Thallusfäden mit Carpogonästen und Auxiliarzellen in grösserer Anzahl nahe neben einander. Dies ist in noch weit reicherem Maasse

der Fall bei den Corallineen, die sich ja auch in anderer Beziehung den Squamarieen enge anschliessen.

Bei diesen Corallineen beginnt die Anlage der Frucht mit der Ausbildung einer geschlossenen Schicht gleich langer, paralleler Thallusfäden. Die vorletzte Zelle aller dieser Fäden schwillt stärker an und entwickelt meist (in charakteristischer Weise) ein oder mehrere einzellige Seitenästchen, die sich neben die Endzelle stellen. Ausserdem aber entwickeln sich bei einer mehr oder minder grossen Anzahl dieser parallelen Zellfäden an jener vorletzten Zelle zweizellige Seitenästchen, deren Endzelle zum Carpogonium sich ausbildet und ein langes Trichogyn hervorstreckt. Die vorletzten Zellen aller jener parallelen Zellfäden aber werden zu Auxiliarzellen.

Von den zahlreichen Carpogonästen, die in dieser Weise nahe neben einander angelegt werden, gelangt nun (was in gleicher Weise auch unter den Squamarieen, z. B. bei *Petrocelis Ruprechti* Hauck, zu beobachten ist) nur eine geringe Anzahl zur vollständigen Ausbildung und Befruchtungsreife, die Mehrzahl dagegen abortirt. Infolge der Befruchtung eines vollständig ausgebildeten Carpogoniums aber geht (so glaube ich wenigstens nach Analogie der übrigen Florideen annehmen zu dürfen[1]) die befruchtete Eizelle mit der nächsten Auxiliarzelle eine Copulation ein; die so gebildete Copulationszelle treibt dann mehrere Fortsätze, die sofort mit den nächst benachbarten Auxiliarzellen copuliren; und dieser Copulationsvorgang setzt sich dann seitwärts auf die folgenden Auxiliarzellen weiter fort, bis eine ziemlich ausgedehnte Schicht von Auxiliarzellen zu einer einzelnen grossen scheibenförmigen Copulationszelle verschmolzen ist. Am Rande dieser Scheibe treten dann mehrere Aussprossungen hervor, die durch eine Querwand abgegliedert werden und ebenso vielen einzelnen Sporencomplexen den Ursprung geben.

Im Einzelnen zeigt dieser Vorgang bei den verschiedenen Formen der Corallineen mancherlei eigenthümliche Abänderungen, im Allgemeinen aber läuft derselbe überall darauf hinaus, dass die Ooblastemfäden der befruchteten Eizelle nach einander mit mehreren, nahe bei einander gelegenen Auxiliarzellen in Copulation treten, bis erst nach

---

[1] Direct habe ich diesen Punkt in der Entwickelung der Corallineen-Früchte, die durch die geringe Grösse ihrer Zellen die genauere Untersuchung bekanntlich ausserordentlich erschweren, bisher noch nicht festzustellen vermocht.

Übrigens stellen sich nicht nur bei den Corallineen, sondern auch bei zahlreichen anderen Florideen mit kleinzelligem, fest geschlossenem Zellgewebe der genaueren Feststellung des Schicksals der befruchteten Eizelle ganz besondere Schwierigkeiten entgegen, welche diese Untersuchungen äusserst mühsam und zeitraubend machen und eine sichere Entscheidung sehr erschweren. Dadurch erklären sich auch die zahlreichen abweichenden Angaben der bisherigen Litteratur, die gerade über diesen Punkt wesentlich von der vorliegenden Darstellung differiren.

der letzten Copulation eine Aussprossung der Copulationszelle angelegt wird, die einen Complex von Sporen (hier gewöhnlich eine einzelne Kette von Sporen) ausbildet. Die nahe Vereinigung der sämmtlichen Thallusfäden, welche Auxiliarzellen und Carpogonäste tragen, aber hat zur Folge, dass die sämmtlichen Sporencomplexe, die infolge jener wiederholten Copulationen entstehen, nahe bei einander angelegt werden und eine zusammenhängende Gruppe bilden, welche sich als einheitliches Ganzes am Thallus abhebt und deshalb auch als ein einzelnes Cystocarp angesprochen wird. Seiner Entwickelung nach aber ist dieses einzelne Cystocarp wesentlich different von dem einzelnen Cystocarp der Helminthocladieen und Gelidieen und schliesst sich vielmehr zunächst der Gruppe isolirter Cystocarpe an, die bei den Cryptonemieen und Squamarieen aus den Ooblastemfäden eines einzelnen befruchteten Carpogoniums hervorgehen.

5. Ceramieen, Rhodomeleen, Sphaerococceen, Rhodymenieen und Gigartineen.

Unter den zuvor besprochenen Cryptonemieen zeigt *Gloeosiphonia* die Eigenthümlichkeit, dass ein einzelner kurzer Fadenast des Thallusgewebes seine vorletzte Zelle zur Auxiliarzelle ausbildet, während die unterste Gliederzelle dieses Astes seitlich einen kurzen dreizelligen Carpogonast ausbildet. Carpogonium und Auxiliarzelle werden somit hier paarweise und nahe bei einander angelegt[1], so dass es für die Ooblastemfäden des befruchteten Carpogoniums das einfachste ist, direct die zugehörige Auxiliarzelle aufzusuchen, um mit dieser sich zu verbinden. In der That pflegt denn auch bei *Gloeosiphonia* der einzige, wenig verzweigte Ooblastemfaden direct auf die zugehörige Auxiliarzelle hinzuwachsen und mit dieser zu copuliren, falls ihm nicht der Ooblastemfaden eines benachbarten, früher befruchteten Carpogoniums bereits zuvorgekommen ist.

Ein solches Verhalten aber muss natürlich noch sehr viel mehr erleichtert werden, wenn die Auxiliarzelle dem Carpogonium noch mehr genähert oder unmittelbar benachbart ist. Der Ooblastemfaden kann dann zu sehr geringer Länge reducirt werden oder ganz ausfallen, da die befruchtete Eizelle direct mit der anstossenden Auxiliarzelle in Verbindung zu treten vermag.

Dies ist nun thatsächlich der Fall bei einer sehr grossen Anzahl von Florideen, ja ich glaube behaupten zu dürfen, dass bei der Mehr-

[1] Solche Gruppen von Carpogonästen und Auxiliarzellen, die als selbständiges Ganzes am Thallus der Mutterpflanze sich abheben, seien im Folgenden als Fruchtanlagen oder Procarpe bezeichnet.

zahl aller Florideen (den artenreichen Familien der Ceramieen, Wrangelieen und Rhodomeleen, der Chylocladieen, Rhodymenieen und Sphaerococceen, endlich der Gigartineen) in dieser Weise die weitere Entwickelung der befruchteten Eizelle sich vollzieht.

Ein kurzer, vielfach drei- oder vierzelliger Carpogonast ist seitlich an einem Thallusfaden befestigt und ist dabei in solcher Weise gekrümmt, dass die Carpogoniumzelle der nahe benachbarten Auxiliarzelle unmittelbar anliegt oder dieselbe doch mittelst einer kurzen seitlichen Aussackung bequem zu erreichen vermag. Nicht selten auch wird die unmittelbare Berührung dieser beiden Zellen dadurch herbeigeführt, dass die Auxiliarzelle selbst eine seitliche Ausstülpung, einen Copulationsfortsatz, der Carpogoniumzelle entgegenstreckt und sich dieser dicht anlegt (Fig. 31, 35, 38). Im Übrigen aber kann die Stellung des Carpogonastes und der Auxiliarzelle im Thallusgewebe eine sehr wechselnde sein.

1. Am leichtesten zu beobachten sind diese Organe bei vielen Ceramieen und Wrangelieen.

So trägt z. B. bei *Pterothamnion Plumula* Näg. (Fig. 35) einer der begrenzten Seitenäste des Thallus an seiner Basalzelle seitlich inserirt einen vierzelligen kurzgliederigen Carpogonast, der sich mit seiner Spitze nach der Oberseite des Astes hinkrümmt, während auf der gegenüberliegenden Seite jener Basalzelle ein einzelliger Ast zur Auxiliarzelle sich ausbildet, die mit ihrer Spitze ebenfalls nach der Oberseite des ganzen Thallusastes sich krümmt und dadurch in unmittelbare Berührung mit der Carpogoniumzelle gelangt. In anderen Fällen trägt ein kürzerer oder längerer begrenzter Zellfaden nahe der Spitze an einer Gliederzelle einen kurzen (meist drei- oder vierzelligen) Carpogonast, während aus derselben Gliederzelle noch mehrere, ein- oder mehrzellige Seitenästchen hervortreten (Fig. 34). Bisweilen wird nun diese Gliederzelle selbst zur Auxiliarzelle (*Lejolisia mediterranea* Bornet nach Bornet); in anderen Fällen bildet eines der einzelligen Seitenästchen, die neben dem Carpogonaste aus der Gliederzelle hervortreten, seine Zelle zur Auxiliarzelle aus (*Ptilothamnion Pluma* Thur. und *Spondylothamnion multifidum* Näg. nach Bornet), oder beiderseits neben dem Carpogonaste entsteht aus dem einzelligen Seitenästchen eine Auxiliarzelle (*Spermothamnion*, einzelne Arten von *Callithamnion* (Fig. 34)). Bei zahlreichen Arten von *Callithamnion* ist der Zellfaden, der an einer Gliederzelle den Carpogonast und die beiden Auxiliarzellen trägt, nicht begrenzt, sondern wächst an der Spitze mehr oder minder lange Zeit unverändert weiter fort (*C. corymbosum* Lyngb. u. a.). Bei *Griffithsia* trägt die vorletzte Gliederzelle eines begrenzten, kleinzelligen Fadenastes seitlich zwei kurze zweizellige Ästchen, deren unter Zelle seitliche

einen vierzelligen Carpogonast entwickelt und dann selbst zur Auxiliarzelle sich ausbildet. Bei *Ceramium* dagegen entwickelt die Gliederzelle eines unbegrenzten Astes seitlich einen zweizelligen Ast, dessen untere Zelle zur ziemlich grossen Auxiliarzelle wird, aber seitlich nicht nur einen, sondern zwei vierzellige Carpogonäste ausbildet.

2. Complicirter und schwieriger erkennbar wird die Anordnung dieser Theile an den vielzelligen Sprossen der Rhodomeleen.

Bei *Polysiphonia* entwickelt bekanntlich die einzelne Gliederzelle zunächst einen Wirtel von Astzellen, die, seitlich dicht und fest zusammenschliessend, die centrale Zelle mit einer geschlossenen Rinde umgeben, welche unter fortgesetzter Theilung und Verzweigung ihrer Zellen sich je nach der Species mehr oder weniger verdickt. Die Carpogonien werden nun hier gewöhnlich an besonderen begrenzten Seitensprossen angelegt. An einer der oberen Gliederzellen eines solchen Sprosses wächst eine der »Randzellen« und zwar die zuletzt gebildete, unpaare Randzelle zum vier- oder fünfzelligen Carpogonaste aus. Ihre unterste Zelle wird zur Auxiliarzelle, die kleinzellige Spitze des Astes aber krümmt sich nach aufwärts so, dass die Carpogoniumzelle mit der unteren Ecke die Auxiliarzelle berührt (Fig. 36, 28); aus der Auxiliarzelle selbst aber sprosst in den einfachsten Fällen nach abwärts noch ein einzelliges steriles Seitenästchen hervor. Gleichzeitig haben die übrigen »Randzellen« jener Gliederzelle sich wiederholt getheilt und verzweigt und so einen kleinen Zellkörper hergestellt, der den Carpogonast sammt der Auxiliarzelle einschliesst und, da er als Ganzes sich deutlich am Thallus abhebt, zweckmässiger Weise als Procarp bezeichnet wird.

Bei anderen Arten von *Polysiphonia* und anderen Gattungen der Rhodomeleen erscheint dieses Procarp noch complicirter dadurch, dass aus der Auxiliarzelle neben dem endständigen Carpogonaste noch ein oder zwei Seitenästchen hervortreten, die sich zuweilen reichlicher verzweigen und einem vielzelligen Zellcomplex den Ursprung geben, der an den befruchtungsreifen Procarpen die Auxiliarzelle verdeckt und leicht (wie bisher allgemein geschehen ist) als »Gruppe carpogener Zellen« gedeutet werden kann (*Chondria tenuissima* Ag.). — Vielleicht mag auch bei einzelnen dieser Formen eine Mehrzahl von Auxiliarzellen in dem einzelnen Procarpe angelegt werden, doch habe ich bisher noch nirgends einen solchen Fall sicher zu constatiren vermocht.

3. Unter den Chylocladieen werden bei *Chylocladia kalifornis* Hook. die Carpogonäste gewöhnlich schon sehr frühzeitig, nahe der fortwachsenden Spitze, angelegt (Fig. 29). An einer der grossen Zellen, welche die Wand der röhrenförmigen Thallusglieder bilden, wird auf der Aussenseite ein vierzelliger Ast entwickelt, der in charakteristischer

Weise sich krümmt und seine Endzelle zum Carpogonium ausbildet (Fig. 30, 33). Über diese Carpogoniumzelle aber krümmen sich nun von beiden Seiten (seltener von einer Seite (Fig. 31)) hrer grössere Deckzellen, die von den beiden angrenzenden Zellen der Thalluswand abgeschnitten wurden, in solcher Weise herüber, dass sie mit dem vorgestreckten Rande, dem Copulationsfortsatze (Fig. 32), dem Carpogonium anliegen. Diese beiden Zellen stellen die Auxiliarzellen dar, von denen jedoch regelmässig nur eine einzige nach der Befruchtung des Carpogoniums zur Weiterentwickelung gelangt.

4. Als durchsichtigstes Beispiel für den Bau der weiblichen Sexualorgane bei Sphaerococceen sei hier die Gattung *Nitophyllum* angeführt. Bei den Arten dieser Gattung (z. B. *N. venulosum* Zan.) geht die Bildung der Sexualorgane von einer einzelnen Zelle des zunächst stets einschichtigen Thallus aus. Diese schneidet nach der Unterseite des flächenförmigen Thallus mehrere Astzellen ab, die sich in wechselnder Weise weiter verzweigen; nach oben aber bildet dieselbe regelmässig zwei Astzellen, von denen die eine einen kurzen, sterilen, mehrzelligen Ast entwickelt, die andere dagegen neben einer endständigen, bisweilen noch einmal getheilten Zelle einen drei- oder vierzelligen, kleinzelligen Ast ausbildet, dessen Endzelle zum Carpogonium wird. Dieser Ast krümmt sich von seiner Insertionsstelle aus in solcher Weise längs der Tragzelle hin, dass seine Endzelle noch dem entgegengesetzten Ende der Tragzelle anliegt, und streckt dann aus der Spitze dieser Endzelle das kurze Trichogyn durch einen Spalt zwischen den benachbarten Zellen nach aussen hervor. Diese Tragzelle aber wird zur Auxiliarzelle.

5. Unter den Rhodymenieen wird z. B. bei *Plocamium coccineum* Lyngb. an einer der grösseren Zellen innerhalb der local anschwellenden kleinzelligen äusseren Rindenschicht (Fig. 37) nachträglich ein kurzer dreizelliger Seitenast angelegt, dessen Endzelle zum Carpogonium wird. Dieser kurze Ast krümmt sich längs der gleichzeitig anschwellenden Tragzelle und streckt dann aus der Spitze der Endzelle durch das auflagernde Zellgewebe hindurch das Trichogyn nach aussen hervor. Jene Mutterzelle des Carpogonastes aber entwickelt an ihrem oberen Ende eine seitliche Ausstülpung, einen Copulationsfortsatz, bis zur Berührung mit der Carpogoniumzelle und bildet sich ihrerseits zur Auxiliarzelle aus (Fig. 38).

6. Von Gigartineen endlich zeigen *Gigartina Teedii* Lmx. und *Chondrus crispus* Stackh. übereinstimmend innerhalb der kleinzelligen äussersten Rindenschicht des Thallus an einzelnen Zellen der vegetativen Zellfäden kleine dreizellige secundäre Seitenästchen angelegt, die sich in charakteristischer Weise krümmen, sodass ihre Endzelle mit einer

Ecke noch der gleichzeitig stark heranwachsenden Tragzelle sehr nahe angrenzt. Diese Endzelle wird zum Carpogonium, dessen Trichogyn in wechselnder Weise an seiner Basis stark anschwillt[1], bevor es als dünner Haarfortsatz durch das kleinzellige Rindengewebe hindurch nach aussen sich vorstreckt: die Tragzelle des ganzen Carpogonastes aber wird zur Auxiliarzelle. —

Wie verschieden nun auch in allen diesen Einzelfällen die Anordnung der Carpogonien und Auxiliarzellen sein mag, so stimmen die betreffenden Formen doch sämmtlich in der Art und Weise der Weiterentwickelung dieser Organe nach erfolgter Befruchtung des Carpogoniums überein.

Zunächst grenzt sich allgemein der Bauchtheil des Carpogoniums als Eizelle ab. Im nächsten Entwickelungsstadium erscheint dann diese Eizelle bis auf geringe Reste des Plasmas entleert (nur selten z. B. bei *Callithamnion Plumula* Naeg. fand ich reichlichere Plasmamassen in der Eizelle erhalten), die dicht anliegende Auxiliarzelle aber erscheint nun sehr inhaltsreich und beginnt sofort ein neues lebhaftes Wachsthum.

Dass hierbei das Plasma (nebst Zellkern) der befruchteten Eizelle (oder wenigstens ein Theil dieses Plasmas nebst Zellkern) in die Auxiliarzelle hinüberwandert, kann wohl nicht zweifelhaft sein, da die Eizelle sich deutlich zu einem mehr oder minder grossen Theile entleert: allein die Art und Weise dieses Hinüberwanderns im Einzelnen habe ich bisher noch nicht genauer festzustellen vermocht.

Bei *Gloeosiphonia* findet zwischen der Ooblastemzelle und der Auxiliarzelle offene Copulation statt: nach dem Hinüberwandern des Plasmas der ersteren Zelle aber schliesst die letztere Zelle die Copulationsöffnung durch Neubildung eines Membranstückes vollständig ab, sodass nachträglich von der erfolgten Copulation kaum eine Spur zu erkennen ist (Fig. 12). Wenn nun in diesem Falle das Plasma der Ooblastemzelle sehr schnell in die Auxiliarzelle hinüberwanderte, so würde es durchaus vom Zufall abhängen, ob es einmal gelingt, die beiden Zellen während der Copulation zu fixiren und so diese selbst zur Anschauung zu bringen; bei dem langsameren Verlaufe aber, den thatsächlich dieser Vorgang zeigt, ist es nicht allzu schwierig, an fixirtem Material solche Copulationsstadien aufzufinden.

Bei den hier vorliegenden Formen glaube ich nun annehmen zu sollen, dass der Vorgang der Copulation ganz in derselben Weise wie bei *Gloeo-*

[1] Derartige Anschwellungen der Basis des Trichogyns oberhalb des Trichogynhalses sind übrigens auch bei anderen Florideen mit dicht geschlossenem Zellgewebe sehr vielfach verbreitet (vergl. Fig. 33 u. 38).

siphonia sich vollzieht, dass er jedoch wesentlich rascher als dort verläuft, sodass die directe Beobachtung der Copulationsstadien ganz dem Zufall anheimgegeben ist. Dieser Zufall aber ist mir bisher trotz allen Suchens bei den vorliegenden (auch sonst ziemlich schwierig zu untersuchenden) Formen noch nicht günstig gewesen. Doch möchte ich gleichwohl an dem Stattfinden einer wirklichen Copulation jener beiden Zellen bis jetzt noch nicht zweifeln.

Allerdings wäre ja auch ein Hinüberwandern des Plasmas (nebst Zellkern) der Eizelle in die Auxiliarzelle ohne vollständige Copulation beider Zellen (analog wie bei der Befruchtung der Phanerogamen[1], mancher Peronosporeen *(Phytophthora, Peronospora*[2]*)*, Erysipheen u. a.) durch die trennenden Membranen[3], resp. feine Poren (nicht Micellar-Interstitien) dieser Membranen hindurch sehr wohl möglich. Allein die Analogie der naheverwandten Florideen-Gattungen, die deutlich eine vollständige Copulation jener beiden Zellen aufweisen, erscheint mir doch bisher noch allzu schwerwiegend, um mich für diese letztere Annahme zu entscheiden, so lange nicht an einem leicht zugänglichen Objecte das Nichtstattfinden einer Copulation sicher nachgewiesen ist[4]. —

Nach diesem Hinüberwandern des Plasmas (resp. des Zellkerns) der befruchteten Eizelle in die Auxiliarzelle hinein beginnt diese letztere ein sehr lebhaftes neues Wachsthum, das zur Ausbildung eines Fruchtkörpers hinführt. Dieses Auswachsen aber erfolgt in den einzelnen genannten Gruppen in recht verschiedenartiger Weise, die den sehr verschiedenartigen Bau und Habitus der einzelnen Fruchtformen zur Folge hat[5].

---

[1] Strasburger, Befruchtung und Zelltheilung. S. 58; Bau u. Wachsthum der Zellhäute S. 247; Sitzungsb. d. niederrh. Ges. für Nat. u. Heilkunde zu Bonn. Sitz. am 4. Decbr. 1882.

[2] de Bary, Beiträge zur Morph. u. Phys. d. Pilze. 4. Reihe. S. 72—73.

[3] Vgl. auch Pringsheim's Beschreibung des Hindurchwanderns amöboider Plasmamassen durch die Membran des Antheridiumschlauches von *Achlya colorata* (Sitzungsb. d. Kgl. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1882. S. 870).

[4] Die Thatsache, dass ich selbst wiederholt längere Zeit hindurch mich vergebens bemüht habe, bei den ziemlich leicht zugänglichen Arten von *Callithamnion, Spermothamnion* und *Griffithsia* eine solche Copulation nachzuweisen, spricht allerdings sehr dafür, dass hier eine Copulation der beiden fraglichen Zellen in der That nicht stattfinde.

[5] Auf die weitere Ausbildung des Cystocarps der verschiedenen Florideen-Gattungen im Einzelnen näher einzugehen, würde hier viel zu weit führen. Doch bedarf eine dieser Fruchtformen noch einer besonderen Erwähnung, da für dieselbe eine parthenogenetische Entstehung behauptet worden ist.

Während nämlich bei der Mehrzahl der Arten von *Callithamnion* der Sporencomplex, zu welchem die einzelne Auxiliarzelle auswächst, ein dicht und fest zusammengeschlossenes Fadenbüschel, einen geschlossenen Zellkörper (Favelle), darstellt, bildet dieser Sporencomplex bei *Callithamnion versicolor* Draparnauld (nach Bornet [Etudes

Sehr verbreitet zeigt sich dabei die Erscheinung, dass die heranwachsende Auxiliarzelle zunächst eine ziemlich grosse Ausstülpung einseitig vorstreckt und darauf als selbständige Zelle abgrenzt. Aus dieser Zelle als Centralzelle des ganzen Fruchtkörpers sprossen dann zahlreiche Seitenäste hervor, die sich mehr oder minder reichlich verzweigen und schliesslich aus einzelnen oder zahlreichen Zellen ihres ganzen Verzweigungssystemes einzelne nackte Carposporen erzeugen. Die Mutterzelle dieser Centralzelle aber, die frühere Auxiliarzelle, bleibt bald ungetheilt, bald entwickelt sie nur wenige kurze Seitenäste, die sich seitlich ausbreiten und die heranreifende Sporenfrucht an dem Thalluszweige befestigen (*Callithamnion corymbosum* Lyngb. u. a.), bald verzweigt sie sich reichlicher und bildet aus ihren verzweigten Seitenästen in Verbindung mit dem angrenzenden Thallusgewebe eine sehr verschieden gestaltete Hülle um das heranwachsende Sporenbüschel her.

Zuweilen allerdings schlägt die Auxiliarzelle auch eine ganz abweichende Entwicklungsweise ein, wie z. B. bei *Chondria tenuissima* Ag.

---

phycologiques p. 70 Anm. 4] identisch mit *C. seirospermum* Harv. [= *Seirospora Griffithsiana* Harv.], *C. stipitatum* Naeg. und *C. hormocarpum* Holmes) ein locker verzweigtes Fadenbüschel, ganz ähnlich den Seirosporenbüscheln, die bei dieser Species durch Metamorphose der Zweigspitzen entstehen. Diese »seirosporenartigen Favellen« sollen nun nach Falkenberg (Meeresalgen des Golfes von Neapel [Mitth. der zool. Station zu Neapel I. S. 253 ff.]) durch parthenogenetisches Auswachsen der Auxiliarzellen entstehen, indem die Carpogonien frühzeitig abortiren oder überhaupt gar nicht ausgebildet werden, die zugehörigen Auxiliarzellen aber gleichwohl sich weiter entwickeln. Nach meinen Beobachtungen kann ich jedoch dieser Deutung der Thatsachen nicht zustimmen. Allerdings finden sich bei *C. versicolor* Drap. (ebenso wie bei manchen anderen Florideen) häufig abortirte Carpogonien, deren zugehörige Auxiliarzellen erhalten bleiben. Diese Auxiliarzellen aber wachsen nicht zu parthenogenetischen Sporenfrüchten aus, sondern werden einfach zu kleinen sterilen Thalluszellen in derselben Weise wie bei anderen *Callithamnion*-Arten; jene »seirosporenartigen Favellen« aber gehen aus Auxiliarzellen hervor, deren zugehöriger Carpogonast ein normales Carpogonium mit wohl ausgebildetem Trichogyn entwickelt. — Offenbar waren solche Carpogonien an den Exemplaren der Pflanzen, die Falkenberg untersucht hat, zufällig nicht mehr erhalten.

Übrigens führt Falkenberg a. a. O. die vorliegende Pflanze nicht als *C. versicolor* Drap. auf, sondern als *C. corymbosum* J. Ag. var.? *seirospermum*, und Berthold (Vertheilung der Algen im Golf von Neapel [Mitth. d. zool. Stat. III. S. 515]) hat dieselbe Pflanze jüngst geradezu mit *C. corymbosum* Lyngb. (J. Ag. Sp. Alg. III. 40) vereinigt. Von dieser letzteren, im Habitus allerdings sehr ähnlichen Art, der Seirosporen vollständig fehlen (die übrigens neben *C. versicolor* Drap. im Golf von Neapel ebenfalls vorkommt), unterscheidet sich jedoch *C. versicolor* Drap. nicht nur durch die Gestalt der Cystocarpe und der Antheridien (worauf schon Bornet a. a. O. aufmerksam macht), sondern auch durch den Bau der einzelnen Thalluszelle: bei *C. versicolor* Drap. sind die sterilen Thalluszellen stets einkernig, bei *C. corymbosum* Lyngb. dagegen (mit Ausnahme der jüngsten Zellen) stets mehrkernig (vgl. meine Angaben in den Sitzungsb. d. niederrh. Ges. für Nat. u. Heilkunde zu Bonn. Sitzung am 7. Juni 1880 S. 125. [S. 4 des Sep. Abdr.]).

Für andere Florideen ist bisher, so viel ich weiss, eine parthenogenetische, resp. apogamische Entstehung der Sporenfrüchte noch nirgends beschrieben worden.

Bei dieser Species nämlich trägt die Auxiliarzelle zur Zeit der Befruchtungsreife neben dem endständigen Carpogonaste zwei sehr reichlich verzweigte Seitenästchen, welche zu einem länglichen Zellcomplex, der den Carpogonast etwas zur Seite drängt, dicht und fest zusammenschliessen. Nach der Befruchtung nimmt dann die Auxiliarzelle an Grösse zu und entwickelt sich unter Copulation mit den nächst angrenzenden Zellen jenes Zellcomplexes zu einer grossen, verzweigten, vielkernigen Zelle, welche auf ihrer Aussenseite zahlreiche, zwei- bis dreizellige, sterile Zellfäden, die letzten Auszweigungen der Zellfäden jenes Zellcomplexes, angeheftet trägt. Dann sprossen am oberen freien Ende dieser Copulationszelle, das hier (so weit ich erkennen konnte) nicht als selbständige Centralzelle abgegliedert wird, successive mehrere Seitenäste hervor, die, sich reichlich verzweigend, ein kurzes gedrungenes Büschel sporenbildender Fäden herstellen. — Ich zweifle nicht, dass ähnliche Vorgänge auch noch bei anderen Rhodomeleen zu beobachten sein werden.

Einer besonderen Erwähnung bedürfen endlich noch die Gigartineen *(Gigartina, Chondrus)*. Bei diesen Formen nämlich gestaltet sich die einzelne Auxiliarzelle selbst zur Centralzelle der Sporenfrucht. Aus ihrer ganzen Oberfläche sprossen nach allen Seiten Zellfäden wie die Strahlen eines Sternes hervor und breiten sich, reichlich sich verzweigend, im umgebenden Thallusgewebe aus[1]. Bei *Gigartina* entwickeln diese verzweigten Fäden schliesslich aus den einzelnen Fadenzellen einzelne nackte Carposporen. Bei *Chondrus* dagegen gehen zahlreiche Zellen dieser Fäden mit einzelnen benachbarten Zellen des sterilen Thallusgewebes unter Bildung eines Tüpfels eine nähere Verbindung ein, und darauf entstehen aus einzelnen Zellen dieser Fäden durch wiederholte Theilung Complexe von je 4 Zellen, die ihrerseits je einer nackten Carpospore den Ursprung geben. — Es wiederholt sich somit hier innerhalb der so natürlichen Gruppe der Gigartineen dieselbe Erscheinung, die zuvor für den Formenkreis der Gelidieen und Cryptonemieen beschrieben ward, die Erscheinung nämlich, dass

---

[1] Somit erscheinen die Sprossungen der Auxiliarzelle in dem vorliegenden Formenkreise der Ceramieen, Rhodomeleen, Sphaerococceen, Rhodymenieen, Gigartineen und V. durchaus analog den Sprossungen der befruchteten Carpogoniumzelle, die im Vorstehenden als Ooblasteme bezeichnet worden sind. Es dürfte daher zweckmässig sein, dieselben als secundäre Ooblasteme oder Meta-Ooblasteme jenen primären Ooblastemen gegenüberzustellen.

Dies erscheint besonders dann angezeigt, wenn man, wie ich in der That für geboten erachte (vgl. unten S. 244 ff.), die Einwirkung der befruchteten Carpogoniumzelle (resp. bei *Gloeosiphonia* und anderen ähnlichen Arten der Ooblastemzelle) auf die Auxiliarzelle als einen zweiten Befruchtungsact ansieht, die befruchtete Auxiliarzelle also ebenfalls als eine befruchtete Eizelle deutet.

bei einzelnen Formen die verzweigten Ooblastemfäden aus ihren Zellen direct einzelne Sporen erzeugen, bei anderen dagegen diese einzelnen Zellen mit den Zellen des umgebenden sterilen Thallusgewebes in Verbindung treten und dadurch die Bildung mehrzelliger Complexe von Sporen herbeigeführt wird[1]. —

V.

Durch die vorstehende Schilderung sind nun noch keineswegs sämmtliche Modificationen, welche der Vorgang der Befruchtung und Fruchtbildung bei den Florideen aufweist, zur Darstellung gekommen. Darauf weist mich schon die Thatsache hin, dass ich bisher fast bei jeder neuen Gattung, die ich untersuchte, neue Modificationen der früher beobachteten Vorgänge auffand. Es weisen darauf auch bereits die Angaben Bornet's über *Spyridia*, *Callymenia*, *Crouania* und andere, die ich selbst noch nicht habe untersuchen können, genugsam hin. Allein die wichtigsten Modificationen dieses Vorganges dürften doch wohl im Vorstehenden bei den beschriebenen Gattungen, die den verschiedensten Familien der Florideen angehören, zur Darstellung gelangt sein.

Aus dieser Darstellung aber ergiebt sich, dass überall bei der Befruchtung der Florideen ein materieller Zusammenhang stattfindet zwischen der männlichen Zelle, dem Spermatium, und derjenigen Zelle, welche zum sporenbildenden Gewebe des Cystocarps (dem »Nucleus« der Systematik) auswächst. Eine befruchtende Einwirkung der Vereinigung von Spermatium und Carpogonium auf eine dritte, entfernte Zelle, ist nirgends zu beobachten[2].

---

[1] Für den dritten Fall, dass die Zellen der Ooblastemfäden mit einzelnen Thalluszellen copuliren und darauf diese Thalluszellen zu mehrzelligen Sporencomplexen auswachsen, habe ich bis jetzt unter den Gigartineen noch kein Analogon aufgefunden.

[2] Bekanntlich ist in der Litteratur schon wiederholt hingewiesen worden auf die grosse Übereinstimmung in der Entwickelung der Frucht bei Ascomyceten und Florideen. Diese Übereinstimmung erscheint besonders gross, seit es Stahl gelungen ist, bei den Collemaceen die Entwickelung des Apotheciums auf ein »Procarp«, dessen Trichogyn durch Spermatien befruchtet wird, zurückzuführen. Durch die vorliegenden Untersuchungen über die Fruchtbildung der Florideen hat sich nun ergeben, dass bei den Florideen zwischen den beiden Sexualzellen, welche den Befruchtungsact eingehen, und derjenigen Zelle, welche infolgedessen zur Sporenfrucht auswächst, stets ein materieller Zusammenhang stattfindet. Da erhebt sich nun die Frage, ob nicht analoge Verhältnisse auch bei den Collemaceen und anderen ähnlichen Ascomyceten (und Aecidiomyceten?) obwalten, ob nicht auch hier die befruchtete »Trichogynzelle« zu einem Ooblastemfaden auswächst und alsdann eine der Ooblastemzellen mit einer oder mehreren, einander benachbarten Auxiliarzellen in Verbindung tritt zur Ausbildung des Fadenbüschels der »ascogenen Hyphen«. Mancherlei Momente scheinen mir für diese Vermuthung zu sprechen, namentlich die grosse morphologische Übereinstimmung,

Das Gesammtergebniss der obigen Darstellung aber lässt sich kurz folgendermaassen zusammenfassen: Bei sämmtlichen Florideen vereinigt sich eine einzelne männliche Zelle, Spermatium, unter offener Copulation mit der Trichogynspitze der weiblichen Zelle, des Carpogoniums; der Zellkern des Spermatiums tritt in das Carpogonium über und vereinigt sich (anscheinend) mit dem Zellkern des Carpogoniums. Dann trennt sich der Bauchtheil des Carpogoniums als befruchtete Eizelle von dem Trichogyn ab. Die befruchtete Eizelle aber entwickelt sich nun in sehr verschiedener Weise weiter. Entweder wächst sie direct zu einem Büschel verzweigter Ooblastemfäden aus, die aus ihren Zellen schliesslich direct die Carposporen erzeugen; oder diese Fäden treten mit benachbarten Zellen des sterilen Thallusgewebes zu reichlicherer Ernährung in Verbindung und erzeugen dann aus ihren Zellen die Sporen; oder die einzelnen Zellen dieser Fäden treten in Copulation mit inhaltsreichen Zellen des Thallusgewebes und erzeugen darauf vielzellige Complexe von Sporen; oder es entleeren die Zellen dieser Ooblastemfäden ihren gesammten Plasma-Inhalt oder einen Theil desselben unter offener Copulation in analoge Auxiliarzellen hinein, und diese erzeugen dann vielzellige Complexe von Sporen; oder endlich die befruchtete Eizelle selbst entleert direct ohne Bildung von verzweigten Ooblastemfäden ihren gesammten Inhalt oder einen Theil desselben in die unmittelbar angrenzende Auxiliarzelle hinein und veranlasst dadurch diese zur Erzeugung vielzelliger Complexe von Sporen oder verzweigter sporenbildender Fäden.

Dabei erscheint dieser letztere Modus im Wesentlichen beschränkt auf Florideen mit sehr dichtem und festgeschlossenem Zellgewebe (Gigartineen, Rhodymenieen, Sphaerococceen, Rhodomeleen); die Ausbildung weithin kriechender Ooblastemfäden aber ist hauptsächlich den Cryptonemieen, Gelidieen und Squamarieen eigen, bei denen entweder der gesammte Thallus oder doch der fructificirende Theil des-

---

welche in so zahlreichen Punkten zwischen Florideen und Ascomyceten vorhanden ist. Allein aus den Ergebnissen der bisherigen Untersuchungen (von Stahl, Borzì und Fisch) lässt sich zur Entscheidung dieser Frage noch nichts sicheres entnehmen, da diese Untersuchungen von ganz anderen Gesichtspunkten ausgingen und desshalb auf die Punkte, die hier wesentlich in Betracht kommen, nicht ausführlich genug eingegangen sind. Meine eigenen Beobachtungen über die Entwickelung der Collemaceen aber sind bisher noch nicht ausführlich und vollständig genug gewesen, um in dieser Frage eine Entscheidung zu ermöglichen.

Weitere Untersuchungen werden zu entscheiden haben, ob in der That (wie es scheint) bei der Fruchtbildung der Ascomyceten (und Aecidiomyceten?) ganz analoge Vorgänge wie bei der Fruchtbildung der Florideen stattfinden, oder ob in diesen Thallophyten-Gruppen bei äusserer Ähnlichkeit die Vorgänge doch im Einzelnen wesentliche Verschiedenheiten obwalten.

selben ein gallertig weiches oder lockeres Zellgewebe aufweist. Direct zu einfachen Büscheln sporenbildender Fäden aber wächst die befruchtete Eizelle im Allgemeinen bei solchen Formen heran, deren monöcische Individuen zahlreiche Carpogonien und Spermatien nahe neben einander ausbilden und durch die Menge dieser Spermatien die Befruchtung zahlreicher Carpogonien sicher stellen, sodass es nicht wie in den vorgenannten Fällen nothwendig ist, die nur vereinzelt erfolgenden Befruchtungen der Carpogonien möglichst vielseitig auszunutzen und zu verwerthen. —

In allen diesen verschiedenartigen Fällen aber kommt es schliesslich zur Bildung eines sporenbildenden Gewebekörpers von sehr wechselnder Grösse und Gestalt. Dieser sitzt zuweilen dem Thallus der Mutterpflanze aussen auf oder ist ohne besondere Umhüllung dem Thallusgewebe eingelagert; meist aber ist dieser Gewebekörper als Fruchtkern (»Nucleus«) von einer sehr verschieden gestalteten Hülle, Pericarpium oder Involucrum genannt, umgeben. Beiderlei Gestalten werden von der beschreibenden Algenkunde gleichmässig als Cystocarpien bezeichnet, doch sind solche Cystocarpien, wie aus der vorhergehenden Darstellung sich ergiebt, bei den verschiedenen Gruppen der Florideen sehr verschiedenen Ursprungs, so dass z. B. die Cystocarpien von *Nemalion, Naccaria, Dudresnaya, Gloeosiphonia, Chylocladia, Nitophyllum, Peyssonelia, Corallina, Chondrus* ihrer Entstehung nach durchaus nicht gleichwerthig sind. Der Umstand jedoch, dass in allen diesen Fällen die bald nackte, bald umwandete sporenbildende Gewebemasse als selbständiger Fruchtkörper am Thallus der Mutterpflanze sich abhebt, rechtfertigt wohl zur Genüge die gleichmässige Bezeichnung aller dieser verschiedenartigen Fruchtformen. —

Vergleicht man nun die verschiedenen Einzelvorgänge der Fruchtbildung unter einander, so zeigt sich, dass in den einfachsten Fällen die Ooblastemzellen direct und unmittelbar die Carposporen erzeugen. In anderen Fällen gehen diese Ooblastemfäden zuvor zum Zweck einer leichteren und reichlicheren Ernährung eine Verbindung mit den Zellen des sterilen Thallusgewebes ein. Auf einem folgenden Stadium reicherer Differenzirung sind besondere Thalluszellen, die Auxiliarzellen, für diesen Zweck bereits vorher vorbereitet und reichlich mit Inhalt ausgerüstet, die Ooblastemzellen aber gehen mit diesen eine immer engere Verbindung ein, die bis zu vollständiger Copulation fortschreiten kann. Schliesslich vereinigt sich die Ooblastemzelle vollständig mit der Auxiliarzelle zu einer einzelnen Zelle, die nun ihrerseits die Aufgabe der Ooblastemzelle aufnimmt und zur Ausführung bringt; und zuletzt kommt es gar nicht mehr zur Ausbildung mehrzelliger Ooblastemfäden, sondern die Eizelle selbst (resp. ein Theil derselben) vereinigt

sich mit der Auxiliarzelle. So entsteht als Fortbildung eines einfachen Ernährungsvorganges schliesslich ein Vorgang, der in seinem ganzen Verlaufe mit denjenigen Vorgängen, die man als geschlechtliche Befruchtungsvorgänge bezeichnet, vollständig übereinstimmt.

Beschränkt man, um ganz sicher zu gehen, die Erörterung ausschliesslich auf die verhältnissmässig leicht zu constatirenden Vorgänge der Fruchtbildung von *Gloeosiphonia*, so weist hier die Vereinigung von Ooblastemzelle und Auxiliarzelle alle Merkmale einer geschlechtlichen Befruchtung auf. Die Copulation beider Zellen und der Übertritt des Plasmas der Ooblastemzelle vollzieht sich genau in derselben Weise wie bei anerkannten Befruchtungsvorgängen, z. B. bei der Befruchtung von *Pythium*[1] und *Ancylistes*[2]; ja es lässt sich sogar constatiren, dass auch der Zellkern der Ooblastemzelle mit dem Zellkern der Auxiliarzelle sich vereinigt, da schliesslich nach der Entleerung der Ooblastemzelle in der Auxiliarzelle nur ein einzelner Zellkern vorhanden ist. Die Folge dieser Vereinigung beider Zellen aber ist ein neues, sehr lebhaftes, von dem bisherigen ganz abweichendes Wachsthum der Auxiliarzelle, ein Wachsthum, das niemals ohne eine Vereinigung der Auxiliarzelle mit der Ooblastemzelle eintritt. Damit sind denn doch alle Bedingungen[3] erfüllt, die man an einen Vorgang, der als sexueller Befruchtungsvorgang angesprochen werden soll, stellen kann; und sicher würde auch Niemand Bedenken tragen, diesen Vorgang bei *Glocosiphonia* als Sexualact zu deuten, — wenn nicht bereits im Entwickelungskreise dieser Species ein anderer Vorgang vorläge, der als sexueller Befruchtungsvorgang angesprochen werden muss. Einen zweimaligen Befruchtungsact im Entwickelungskreis einer einzelnen Species anzunehmen, dagegen sträubt sich jedoch zur Zeit die botanische Anschauung vollständig, das widerspricht aller Tradition[4].

Allein zwingenden Thatsachen muss ja doch stets die Tradition weichen. Thatsächlich aber liegen die Verhältnisse so, dass dem

[1] DE BARY, Beitr. zur Morph. u. Physiol. der Pilze. 4. Reihe.

[2] PFITZER im Monatsber. d. Kgl. Akad. d. Wiss. zu Berlin. 1872. S. 393—394.

[3] Wenn man absieht von allen ungreifbaren, geheimnissvollen, metaphysischen Qualitäten der Sexualität, so bleiben als gemeinsame Merkmale aller pflanzlichen Vorgänge, die übereinstimmend bisher als sexuelle anerkannt worden sind, nur die folgenden übrig: Vereinigung zweier (gleichgestalteter oder different ausgebildeter) Zellen unter Verschmelzung der Zellkerne und neue, eigenartige Wachsthumsweise der Copulationszelle, die ohne jene Copulation nicht eintritt. Im Übrigen weisen die allgemein anerkannten Befruchtungsvorgänge (von den umstrittenen ganz zu schweigen) die mannigfaltigsten Verschiedenheiten auf.

[4] Allerdings hat bereits PRINGSHEIM (Jahrb. f. wiss. Bot. XI. S. 18 ff.) bei der Befruchtung der Thallophyten (speciell auch der Florideen) zwei gesonderte Acte, die er als Copulation und Connubium bezeichnet, unterschieden. Allein diese Unterscheidung zerlegt einfach nur den einzelnen Sexualact in zwei Schritte, während es sich im vorliegenden Falle geradezu um zwei gesonderte Sexualacte handelt.

genannten Vorgange bei *Gloeosiphonia* in der That alle Merkmale eigen sind, die sonst für einen Sexualact erforderlich erachtet werden. Da bleibt nichts anderes übrig, als entweder in die Begriffsdefinition eines Sexualactes das Merkmal aufzunehmen, dass derselbe nur ein einziges Mal im Entwickelungskreis einer Species vorkommen darf, und dass von zwei Vorgängen, welche beide die sonstigen erforderlichen Merkmale eines Befruchtungsactes besitzen, doch nur einer als Sexualact gelten soll, — oder anzuerkennen, dass im Entwickelungskreis von *Gloeosiphonia* (und aller analogen Florideen) zweimal ein Sexualact eingeschaltet ist, indem der Befruchtung des Carpogoniums eine Befruchtung der Auxiliarzelle nachfolgt[1]. —

Muss aber diese Verschmelzung von Ooblastemzelle und Auxiliarzelle als Sexualact anerkannt werden, so fällt dadurch ein sehr eigenartiges Licht auf die Sexualität im Allgemeinen. Denn hier bei den Florideen zeigt der Vergleich der verschiedenen Gattungen deutlich, dass der Vorgang, der bei *Gloeosiphonia* alle Merkmale eines Sexualactes aufweist, auf einen einfachen Ernährungsact, wie er bei verschiedenen nahe verwandten Florideen deutlich beobachtet wird, zurückzuführen ist und offenbar auch aus einem solchen einfachen Ernährungsact hervorgegangen ist. Dadurch knüpft dann die geschlechtliche Befruchtung an die einfache vegetative Ernährung einer Zelle durch eine andere[2] an und erscheint einfach als eine eigenartige Weiterbildung dieses im Pflanzenleben so sehr verbreiteten Processes, während sonst die geschlechtliche Befruchtung unter den Vorgängen des organischen Lebens ziemlich unvermittelt dasteht. —

Mag man jedoch diesen zweiten Copulationsact von *Gloeosiphonia* und anderen Florideen als Geschlechtsact anerkennen oder nicht, jedenfalls hat sich dieser Vorgang erst innerhalb der Gruppe selbst heraus-

---

[1] Aus der vorhergehenden Darstellung ergiebt sich zugleich, dass der thatsächliche Verlauf des zweiten Befruchtungsvorgangs in verschiedenen Fällen ein etwas verschiedener ist. In einzelnen Fällen *(Gloeosiphonia)* erscheint dieser Vorgang in Form einer vollständigen Vereinigung zweier Zellen; in anderen Fällen (Ceramieen etc.) scheint fast, wie schon oben hervorgehoben ward, an Stelle einer solchen offenen Copulation das Plasma (resp. der Zellkern) der einen Zelle durch die trennende Membran hindurch in die andere Zelle hinüberzuwandern. Es würde in diesem Falle der Befruchtungsvorgang ganz ähnliche Differenzen, wie sie jüngst de Bary für die Befruchtung der Peronosporeen *(Pythium, Phytophthora, Peronospora)* nachgewiesen hat (de Bary, Beitr. zur Morph. u. Phys. der Pilze, 4. Reihe), aufweisen.

[2] Dass ich damit keineswegs behaupten will, die Befruchtung einer (weiblichen) Zelle durch eine andere (männliche) Zelle laufe einfach auf die Zufuhr neuen Nahrungsmaterials hinaus (wie früher wohl behauptet worden ist), bedarf wohl keiner ausdrücklichen Erklärung. Die männliche Zelle ist in allen Fällen, ebenso wie die weibliche Zelle, ein geformter lebendiger Zellkörper, nicht ein »Klümpchen« leblosen Nahrungsmateriales.

gebildet[1], bei den einfachsten Formen fehlt er noch vollständig. Bei diesen (*Nemalion* u. a.) verläuft der Entwickelungsgang der einzelnen Species in der Weise, dass aus der keimenden Carpospore die vegetative Pflanze hervorgeht, welche Sexualzellen ausbildet, worauf dann die befruchtete weibliche Zelle an der Mutterpflanze selbst zu einer Sporenfrucht heranwächst, welche durch die Ausbildung von Carposporen wieder zum Anfangspunkt des ganzen Entwickelungskreises zurückführt. Das ist ganz derselbe Verlauf, welchen der Entwickelungsgang der Lebermoose und Laubmoose aufweist, dieselbe Reihenfolge abwechselnder Generationen wie dort. So wird es leicht, im Entwickelungsgange dieser einfachsten Florideen den Generationswechsel der Archegoniaten wiederzuerkennen, den man sich bekanntlich gewöhnt hat, als den typischen Modus des pflanzlichen Entwickelungslaufes anzusehen, so zwar, dass erst die Wiedererkennung dieses Generationswechsels im einzelnen Falle den Entwickelungsgang der betreffenden Pflanzengruppe »erkläre« und »verständlich mache«[2]. An

[1] Ebenso wie dieser zweite Sexualact innerhalb der Florideen-Gruppe neu aufgetreten ist, kann er offenbar auch im Laufe der Entwickelung dieser Gruppe wieder verschwinden oder statt dessen auch der ursprüngliche erste Sexualact ausfallen. Im ersteren Fall kehrt der Entwickelungsgang der betreffenden Species einfach wieder zu der ursprünglichen Gestaltung zurück, und dürften solche Formen kaum von den primären einfachsten Formen unterschieden werden können. Fällt dagegen der erste, ursprüngliche Sexualact aus, so muss dadurch der Entwickelungsgang der Species ein ganz abweichendes Ansehen erhalten. Denn in diesem Falle müsste die Bildung von Spermatien vollständig unterbleiben; dafür aber würden entweder die einzelnen Spermatium-Mutterzellen direct zu (einfachen oder verzweigten) männlichen Zellfäden, welche die Auxiliarzellen befruchten, heranwachsen, während die Carpogonien ganz ausfallen, oder es würden die Spermatium-Mutterzellen gar nicht angelegt werden, statt dessen aber die Carpogonien (natürlich ohne vorhergehende Ausbildung eines Trichogyns) direct zu männlichen Zellfäden auswachsen. Das Endresultat aber würde in beiden Fällen das gleiche sein, nämlich die Befruchtung von Auxiliarzellen (die bald aus Endzellen, bald aus Gliederzellen der Thallusfäden hervorgehen) durch die Zellen kürzerer oder längerer, einfacher oder verzweigter Zellfäden.

Dieser Ausfall des ersten Sexualactes ist nun im Gebiete der Florideen, soweit die bisherigen Beobachtungen reichen, nirgends wirklich erfolgt. Wohl aber scheint er unter den Ascomyceten verwirklicht zu sein. Hier bieten, wie schon oben (S. 243 Anm. 2) hervorgehoben ward, die Collemaceen so grosse Analogien mit den Florideen dar, dass man wohl vermuthen darf, die Bildung der Früchte werde hier in ähnlicher Weise eingeleitet, wie beispielsweise bei den Cryptonemieen. Bei anderen Ascomyceten aber scheint im Entwickelungsgange der Species jener Ausfall des ersten Befruchtungsactes wirklich erfolgt zu sein, so dass hier der zweite Sexualact der Florideen als einziger Geschlechtsact übrig geblieben ist, die Mutterzelle der ascogenen Hyphen also einer Florideen-Auxiliarzelle entspricht (*Ascobolus* u. a.). Ja es scheint hier vielfach (wenn anders die vorliegenden Darstellungen die thatsächlichen Vorgänge wirklich erschöpfen) auch dieser zweite Sexualact noch ausgefallen zu sein, so dass die Auxiliarzelle, mag sie nun durch besondere Gestaltung vor den übrigen Hyphenzellen ausgezeichnet sein oder nicht, apogamisch zur Sporenfrucht auswächst.

[2] Dass es sich bei solcher »Erklärung« des Entwickelungsganges einer Pflanzengruppe um ein ganz analoges Verfahren handelt, wie bei der »Erklärung« complicirterer

diese einfachsten Florideen aber schliessen sich, wie oben gezeigt ward, aufs engste und deutlichste die übrigen Formen mit complicirterer Fruchtbildung an und ermöglichen eben durch diesen deutlichen Anschluss, auch in ihrem Entwickelungsgange jenen Generationswechsel deutlich und klar wiederzuerkennen, wenn derselbe auch hier durch Einfügung des zweiten Sexualactes etwas complicirt worden ist[1].

Abgesehen aber von dieser Complication tritt jener typische Generationswechsel im Entwicklungsgange mancher Florideen ganz ungetrübt und deutlich erkennbar hervor. Bei zahlreichen anderen Formen aber setzen noch weitere Complicationen desselben ein, indem wie bei den Laubmoosen die vegetative Generation in Vorkeim und Laubpflanze sich gliedert (*Batrachospermum* u. a.). Bei zahlreichen anderen Formen treten ferner an der vegetativen Generation die Tetrasporen oder auch Gemmenbildungen verschiedener Art als accessorische Vermehrungsorgane hinzu, mögen nun diese an den geschlechtlichen Individuen selbst erzeugt werden (*Cruoriopsis cruciata* Duf., *Petrocelis Ruprechti* Hauck u. a.) oder auf besondere neutrale Individuen beschränkt sein (wie bei den meisten Florideen).

Bei manchen Florideen endlich scheint zu jenem typischen Generationswechsel (der dem Generationswechsel der Archegoniaten entspricht)[2] noch eine weitere Complication sich hinzuzugesellen, indem eine regelmässige Abwechselung von geschlechtlichen Individuen und (einzelnen oder zahlreichen successiven) Tetrasporen-Individuen sich herausbildet. Darauf weist wenigstens mit grosser Wahrscheinlichkeit die Thatsache hin, dass von vielen kurzlebigen Florideen Geschlechtspflanzen nur zu bestimmten Jahreszeiten anzutreffen sind, während neutrale Pflanzen das ganze Jahr hindurch oder doch während ziemlich langer Zeit des Jahres angetroffen werden. Doch ist allerdings bis jetzt noch in keinem Falle eine solche regelmässige Alternation neutraler Individuen und Geschlechtsindividuen) die wohl auch für sich allein als eine besondere Art von Generationswechsel betrachtet werden könnte) durch Beobachtung sicher nachgewiesen worden.

Blüthengestalten von Phanerogamen, die man durch Vergleich mit anderen, bereits bekannten Blüthenformen »erklärt« und »verständlich macht« (vergl. Schmitz, die Familiendiagramme der Rhöadinen), das dürfte bei einiger Überlegungun schwer einleuchten.

[1] Wenn man will, kann man bei diesen Formen der Florideen (*Gloeosiphonia* u. s. w.) auch Generationsreihen aus je drei Generationen unterscheiden, da ja hier die weibliche Sexualzelle der einfacheren Florideen (*Nemalion* u. s. w.) durch zwei Zellen, das Carpogonium und die Auxiliarzelle, ersetzt und zwischen beide eine neue dritte Generation eingeschoben ist.

[2] Eine wesentlich abweichende Auffassung des sexuellen Generationswechsels der Florideen hat vor einiger Zeit Pringsheim (Jahrb. für wiss. Bot. XI. S. 6 ff.) ausgesprochen. Doch würde ein näheres Eingehen auf die Differenzen der beiden Anschauungsweisen hier viel zu weit führen.

VI.

Der ganze Entwickelungsgang der einfachsten Florideen schliesst dieselben, wie schon mehrfach in der Litteratur hervorgehoben worden ist, sehr nahe der Chlorophyceen-Gruppe der Coleochaeteen an.

Bei beiden Algengruppen baut sich der ganze Pflanzenkörper aus verzweigten, seitlich mehr oder minder dicht zusammenschliessenden Zellfäden mit Spitzenwachsthum, deren Glieder niemals quergetheilt werden, auf. Bei beiden Algengruppen entstehen die Sexualzellen aus Endzellen dieser Zellfäden[1]. Kleine endständige Zellen entwickeln aus ihrem gesammten Plasma einzelne nackte männliche Zellen; einzelne grössere Faden-Endzellen schwellen zu weiblichen Zellen an und strecken aus ihrer Spitze ein mehr oder minder langes dünnes Trichogyn hervor. Allein diese Trichogyne öffnen sich bei den Coleochaeteen an der Spitze, das Plasma der weiblichen Zelle grenzt schon vor der Befruchtung einen unbrauchbaren Abschnitt als Richtungskörper ab und entleert denselben durch die geöffnete Spitze des Trichogyns; ferner sind bei den Coleochaeteen die nackten männlichen Zellen mittelst zweier Zilien selbstbeweglich; endlich geht bei den Coleochaeteen die befruchtete Eizelle zunächst in Dauerzustand über und entwickelt erst nach dieser Ruhezeit einen Zellkörper, der zur Bildung von beweglichen »Carposporen« hinführt.

Alle diese letztgenannten Punkte, zu denen als minder wichtiges Moment noch die Verschiedenheit der Assimilations-Farbstoffe und der festen Assimilations-Producte hinzukommt, sind nun schwerwiegend genug, um einen unmittelbaren Anschluss der Florideen an die Coleochaeteen unmöglich zu machen; allein andererseits ist doch die hervorgehobene Übereinstimmung der beiderlei Formen wieder so gross, dass sich zwanglos im natürlichen Systeme der Thallophyten die einfachsten Florideen an die Coleochaeteen und damit die sämmtlichen Florideen oder Rhodophyceen an die grünen Algen oder Chlorophyceen anreihen lassen[2]. —

Dagegen vermag ich eine andere Verwandtschaftsbeziehung der Florideen, die gerade in neuester Zeit so vielfach betont wird, die Verwandtschaft mit den Bangiaceen, keineswegs als so enge anzuerkennen. Diese Algengruppe, die man neuerdings auf Grund der

---

[1] In der Stellung der Sexualzellen zeigen allerdings den vorliegenden Angaben (Pringsheim in Jahrb. f. wiss. Botanik. Bd. II.) zufolge einige Species ein abweichendes Verhalten, indem sie ihre Sexualzellen aus Gliederzellen der Thallusfäden ausbilden.

[2] Eine entgegengesetzte Auffassung haben neuerdings Falkenberg (Schenk, Handbuch der Botanik, Bd. II. S. 252—253) und Berthold (Fauna und Flora des Golfes von Neapel. VIII. Bangiaceen. S. 22) ausgesprochen.

Beobachtungen Berthold's[1] den Florideen einfach einzureihen pflegt, muss meines Erachtens[2] von den Florideen durchaus getrennt werden und hat deshalb auch in der obigen Darstellung noch keine Berücksichtigung gefunden. Zur Begründung dieser Auffassung seien daher hier noch die wichtigsten Momente aus dem Entwickelungsgange der Bangiaceen, welche diese von den Florideen unterscheiden, kurz hervorgehoben.

Zunächst ist der Aufbau des Thallus der Bangiaceen wesentlich verschieden von demjenigen der Florideen. Bei den Bangiaceen findet Quertheilung der Gliederzellen in unbeschränktem Maasse statt, und ebenso erfolgen zahlreich Längstheilungen der Zellen durch Scheidewände, welche die organische Mittellinie der Zellen in sich fassen, was beides bei Florideen niemals geschieht. Infolgedessen lässt sich auch der Thallus der Bangiaceen, soweit er nicht schon selbst einen einfachen Zellfaden darstellt, niemals auf ein einfaches verzweigtes Fadensystem zurückführen. Dann fehlen auch dem vegetativen Thallusgewebe der Bangiaceen die so ausserordentlich charakteristischen primären Tüpfel der Florideen, die in Einzahl in der organischen Mitte einer jeden neugebildeten Scheidewand angelegt werden, stets vollständig.

Des Weiteren werden die Sexualzellen der Bangiaceen aus beliebigen Gliederzellen des Thallus gebildet, während sie bei den Florideen ausschliesslich aus Endzellen kürzerer oder längerer Zellfäden angelegt werden. Zur Bildung der Spermatien zerfällt bei den meisten Bangiaceen *(Bangia, Porphyra)* die einzelne Thalluszelle durch wiederholte Theilung mittelst aufeinander senkrechter Scheidewände in einen vielzelligen Complex kleiner Zellen, die, sämmtlich gleichartig, je einem einzelnen Spermatium den Ursprung geben[3]; bei den Florideen entstehen die Spermatien stets nur aus oberflächlichen Zellen, Endzellen oder Astzellen der Thalluszellfäden[4]. Zu weiblichen Zellen ge-

[1] Mittheilungen aus der Zool. Station zu Neapel. II. S. 78 ff. und Fauna und Flora des Golfes von Neapel. Bd. VIII.

[2] Vergl. Schmitz, Chromatophoren der Algen. S. 3 Anm. 1.

[3] Bei *Erythrotrichia* dagegen werden nach Berthold (Bangiaceen S. 13) die Spermatien aus Randzellen der einzelnen Gliederzellen des Thallus gebildet.

[4] Weniger Gewicht möchte ich auf die weitere Thatsache legen, dass, wie Berthold a. a. O. S. 12—13 angiebt, bei den Bangiaceen die Spermatien stets geformte Chromatophoren mit Pyrenoiden enthalten, während bei den Florideen die Spermatien, so weit meine bisherigen Beobachtungen reichen, stets der Chromatophoren entbehren.

Beiläufig sei übrigens hier noch einmal (vergl. Schmitz, Chromatophoren der Algen S. 39 Anm. 1) darauf hingewiesen, dass Berthold die Pyrenoide der Chromatophoren überall mit den Zellkernen verwechselt, die wirklichen Zellkerne in den Zellen der Bangiaceen aber übersehen hat. Ich habe nach dem Erscheinen der neueren Abhandlung Berthold's, worin seine früheren Angaben einfach wiederholt sind, die Untersuchung dieser Frage nochmals aufgenommen, finde aber auch jetzt meine genannten Angaben über die Zellkerne und Pyrenoide der Bangiaceen durchaus bestätigt.

stalten sich bei den Bangiaceen die einzelnen Thalluszellen ohne Unterschied, indem sie auf der Aussenseite des Thallus eine kurze Ausstülpung vorstrecken, die meist kaum von ferne an das Trichogyn der stets endständigen Carpogonien der Florideen erinnert[1]. Im Befruchtungsact tritt ferner bei den Bangiaceen das gesammte Plasma des Spermatiums bis auf ganz geringe Reste[2] in die weibliche Zelle hinüber, die nun jenen Copulationsfortsatz einzieht und, ohne einen so charakteristischen Richtungskörper wie bei den Florideen abzuscheiden, zur befruchteten Eizelle sich gestaltet. Endlich wird bei den Bangiaceen diese befruchtete Eizelle entweder direct zur Spore (*Erythrotrichia* nach Berthold a. a. O. S. 17) oder zerfällt durch wiederholte Theilung in einen Complex von mehr oder minder zahlreichen Zellen, die sämmtlich einzelnen nackten Sporen den Ursprung geben; ein sporenbildendes Fadenbüschel mit steriler Centralzelle, wie im Cystocarp der Florideen, kommt hier niemals zu Stande.

Alle diese Momente unterscheiden meines Erachtens die Bangiaceen sehr wesentlich von den Florideen[3], die bei aller sonstigen Gestaltungsmannigfaltigkeit doch in den genannten Punkten eine vollständige Übereinstimmung aufweisen. Demzufolge müssen die Bangiaceen mindestens als besondere Gruppe von der in sich abgeschlossenen Gruppe der Florideen abgetrennt werden[4].

Allein mir scheint, dass diese besondere Gruppe der Bangiaceen im natürlichen Systeme auch nicht als nächstverwandte Gruppe unmittelbar neben die Florideen gestellt werden kann. Die Übereinstimmung der Bangiaceen mit den Florideen läuft ja doch im Grunde nur auf wenige nebensächliche Momente hinaus. Bei beiden Algengruppen sind die Chromatophoren im Allgemeinen nicht chlorophyllgrün, sondern in verschiedenen Nüancen von roth oder braun gefärbt; bei beiden Algengruppen sind die männlichen Zellen (so weit bis jetzt festgestellt[5]) unbeweglich; bei beiden Algengruppen erzeugt die be-

[1] Man vergleiche nur die Figuren 2, 4, 12, 13, 23 und 24 bei Berthold (l. c.).

[2] Vergl. auch Berthold's Angaben. a. a. O. S. 14 ff.

[3] Berthold (Bangiaceen S. 21) meint dagegen, dass den »Bau- und Wachsthumsverhältnissen des Thallus«, hinsichtlich deren die Bangiaceen »unter den Florideen ganz isolirt« dastehen, dagegen den »Ulvaceen und Ulothricheen« entsprechen (l. c. S. 1), »jede Bedeutung« für die systematische Stellung der Bangiaceen abgehe.

[4] Selbst die Auffassung der Bangiaceen als eines eigenartigen Astes der Florideen, der »gleich an der Basis dieses grossen Algenstammes« sich abzweigt, vermag nicht zu verhindern, dass eben durch diesen Ast die sonst so vollkommen harmonische Verzweigung dieses Algenstammes erheblich gestört wird.

[5] Nur für die Spermatien von *Erythrotrichia* wird bisher die Fähigkeit freier Ortsbewegung von Berthold a. a. O. S. 13 erwähnt. Doch fehlt bis jetzt jegliche Angabe darüber, in welcher Weise diese Ortsbewegung vermittelt wird. — Vgl. damit die obigen Angaben (S. 222 Anm. 1) über die selbständige Beweglichkeit der Florideen-Spermatien.

fruchtete Eizelle ohne Ruheperiode meistens eine grössere Anzahl von ungeschlechtlichen Sporen. Fast alle diese einzelnen Merkmale kommen auch anderen Algengruppen zu (z. B. besitzen ja die Dictyotaceen ebenfalls unbewegliche männliche Zellen, weshalb sie ebenfalls zuweilen als Florideen augesprochen worden sind), bedingen für sich allein aber meines Erachtens durchaus noch nicht eine unmittelbare Verwandtschaft der Bangiaceen und Florideen. Vielmehr glaube ich, wie ich bereits anderwärts kurz erwähnt habe[1], dass die Bangiaceen im natürlichen Systeme der Thallophyten zunächst neben die Chlorophyceen-Gruppe der Schizogoneen *(Prasiola, Schizomeris, Schizogonium, Palmogloea, — Porphyridium)* zu stellen sind, die Florideen dagegen zwar vermittelst der Coleochaeteen an den Hauptstamm der Algen, die Chlorophyceen, anschliessen[2], allein doch von diesen Chlorophyceen durch eine hinreichend grosse Kluft getrennt sind und eine hinreichend grosse, formenreiche und eigenartig ausgebildete Gruppe darstellen, um zweckmässiger Weise als eine besondere selbständige Abtheilung der Algen, als Rhodophyceen, unterschieden zu werden.

Die Resultate der vorliegenden Untersuchungen über die Befruchtung der Florideen ergeben schliesslich auch noch einige Beiträge zur Systematik dieser Abtheilung der Algen.

Ein natürliches System der Florideen ist zur Zeit bekanntlich nur erst in den Anfängen vorhanden. Die bisherige Kenntniss der so überaus formenreichen Gruppe ist noch viel zu lückenhaft, als dass es bereits jetzt möglich wäre, ein natürliches System dieser Algen aufzustellen. Vor der Hand müssen künstliche Systeme aushelfen, und diese stützen sich heutigen Tages, nachdem eine überwiegende Berücksichtigung des Thalluswachsthums (Naegeli) sich als unzweckmässig herausgestellt hatte, sämmtlich auf den Bau der reifen Cystocarpe (J. Agardh). Eine consequente Durchführung dieses Eintheilungsprincipes reisst jedoch vielfach die nächsten Verwandten (z. B. *Delesseria* und *Hydrolapathum*, *Chylocladia* und *Lomentaria*, *Griffithsia* und *Bornetia* u. a. m.) weit auseinander.

---

[1] Schmitz, Chromatophoren der Algen S. 3 Anm. 1.

[2] Durch diese Zusammenstellung kommt auch die Verwandtschaft der Florideen mit den Bangiaceen, soweit diese wirklich vorhanden ist, meines Erachtens in durchaus entsprechender Weise zum Ausdruck. Denn durch den Anschluss der Florideen an die Coleochaeteen schliessen ja die ersteren auch an die übrigen Gruppen der Chlorophyceen und damit auch an die Bangiaceen an. Doch werden allerdings Bangiaceen und Florideen hier weiter auseinander gerissen, als es sonst neuerdings zu geschehen pflegt.

Zur Förderung des natürlichen Systemes der Florideen ist meines Erachtens zur Zeit wesentlich eine genaue Untersuchung der Vorgänge bei der Befruchtung der verschiedenen Einzelformen erforderlich. Es würde jedoch zu weit führen, hier die Resultate, die ich für das natürliche System der Florideen aus meinen Untersuchungen ableiten zu dürfen glaube, im Einzelnen aufzuzählen. Die allgemeineren Resultate dieser Art habe ich bei der obigen Darstellung in der Anordnung der Gruppen bereits zum Ausdruck gebracht. Eine eingehendere Darstellung derselben wird erst angezeigt sein, wenn es gelungen ist, eine noch weit grössere Anzahl von Einzelformen als bisher auf ihre Fruchtbildung genauer zu untersuchen.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Batrachospermum moniliforme Roth.
(Pikrinsäure-Hämatoxylin-Präparat.)

Spitze des Carpogonastes mit dem bereits befruchteten Carpogonium; Trichogyn von dem Bauchtheil des Carpogoniums abgegliedert, dieser letztere seitlich aussprossend. Die hypogyne Zelle entwickelt neben dem älteren verzweigten Seitenast eine neue seitliche Sprossung als Anlage zu einem neuen sterilen Hüllzweig. In der Eizelle, der hypogynen Zelle und den beiderseitigen Astzellen sind die Nukleolen der Zellkerne intensiv gefärbt; innerhalb des Trichogyns umschliesst das Plasma eine Anzahl intensiv gefärbter Körnchen (Derivate des Zellkerns der weiblichen Zelle?). — Vergr. 800.

Fig. 2—4. Chantransia corymbifera Thur.
(Spiritus-Material, in Wasser aufgeweicht und durch Hämatein-Ammoniak gefärbt.)

Fig. 2. An dem befruchteten Carpogonium ist das Trichogyn durch den Membranpfropf innerhalb des Trichogynhalses abgetrennt worden. Die befruchtete Eizelle bildet aufwärts eine Aussprossung, die bereits durch eine Querwand abgetrennt worden ist. — 800.

Fig. 3. Nächstes Entwickelungsstadium. Neben der endständigen Sprossung wird seitlich eine zweite Sprossung angelegt. — 800.

Fig. 4. Weiteres Entwickelungsstadium. — 800.

Fig. 5—7. Scinaia furcellata Biv.
(Spiritus-Material.)

Fig. 5. Junger Carpogonast. An dem endständigen Carpogonium hat eben die Bildung des Trichogyns begonnen. Die hypogyne Zelle hat zur Bildung der hypogynen Scheibe bereits eine Randzelle angelegt. An der untersten Zelle des Carpogonastes beginnt das Aussprossen der Hüllfäden, welche später zur Bildung der Fruchtwand dicht zusammenschliessen. — 800.

Fig. 6. Vierzellige hypogyne Scheibe mit dem abgegliederten Bauchtheil des eben befruchteten Carpogoniums. — 800.

Fig. 7. Die befruchtete Eizelle (an der Spitze noch mit dem verschlossenen Trichogynhals versehen) hat sich einseitig vorgewölbt und entwickelt ein reich verzweigtes Büschel von Ooblastemfäden (dessen Bildung keineswegs, wie bisher angenommen ward, von den Zellen der hypogynen Scheibe ausgeht). — 800.

Fig. 8—15. Gloeosiphonia capillaris Carm.
(Spiritus-Material.)

Fig. 8. Junges Procarp von der Seite. *b* Basalzelle des ganzen Procarpastes, dessen vorletzte Zelle *a* (die Endzelle ist seitwärts gekrümmt und in der Figur durch die Zelle *a* verdeckt) zur Auxiliarzelle wird. Diese Basalzelle trägt als Seitenast den dreizelligen Carpogonast, dessen Endzelle bereits ein langes Trichogyn entwickelt hat, während die hypogyne Zelle sich einseitig sehr stark vorgewölbt und reichlich mit Plasma gefüllt hat. Die zweite Zelle des Procarpastes trägt seitlich einen sterilen Seitenast. — 800.

Fig. 9. Junges Procarp von unten. *b* Basalzelle des ganzen Procarpastes, dessen Gliederzellen durch abwechselnd geneigte Querwände getrennt sind und fast sämmtlich sterile seitliche Auszweigungen gebildet haben, während die vorletzte Zelle *a* zur Auxiliarzelle wird. Die Basalzelle trägt als Seitenast den dreizelligen Carpogonast, dessen hypogyne Zelle *h* hier viel kleiner geblieben ist als in Fig. 8. — 800.

Fig. 10. Carpogonast. An dem befruchteten Carpogonium ist der Bauchtheil abgetrennt und zu einem einzelnen Ooblastemfaden *c* ausgewachsen, der nahe seiner Basis einen Seitenast *c'* entwickelt hat. Der Bauchtheil des Carpogoniums ist vollständig entleert, die hypogyne Zelle *h* noch sehr inhaltsreich. — 800.

Fig. 11. Auxiliarzelle *a* an der Spitze des (von unten gesehenen) Procarpastes in offener Copulation mit der Ooblastemzelle *e*. — 800.

Fig. 12. Procarpast von unten gesehen. Die Basalzelle *b* und die angrenzende Gliederzelle tragen seitlich je einen Carpogonast, von dem in der Figur nur die unterste Zelle *d* gezeichnet ist. Die Auxiliarzelle *a* war mit der Ooblastemzelle *e* in Copulation getreten und hat nach dem Übertritt des gesammten Plasmas von *e* sich wieder als selbständige inhaltsreiche Zelle abgeschlossen. — 800.

Fig. 13. Spitze des Procarpastes mit der befruchteten Auxiliarzelle *a* von der Seite. — 800.

Fig. 14. Desgl. Die befruchtete Auxiliarzelle *a* hat auswärts die Centralzelle des Sporencomplexes abgegliedert. — 800.

Fig. 15. Desgl., weiteres Entwickelungsstadium. Die Centralzelle schneidet successive Randzellen ab. — 800.

Fig. 16—19. Dudresnaya purpurifera J. Ag.
(Spiritus-Material.)

Fig. 16. Carpogonast mit einwärts gekrümmter Spitze. Aus dem bereits abgegliederten Bauchtheil des befruchteten Carpogoniums wächst ein Ooblastemfaden hervor und richtet sich gegen die Auxiliarzellen hin, welche die Endzellen kurzer Seitenästchen des Capogonastes darstellen. — 800.

Fig. 17. Desgl. Aus dem Bauchtheil des befruchteten Carpogoniums sind zwei kurze Ooblastemfäden hervorgewachsen und haben mit einzelnen (1 oder 2) Auxiliarzellen copulirt. Einer dieser kurzen Fäden treibt einen Seitenast *c*, der in das angrenzende Thallusgewebe hinauswächst. — 800.

Fig. 18. Die Spitze eines Ooblastemfadens wächst an einer Auxiliarzelle vorbei, welche hier die Endzelle eines besonderen Astes darstellt. — 800.

Fig. 19. Späteres Entwickelungsstadium von Fig. 18. Die fortwachsende Spitze des Ooblastemfadens hat eine Gliederzelle abgeschnitten, und diese ist mit der Auxiliarzelle in Copulation getreten. Darauf hat die Ooblastemzelle auswärts eine Ausstülpung gebildet und diese als selbständige Zelle zur Bildung des Sporencomplexes abgegliedert. — 800.

Fig. 20—21. Dudresnaya coccinea Crouan.
(Spiritus-Material.)

Fig. 20. Die Spitze eines Ooblastemfadens ist eben an einer Auxiliarzelle, die hier als Gliederzelle einem besonderen Aste angehört, vorbeigewachsen; die abgeschnittene Gliederzelle des Ooblastemfadens tritt in Copulation mit dieser Auxiliarzelle, deren beide Nachbarzellen ebenfalls reich mit Plasma erfüllt sind. — 800.

Fig. 21. Weiteres Entwickelungsstadium. Die Gliederzelle des Ooblastemfadens *c c* hat auswärts eine Sprossung *c'*, die zu einem Seitenast des Ooblastemfadens heranwächst, und ebenso zwei seitliche Sprossungen *e e* angelegt, die sich der Auxiliarzelle aussen anlegen und diese umwachsen, um demnächst dem Sporencomplexe des Cystocarps den Ursprung zu geben. — 800.

Fig. 22. Dumontia filiformis Grev.
(Spiritus-Material.)

Hakenförmig gekrümmter Carpogonast. An dem endständigen Carpogonium hat soeben die Anlage des Trichogyns begonnen. — 800.

Fig. 23. Calosiphonia Finisterrae Crouan.
(Pikrinsäure - Hämatoxylin - Material.)

Dreizelliger Carpogonast. Die unterste Zelle ist stark vergrössert, einer Auxiliarzelle ähnlich, doch nicht als solche fungirend. Aus dem abgegliederten Bauchtheil des befruchteten Carpogoniums wachsen drei Ooblastemfäden hervor und breiten sich in das angrenzende Thallusgewebe hinein aus. — 800.

Fig. 24—27. Naccaria hypnoides J. Ag.
(Spiritus-Material.)

Fig. 24. Junger Carpogonast *b d e* mit eingekrümmter Spitze. Die Basalzelle *b* desselben trägt seitlich zwei Astzellen *a*, die weiterhin zu Auxiliarzellen sich ausbilden. — 800.

Fig. 25. Späteres Entwickelungsstadium. Die Zelle *d* der Fig. 24 hat seitlich eine Astzelle *f* gebildet, die Zelle *e* durch eine schräge Querwand in die Endzelle *g* und die Gliederzelle *e* sich getheilt, so dass nun die Zellen *b d e g* den hakenförmig eingekrümmten Carpogonast bilden. — 800.

Fig. 26. Weiteres Entwickelungsstadium. Die Zellen *d*, *e* und *f* haben sich mehrfach verzweigt und einen kleinzelligen hypogynen Zellcomplex gebildet. Die Zelle *g* hat sich zum Carpogonium entwickelt, und an dieser ist bereits nach erfolgter Befruchtung das Trichogyn von dem Bauchtheil abgegliedert. — 800.

Fig. 27. Noch späteres Entwickelungsstadium. Der Bauchtheil des befruchteten Carpogoniums ist mit der Basalzelle *b* des Carpogonastes in Copulation getreten und lässt nun einen Ooblastemfaden *c* hervorsprossen. *t* Reste des hier sehr vergänglichen Trichogyns. (Auch mit den Auxiliarzellen *a* der Fig. 24 tritt die befruchtete Eizelle durch kurze Fortsätze in sehr wechselnder Weise in Copulation, worauf dann aus der Copulationszelle neue Ooblastemfäden entspringen; doch sind diese Vorgänge der Deutlichkeit halber aus der Figur weggelassen worden.) — 800.

Fig. 28. Schema für die Zelltheilung im Procarp (medianer Längs chnitt) von Chondria, Polysiphonia u. a. Rhodomeleen.

b Zelle der Centralachse des Procarpastes; *a* unpaare Randzelle derselben, aus welcher zunächst als endständige Sprossung der gekrümmte Carpogonast *e e e c* hervorwächst, während seitlich daneben noch ein oder mehrere Astzellen *d* hervortreten, die zuweilen (z. B. bei *Chondria tenuissima*) sehr reichlich sich verzweigen und einen Complex kurzer, dichtgedrängter, steriler Zellfäden bilden. Die Zelle *a* selbst wird

später zur Auxiliarzelle und nach der Befruchtung des Carpogoniums *c* durch den abgegliederten Bauchtheil dieses Carpogoniums, mit dem sie sich zur Zeit der Befruchtungsreife berührt, befruchtet. Aus der Zelle *a* sprossen dann die sporenbildenden Fäden hervor, während die Zellreihe *e e e*, sowie das sterile Fadenbüschel der Zelle *d* zu Grunde geht.

Fig. 29—33. Chylocladia kaliformis Hook.
(Spiritus-Material.)

Fig. 29. Einer der kurzgliedrigen Zellfäden, welche, an der Spitze zusammenstossend, den fortwachsenden Scheitel der Thalluszweige aufbauen. Die Gliederzellen dieses Zellfadens verzweigen sich auswärts zur Bildung der grosszelligen Schicht der Wandung der hohlen Thallusglieder. Aus der Astzelle der sechsten Gliederzelle sprosst seitlich ein hakenförmig gekrümmter Carpogonast hervor. — Ohne Zeichenprisma gezeichnet.

Fig. 30. Die sechste Gliederzelle der Fig. 29 mit dem ansitzenden Carpogonast stärker vergrössert und mit dem Zeichenprisma gezeichnet. Das eben angelegte Trichogyn des Carpogoniums an seiner Basis einseitig stark angeschwollen. *b* Tragzelle des Carpogonastes. — 800.

Fig. 33. Carpogonast mit vollständig ausgebildetem Carpogonium. Mit der Spitze des Trichogyns hat ein Spermatium copulirt. — 800.

Fig. 31. Junge Anlage eines Cystocarps, von der Aussenseite des Thallus aus gesehen. Die schraffirten Zellen in der Mitte stellen den Carpogonast dar, *c* den Bauchtheil des Carpogoniums, dessen Trichogyn nach der Befruchtung abgegliedert ward und zu Grunde gegangen ist; die punktirte Zelle *b* die Tragzelle des Carpogonastes. *a* Die Auxiliarzelle, welche sich mit breitem Copulationsfortsatz zu der befruchteten Eizelle *c* hinkrümmt und dieselbe berührt; *m* eine der grossen Zellen der Wandung des Thallusgliedes, welche die Auxiliarzelle *a* als Tochterzelle nach aussen abgegliedert hat. Diese ganze Zellgruppe von zahlreichen kleinen Randzellen, welche die angrenzenden Zellen abgeschnürt haben und welche die erste Anlage der späteren Wandung des Cystocarps darstellen, bedeckt. — 300.

Fig. 32. Eine Auxiliarzelle mit breitem, gekrümmtem Copulationsfortsatz, von der Seite gesehen. — 800.

Fig. 34. Callithamnion gracillimum Harv.
(Spiritus-Material.)

Procarp. An einer der obersten Gliederzellen eines begrenzten Thalluszweiges stehen in einem Wirtel die sterile Astzelle *b*, die beiden Auxiliarzellen *a*, deren eine noch eine Zelle *d* auf ihrer Aussenseite abgegliedert hat, und der dreizellige Carpogonast *e e c*. — 800.

Fig. 35. Pterothamnion plumula Naeg.
(Osmiumsäure-Hämatoxylin-Präparat.)

Procarp. Die Basalzelle *b* einer Blattfieder trägt auf der einen Seite den gekrümmten, vierzelligen Carpogonast, auf der anderen Seite die Auxiliarzelle *a*. Diese letztere hat sich nach der Oberseite der Basalzelle hinübergekrümmt und berührt dadurch den Bauchtheil des Carpogoniums, der sich hier bereits durch eine sehr kurze und dichte Verschlussplatte *p* als befruchtete Eizelle von dem Trichogyn abgegliedert hat. — 800.

Fig. 36. Polysiphonia atrorubescens Grev.
(Pikrinsäure-Hämatoxylin-Präparat.)

Junges Procarp im medianen optischen Längsschnitt. An der Gliederzelle *b* der Centralachse hat die unpaare Randzelle *a* eine endständige Sprossung abgegliedert, die

bereits aus zwei Zellen besteht und durch die Ausbildung weiterer schräger Querwände in der Endzelle zu dem gekrümmten Carpogonast des befruchtungsreifen Procarps (Fig. 28) heranwachsen soll. — 800.

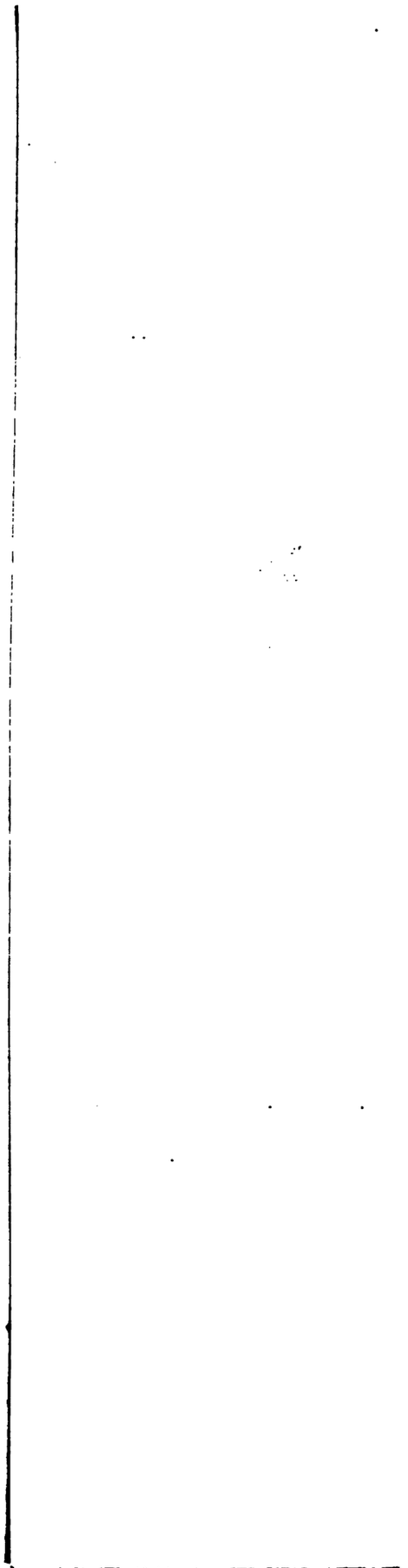
Fig. 37—38. Plocamium coccineum Lyngb.
(Spiritus-Material.)

Fig. 37. Junge Fruchtanlage zur Zeit der Befruchtungsreife. Mit dem hervorgestreckten Trichogyn hat ein Spermatium copulirt. — 150.

Fig. 38. Längsschnitt durch eine noch jüngere Fruchtanlage, deren Trichogynspitze noch nicht ins Freie hervorgetreten ist. Eine innere Gewebezelle *a* hat als secundären Seitenast einen dreizelligen Carpogonast *eec* ausgebildet und entwickelt sich selbst zur Auxiliarzelle, indem sie einen Copulationsfortsatz gegen den Bauchtheil des Carpogoniums vorstreckt. Das Trichogyn schwillt oberhalb des Trichogynhalses stark kolbig an, bevor es, die Thallusoberfläche mit ihrer dichten Cuticula durchbrechend, in ein langes dünnes Haar sich vorstreckt. — 400.

Fig. 39. Caulacanthus ustulatus Kütz.
(Spiritus-Material.)

Längsschnitt durch einen jungen Fruchtast. *m m* Centralachse. Ein Seitenast dieser Centralachse trägt an einer Gliederzelle *d* seitlich den Carpogonast *eec*. Die unterste Zelle desselben wächst zu einem sterilen rhizoidartigen Markfaden aus. Die oberste Zelle hat sich zum Carpogonium ausgebildet; der Bauchtheil desselben hat sich nach erfolgter Befruchtung abgegliedert und ist zu einem einzelnen Ooblastemfaden ausgewachsen, der, reichlich sich verzweigend, um die Centralachse sich herumschlingt. Bei × entsprang noch ein weiterer verzweigter Seitenast des Ooblastemfadens, der auf der Unterseite der Centralachse sich ausbreitete, in der Zeichnung aber der Deutlichkeit halber weggelassen worden ist. — 400.



11. Über eine neue Spaltungsrichtung am Gypsspath.

Von E. Reusch
in Tübingen.

(Vorgelegt von Hrn. Websky am 22. Februar: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. X]: ausgegeben am 1. März.)

Über den Titel: »Die Körnerprobe am krystallisirten Gyps« habe ich im Jahre 1869 in Poggendorff's Annalen, Band 136, S. 135 eine kurze Mittheilung gemacht über die Schlagfigur, die man erhält, wenn man eine nicht zu spitzige Nadel auf ein Gypsplättchen senkrecht aufsetzt und einen kurzen Schlag auf die Nadel führt: neben den Anzeichen des muschligen und fasrigen Bruchs erhält man eine glänzende Schlaglinie von mässiger Neigung gegen den Faserbruch. In dieser Schlaglinie glaubte ich damals auf Grund von Messungen, die ich jetzt als unvollkommen bezeichnen muss, einen neuen zur Medianebene senkrechten Blätterbruch zu erkennen, als dessen Indices ich $(\bar{2}03)$ angab.

Angeregt durch eine Abhandlung von Hessenberg im achten Band d. Abh. d. Senckenbergischen Gesellschaft nahm ich den Gyps auf's Neue vor, wozu mir von Prof. Ulrich in Hannover (damals noch in Oker) ein reicher Vorrath von Gyps von Aschersleben zur Verfügung gestellt wurde. Nach erlangter grösserer Fertigkeit in Herstellung der Schlagfigur überzeugte ich mich, dass der Winkel zwischen Faserbruch und der charakteristischen Schlaglinie, den ich früher auf 11° geschätzt hatte, um zwei bis drei Grade zu vergrössern sei, dass somit jene Schlaglinie möglicherweise der von Hessenberg am Gyps von Wasenweiler nachgewiesenen Fläche β $(\bar{5}09)$ entsprechen könnte. Ein brieflicher Verkehr mit Hessenberg entwickelte sich, persönliche Bekanntschaft erfolgte im Herbst 1873, welche leider durch den im Juli 1874 erfolgten Tod des vortrefflichen Mannes ein rasches Ende genommen hat.

In einem Briefe vom 19. Juli 1873 schreibt mir Hessenberg: »Ich theile nun ganz Ihre neuere Ansicht, dass die charakteristische Schlaglinie mit der Fläche β $(\bar{5}09)$ zusammenfalle. Die mir gesandten Gypsplättchen gestatten Messungen, welche darüber keinen Zweifel lassen. Auch geben die Plättchen Gelegenheit, sich von der Richtigkeit Ihrer Behaup-

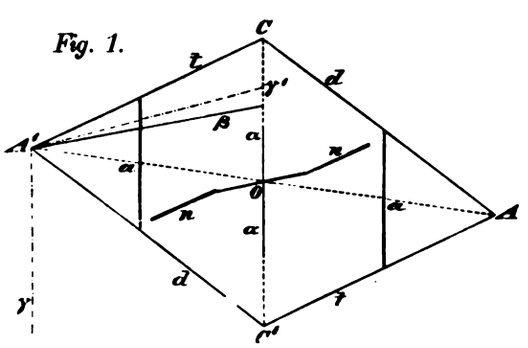
tung zu überzeugen, dass, während jene Schlagfläche senkrecht zur Medianebene gerichtet ist, die dem Faserbruch entsprechenden Absonderungen schräg (augitpaarig) dagegen stehen.«

In einer Abhandlung mit der Aufschrift: Krystallographische Bemerkungen zum Gyps, enthalten im Jahrgang 1875 der mineralogischen Mittheilungen von G. Tschermak, S. 113—130, bespricht nun Hr. Laspeyres in §. 4 auch die Biegsamkeit und Spaltbarkeit des Gyps und kommt, auf Grund von Beobachtungen an eigenen Präparaten, sowie an solchen, die er von mir in Wiesbaden im Herbst 1873 erhalten hatte, zu der Ansicht, dass es sich bei meiner Schlaglinie nicht um einen neuen Bruch, sondern um eine Scheinfläche von sägeartigem Verlauf handle, welche aus einer bekannten Spalt- und Bruchkluft resultire.

Gegen diese Auffassung habe ich im Jahrgang 1876 derselben Zeitschrift S. 67 angekämpft und namentlich ein neues Mittel angegeben, den Gyps auf seine Brüche zu untersuchen. Die Gypsplatte wird zwischen zwei gleichen parallelen Linealen mit den Fingern der einen Hand festgeklemmt, und der vorstehende Theil der Platte mit einem dritten in der andern Hand gehalten, an eines der ersten angelegten Lineale rasch geknickt. Ragt das Plättchen längs β über die Lineale heraus, so erhält man durch Knicken klare Sprünge, deren Richtung mit der Faserrichtung sehr nahe einen Winkel von 14° macht.

Es scheint aber nicht, als ob die Krystallographen durch diesen Versuch von der Existenz des Bruchs nach β überzeugt worden wären; wenigstens schliesse ich das aus einer Stelle in der elften Auflage der Elemente der Mineralogie von Naumann-Zirkel 1881, S. 440, wo die Ansicht des Hrn. Laspeyres wiedergegeben ist. Vielleicht sind aber die nachfolgenden Bemerkungen geeignet, auch Andere zur Anstellung der hierhergehörigen Versuche anzuregen, namentlich aber den Bruch nach β als eine wirkliche, für das Verständniss des Gypsspaths nicht unwichtige Spaltungsrichtung zu documentiren.

Fig. 1.



Ich beginne mit einigen Bemerkungen in Betreff des Spaltens von Gypsplatten. In der Fig. 1 sind die in die Medianebene fallenden Axen AA', CC', die ungefähr im Verhältniss von 5 : 3 stehen, unter dem Winkel von 98° 55′ aufgetragen; verbindet man die Enden der Axen, so erhält man in AC und CA' die Richtungen von d (101) und von t $\bar{1}$01),

welch' letztere der Faserrichtung entspricht. Die mit CC' parallelen Geraden a gehören zum muschligen Bruch. Die Richtung $A'\beta$ entspricht der Fläche β (509), wobei $\angle tA'\beta = 14° 4'$ ist.

Es ist nun einleuchtend, dass man beim Spalten einer Platte die Messerkante weder parallel dem muschligen Bruch a, noch parallel der Faserrichtung t halten darf, weil sonst leicht ein vorzeitiges Brechen und Knicken im Sinne der einen oder anderen Richtung eintreten könnte. Bei rhomboidischen nach a und t begrenzten Platten wird man am Einfachsten die Messerkante senkrecht zur Halbirungslinie des stumpfen Winkels zwischen a und t ansetzen. Bei unregelmässiger Begrenzung der Tafel kann man aber das Messer eben so vortheilhaft parallel jener Halbirungslinie einführen. Immer wird man suchen, die Dicke der vorliegenden Platte zu halbiren, damit kein Grund sei, dass die eine Hälfte eher breche oder knicke als die andere. — Das Brechen der Platten nach dem muschligen Bruch wird zweckmässig mit Hilfe der drei Lineale vorgenommen.

Ein oft recht nützlicher Kunstgriff, dessen Mittheilung ich Hrn. Dr. W. Steeg in Homburg v. d. H. verdanke, besteht darin, dass man in den durch das Messer eingeleiteten Sprung einen Tropfen Wasser einführt, der das weitere Spalten ausserordentlich erleichtert.

Die Schlagfigur (Fig. 1) besteht einmal aus einem bei harten und weichen Gypsen jederzeit eintretenden Sprung α parallel dem muschligen Bruch; dann, und zwar nur bei härterem Gyps, aus zwei dies- und jenseits der Schlagstelle verlaufenden, in die Faserrichtung fallenden Absonderungen n; und endlich aus dem durch die Schlagstelle o gehenden, zur Platte senkrechten Sprung nach β. Die stumpfe Nähnadel wird zweckmässig durch das abgerundete Ende einer dicken Stricknadel ersetzt. Als Unterlage dient mir gewöhnlich eine Lamelle schwarzen glatten Kautschuks, welche auf eine Glas- oder Metallplatte geklebt ist. Die Stärke des Schlags richtet sich nach der Plattendicke und wird leicht durch Probiren gefunden.

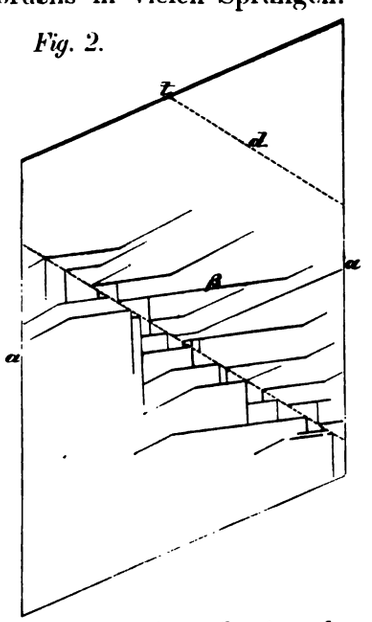
Ich denke mir nun, es werde ein Plättchen von 0,3 bis 0,5 mm Dicke zwischen die zwei Lineale so eingespannt, dass es nach der Faserlinie t hervorragt, und nun nach dieser Linie mit dem dritten Lineale geknickt. Manchmal wird es sich nun treffen, dass das Plättchen fast lautlos nach t abgewiegt wird; aber in der Mehrzahl der Fälle, namentlich bei raschem kurzen Knick, hört man einen scharfen Knack, und alsdann ist auch sicher der Bruch nach β meist in mehrfacher Wiederholung entstanden und erstreckt sich oft in langen glänzenden Linien unter und über die das Plättchen umfassenden Lineale; Absonderungen nach t treten erst in secundärer Weise auf, obgleich die Knickung nach t geschah.

Will man ein Plättchen von der angegebenen oder grösserer Dicke wirklich nach t trennen, so muss vor dem Knicken entweder auf beiden Seiten, oder wenigstens auf der Seite, gegen welche geknickt wird, eine tiefe Furche längs t mit einer am Lineale hingeführten spitzigen Nadel gemacht werden; die Trennung erfolgt dann wohl in Folge von Ablösung nach einer der Flächen des Augitpaars u (111), denn dass diese Flächen Spaltungsflächen sind, zeigt eine wohlgelungene Schlagfigur mit grosser Deutlichkeit.

Das Auftreten der Brüche nach β ist natürlich nicht an eine bestimmte Knickungsrichtung gebunden, wenn diese nur gehörig abweicht von der Richtung des muschligen Bruchs und von einer zu β senkrechten Richtung. Als besonders günstige Richtung der Knickung hat sich die nach d (101) gezeigt; aus Fig. 1 ersieht man, dass die Winkel, welche $A'C'$ mit $A'\beta$ und mit $A'\gamma$ (parallel CC') macht, wenig verschieden sind, so dass zu erwarten steht, dass bei einer Knickung nach d gleichzeitig Brüche nach β und a hervorgerufen werden. Das ist nun in ganz ausgezeichnetem Grade der Fall: man erhält insbesondere den Bruch nach β häufig in 10 bis 20facher Wiederholung in klaren glänzenden Sprüngen, die an der Knickungslinie beginnen und meist in Linien nach der Faserrichtung umbiegen.

Auch der muschlige Bruch erscheint neben Spuren des Faserbruchs in vielen Sprüngen. Die Figur 2 giebt nur ein schematisches Bild einer so geknickten Platte. — Ich glaube, dass Niemand diesen Versuch anstellen wird, ohne die feste Überzeugung zu gewinnen, dass die Fläche β einem wirklichen Bruch entspricht, der an Schönheit dem muschligen Bruch zum mindesten gleichsteht.

Fig. 2.



An Fragmenten so geknickter Plättchen, welche sowohl mehrere klare Brüche als auch feine Spuren des Faserbruchs enthalten, wird man nun den Winkel zwischen diesen zwei Richtungen so wenig verschieden von 14° 4′ finden, dass kein Zweifel über die Identität jenes Bruchs mit der Hasenberg'schen Fläche β sein kann.

Der Objectträger des mit Ocular-goniometer versehenen Mikroskops muss hierbei zwei auf einander rechtwinklige Schlittenbewegungen von ziemlicher Amplitude besitzen, um der Reihe nach die zwei Linienzüge in's Sehfeld und in Coincidenz mit dem Faden des Gonio-

meters bringen zu können. Allerdings trifft es sich, dass bei einer grösseren Zahl von Messungen des fraglichen Winkels die Zahl derjenigen, welche den Winkel kleiner als 14° geben, grösser ausfällt als die Zahl derer, welche 14° übersteigen; aber der Grund hiervon liegt sicher darin, dass die Brüche nach β leicht in die benachbarten Spaltflächen des Augitpaares $n(\bar{1}\,1\,1)$ verlaufen, wie man das an jeder wohlgelungenen Schlagfigur sehen kann.

Dasselbe zeigen auch die ungefähr in die Richtung von β fallenden Sprünge, die man beim Spalten grösserer Platten sehr häufig erhält; manchmal findet man den Winkel zwischen t und den Sprüngen ziemlich kleiner als 14°, oft sogar sieht man einen solchen Sprung aus der Richtung von β in stetiger Krümmung in den Faserbruch verlaufen. Da man aber, wenigstens bei härterem Gyps, in der Knickung nach d ein sicheres Mittel hat, die Realität des Bruchs nach β zur Anschauung zu bringen, so liegt in jenen Abweichungen nichts Bedenkliches.

Früher[1] glaubte ich zur Erklärung der leichten Überleitung des Bruchs β in den Faserbruch eine an einem Gyps von Bologna beobachtete ziemlich scharfe Bruchfläche zwischen t und β herbeiziehen zu können, unterdessen habe ich aber gefunden, dass jene Platte die eine Hälfte eines Zwillings nach d war und dass jene Fläche ziemlich nahe dem muschligen Bruch der anderen (abgebrochenen) Hälfte des Zwillings entsprach. Zieht man in Fig. 1 die Gerade $A'\gamma'$, welche mit $A'\gamma$ symmetrisch liegt, gegen $A'C$ (d), so ist $A'\gamma'$ die Lage des muschligen Bruchs im zweiten Individuum des Zwillings, und es ist $\angle\, CA'\gamma' = 9°\,24'$, $\angle\, \gamma' A'\beta = 4°\,40'$. Die in der Hauptsache ganz unregelmässig verlaufende Zwillingsnaht hatte nun längs einer gewissen Strecke eine Richtung zwischen $A'\beta$ und $A'\gamma'$, und man begreift, dass auf dieser Strecke ein Bruch entweder nach $A'\gamma'$, oder nach $A'\beta$, oder nach einer Zwischenrichtung gar wohl möglich war. In Wirklichkeit zeigte auch der Zwilling selber in der Nähe der die Platte durchsetzenden Sprünge deutliche Spuren einer Verletzung durch Meisel oder Messer.

Die Nachweisung des Bruchs β durch Knicken nach d gelingt mit dem härteren Gyps vom Montmartre, von Aschersleben, und sogar mit dem weicheren Gyps von Bologna. An einem schönen aber ziemlich weichen Gyps von Toscana (von Prof. FRAAS erhalten) konnte ich nach einiger Übung zwar die Schlagfigur, nicht aber die Knickungsbrüche nach β hervorbringen. An dem so sehr weichen und biegsamen Gyps von Reinhardsbrunn ist mir weder das Eine noch das

[1] TSCHERMAK. Min. Mitthl. 1875 S. 68.

Andere je gelungen. Dagegen wird man bei fortgesetztem unfäh-igen Spalten an allen Gypsen ohne Unterschied Spuren von Brüchen finden, welche ungefähr in die Richtung von Ξ fallen.

Der Gyps von Aschersleben, mit dem ich am liebsten operirte, zeigte noch eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit: alle mir zu Gebote stehenden Tafeln sind demselben grösseren Stücke entnommen und besitzen eine Doppelknickung nach t ( ), die an einen Zwilling erinnern könnte, während alle Platten einfach sind. Ohne Zweifel rührt diese Knickung her von einem mechanischen, in der Lagerstelle erlittenen ungleichförmig vertheilten gegenpaarigen Druck, bei welchem die Richtung nach t als natürliche Knickungsrichtung zur Geltung kam. Es ist gewiss nicht zufällig, dass auch im Gyps, wie bei Steinsalz und Doppelspath, eine Fläche leichtester Knickung mit innerer Umstellung der Krystallmoleküle zusammenfällt mit einer Zwillingsfläche.

Ohne Zweifel hat aber der Gyps noch eine zweite natürliche Knickungsrichtung, welche in der Medianebene genau oder nahezu senkrecht ist zum muschligen Bruch. Hiermit hängen wohl die cylindrisch gekrümmten Zwillinge von Reinhardsbrunn zusammen; ich habe aber keine Veranlassung, in diesem Aufsatze, in welchem ich zunächst nur darauf ausging, den Bruch nach Ξ zu endlicher Geltung zu bringen, auf diese an sich interessante Besonderheit näher einzugehen.

12. Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von K. Weierstrass.

(Vorgelegt am 22. Februar: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. X]; — ausgegeben am 1. März.)

Fortsetzung der am 15. Februar gelesenen Abhandlung.

II.

Nach dem, was im Vorhergehenden über den Convergenzbezirk der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n t^n$$

und die Beschaffenheit der Zahlen β_n festgestellt worden ist, besteht die Gleichung (I., 13), welche sich in der Form

$$\log t - \log 16 + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n t^n = \frac{1}{4}\left\{\log\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^4 - \log 16 + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}\right\}$$

schreiben lässt, sicher für jeden reellen, in dem Intervall (0 . . . 1) enthaltenen Werth, indem die bei der Herleitung dieser Gleichung mit t_0 bezeichnete Grösse, von der nur vorausgesetzt war, dass die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|\,t_0^n$$

einen endlichen Werth habe, nunmehr in Folge der Gleichungen

$$|\beta_n| = \beta_n\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = \log 16$$

gleich 1 angenommen werden kann. Setzt man also

$$e^{-\frac{1}{4}\log 16 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n t^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n t^n\,,$$

wo dann die Coefficienten γ_n gleich den α_n sämmtlich positive rationale Zahlen sind und $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n = 1$ ist, so hat man

$$\psi(t) = t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n t^n\right)^4 \tag{1.}$$

und zugleich

$$\psi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}. \tag{2.}$$

Die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist aber für jeden (reellen oder complexen) Werth der Grösse t convergent und stellt eine analytische Function derselben dar, wenn man von den vier Werthen, die man für jeden bestimmten Werth von t der Potenz $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ beilegen kann, einen so, wie folgt, fixirt.

Schliesst man von dem Gebiete einer unbeschränkt veränderlichen Grösse x die negativen reellen Werthe derselben, sowie auch die Stellen $0, \infty$ aus, so giebt es unter den unendlich vielen Werthen, die der natürliche Logarithmus von x für einen bestimmten Werth dieser Grösse annehmen kann, immer einen, dessen zweite Coordinate zwischen

$$-\pi \text{ und } +\pi$$

liegt. Dieser Werth des Logarithmus soll im Folgenden überall unter $\log x$ verstanden werden: er ist innerhalb des definirten Bereichs der Veränderlichen x eine eindeutige analytische Function derselben, indem sich, wenn x' irgend eine bestimmte Stelle des Bereichs ist, eine Umgebung derselben angeben lässt, innerhalb welcher die Reihe

$$\log x' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-x'}{x'}\right)^n \tag{3.}$$

einen solchen Werth des nat. Logarithmus von x darstellt, dessen zweite Coordinate gleich der von $\log x'$ zwischen $-\pi$ und π liegt. Daraus ergiebt sich insbesondere, dass

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-1)^n \tag{4.}$$

ist, wenn man die Grösse x auf den durch die Bedingung

$$|x-1| < 1$$

definirten Bereich beschränkt. Denn innerhalb dieses Bereichs sind die einander gleich gesetzten Ausdrücke beide eindeutige analytische Functionen von x: die Gleichung gilt daher für den ganzen Bereich, da sie nach dem eben Bemerkten für eine gewisse Umgebung der Stelle 1 besteht.

Wenn ferner x_0 eine bestimmte negative Grösse ist, so ist für die einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 angehörigen Werthe von x die zweite Coordinate der Grösse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n$$

negativ oder positiv, je nachdem die zweite Coordinate von $x-x_0$ positiv oder negativ ist: man hat daher im ersten Falle

$$\log x = \log(-x_0) + \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n, \tag{5.}$$

im zweiten dagegen

$$\log x = \log(-x_0) - \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n. \tag{6.}$$

Hiernach kommt, wenn x der Stelle x_0 sich nähert, je nachdem dies von der positiven oder der negativen Seite der Strecke $(-\infty \ldots 0)$ her geschieht, $\log x$ der Grenze $\log(-x_0) + \pi i$ oder der Grenze $\log(-x_0) - \pi i$ unendlich nahe. Bezeichnet man die durch die Formel

$$\log(-x_0) + \pi i, \quad \log(-x_0) - \pi i$$

gegebenen Werthe von $\log x_0$ beziehlich mit

$$\log \overset{+}{x}_0 \text{ und } \log \overset{-}{x}_0,$$

wo dann

$$\log \overset{+}{x}_0 = \log \overset{-}{x}_0 + 2\pi i \tag{7.}$$

ist, so hat man also nach dem Vorstehenden für die einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 angehörigen Werthe von x

$$\log x = \log \overset{\pm}{x}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^n, \tag{8.}$$

wo das obere oder untere Zeichen über x_0 gilt, je nachdem die zweite Coordinate von $x - x_0$ positiv oder negativ ist.

Aus der Definition von $\log \overset{\pm}{x}_0$, $\log \overset{-}{x}_0$ erhellt übrigens, dass beide Grössen innerhalb der Strecke $(-\infty \ldots 0)$ stetige Functionen von x_0 sind.

Definirt man ferner, für die betrachteten Werthe von x und für einen beliebigen Exponenten m, die Potenz x^m durch die Gleichung

$$x^m = e^{m \log x}, \tag{9.}$$

so ergeben sich aus den Gleichungen (3, 4.) beziehlich die folgenden:

$$x^m = x'^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n \left(\frac{x - x'}{x'}\right)^n, \quad \left((m)_n = \frac{(m,-1)^n}{(1,+1)^n}\right) \tag{10.}$$

$$x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n (x-1)^n; \tag{11.}$$

es ist also auch x^m eine eindeutige analytische Function von x.

Aus den Gleichungen (7, 8.) aber erhält man, wenn man für eine negative Grösse x_0

$$\begin{cases} (\overset{+}{x}_0)^m = e^{m\pi i}(-x_0)^m \\ (\overset{-}{x}_0)^m = e^{-m\pi i}(-x_0)^m \end{cases} \tag{12.}$$

setzt,

$$(\overset{+}{x}_0)^m = e^{2m\pi i}(\overset{-}{x}_0)^m \tag{13.}$$

$$x^m = (\overset{\pm}{x}_0)^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (m)_n \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^n, \tag{14.}$$

wo das obere oder das untere Zeichen über x_0 gilt, jenachdem die zweite Coordinate von $x - x_0$ positiv oder negativ ist. Der Bereich von x, innerhalb dessen die Gleichungen (10, 11, 14.) gelten, ist derselbe wie bei den entsprechenden Gleichungen (5, 6, 8.)

Endlich erhellt aus der Definition der Grössen

$$(\overset{+}{x}_0)^m, \quad (\overset{-}{x}_0)^m,$$

dass beide innerhalb der Strecke $(-\infty \ldots 0)$ stetige Functionen von x_0 sind.

Nach dem Vorstehenden ist, wenn man jetzt unter t eine unbeschränkt veränderliche Grösse versteht,

$$(1-t)^{\frac{1}{4}}$$

eine Function, welche für jeden der Strecke $(1 \ldots +\infty)$ nicht angehörigen Werth von t eindeutig definirt ist, während sie zwei Werthe hat, wenn t in der genannten Strecke angenommen wird. Setzt man, die Werthe $t=1$ und $t=\infty$ ausschliessend und mit ρ, σ reelle Grössen bezeichnend,

$$\log(1-t) = \rho + \sigma i,$$

so hat man

$$(1-t)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\tau}(\cos\tfrac{1}{4}\sigma + i\sin\tfrac{1}{4}\sigma),$$

und es ist daher, da σ in dem Intervall $(-\pi \ldots +\pi)$ liegt,

$$\left|1+(1-t)^{\frac{1}{4}}\right|^2 - \left|1-(1-t)^{\frac{1}{4}}\right|^2 = 4e^{\frac{1}{4}\tau}\cos\tfrac{1}{4}\sigma > 0.$$

Daraus folgt, dass der absolute Betrag von

$$\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$$

stets kleiner als 1, und demgemäss die Reihe auf der Rechten der Gleichung (2.) für jeden Werth von t unbedingt convergent ist. Das Letztere gilt selbst noch, wenn man der Grösse t einen der ausgeschlossenen Werthe giebt, indem $\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$ für $t=1$ den Werth 1, und für $t=\infty$ den Werth -1 hat.

Hiernach ist, wenn man nunmehr $\psi(t)$ durch die Gleichung

$$\psi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}\right)^{4n}$$

definirt, $\psi(t)$ eine Function, welche ebenso wie $\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$ nur für die zwischen 1 und $+\infty$ liegenden reellen Werthe von t zwei Werthe hat, für jeden andern Werth von t aber eindeutig bestimmt ist. Dabei ist zu beachten, dass die beiden Werthe von $\psi(t)$, die zu einem zwischen 1 und $+\infty$ liegenden reellen Werthe von t gehören, conjugirte com-

plexe Grössen sind, wie sich aus den Gleichungen (12.) unmittelbar ergiebt.

Aus dem eben in Betreff der Function $\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}}$ Bewiesenen ergiebt sich ferner, dass $\psi(1)=1$, $\psi(\infty)=-1$, für jeden von 1, ∞ verschiedenen Werth der Grösse t aber

$$|\psi(t)| < \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n,$$

also

$$|\psi(t)| < 1 \text{ ist.}$$

Schliesst man vom Gebiete der Veränderlichen die der Strecke $(1 \ldots +\infty)$ angehörigen Stellen aus, so ist nach dem Vorstehenden nicht nur $(1-t)^{\frac{1}{4}}$ eine eindeutige analytische Function, sondern dasselbe gilt auch von den Functionen

$$\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}},\ \psi(t),\ \vartheta_2^4\big(0,\ \psi(t)\big),\ \vartheta_3^4\big(0,\ \psi(t)\big),$$

und es besteht also die Gleichung (I, 27)

$$\vartheta_2^4\big(0,\ \psi(t)\big) = t\vartheta_3^4\big(0,\ \psi(t)\big),$$

deren Richtigkeit für die zwischen 0 und 1 enthaltenen reellen Werthe von t nachgewiesen worden ist, für jeden der jetzt betrachteten Werthe dieser Grösse.

Ist ferner t_1 ein zwischen 1 und $+\infty$ liegender reeller Werth von t und setzt man, unter $\varkappa$ eine positive Veränderliche verstehend,

$$\psi(t_1^+) = \operatorname*{Lim}_{\varkappa=0} \psi(t_1+\varkappa),\quad \psi(t_1^-) = \operatorname*{Lim}_{\varkappa=0} \psi(t_1-\varkappa),$$

so sind $\psi(t_1^+)$, $\psi(t_1^-)$ die beiden Werthe von $\psi(t)$ für $t=t_1$. Da nun $\psi(t_1+\varkappa)$, $\psi(t_1-\varkappa)$ sich stetig mit $\varkappa$ ändern, und die absoluten Beträge von $\psi(t_1^+)$, $\psi(t_1^-)$ beide kleiner als 1 sind, so erhellt, dass die vorstehende Gleichung auch noch für $t=t_1$ gilt, welchen von ihren beiden Werthen man auch der Grösse $\psi(t_1)$ geben mag.

Damit ist nun bewiesen:

Wird die Function $\psi(t)$ so, wie im Vorstehenden angegeben worden, definirt, so erhält man für jeden Werth der Veränderlichen t, mit Ausschluss von $t=1$ und $t=\infty$, einen die Gleichung

$$\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 = t$$

befriedigenden Werth der Grösse q, wenn man

$$q = \psi(t) = \frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-t)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n}$$

hetzt, wobei man, wenn t einen zwischen 1 und $+\infty$ enthaltenen reellen Werth hat, sowohl den einen als den andern der zugehörigen Werthe von $\psi(t)$ nehmen kann.

Die Coefficienten γ_n können entweder auf die im Vorhergehenden angegebene Weise oder auch durch folgendes Verfahren berechnet werden.

Nach der oben unter (1.) gegebenen Formel hat man für die dort betrachteten Werthe von t

$$\psi(t)^{\frac{1}{4}} = (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \ldots) t^{\frac{1}{4}},$$

also, wenn man

$$t^{\frac{1}{4}} = \xi, \ \psi(t)^{\frac{1}{4}} = \eta$$

setzt,

$$2\eta(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta^{4\nu(\nu+1)}) = \xi(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\eta^{4\nu^2})$$

oder

$$\eta = \frac{\xi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\xi\eta^{4\nu^2} - \eta^{(2\nu+1)(2\nu+1)}).$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man

$$\eta_n = \sum_{m=0}^{n} \gamma_m \xi^{4m+1} \qquad (n = 0, 1 \ldots \infty)$$

setzt, $\gamma_0 = \frac{1}{2}$ und

$$\gamma_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\xi\eta_n^{4\nu^2} - \eta_n^{(2\nu+1)(2\nu+1)} \right]_{\xi^{4n+3}},$$

wobei von der Summe nur diejenigen Glieder in Betracht kommen, in denen $4\nu\nu \leq 4n+3$ ist. Mittels dieser Formel erhält man

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}, \ \gamma_1 = \frac{2}{2^5}, \ \gamma_2 = \frac{15}{2^9}, \ \gamma_3 = \frac{150}{2^{13}} \text{ u. s. w.}^1$$

[1] Die Formel

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1-(1-k^2)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-k^2)^{\frac{1}{4}}} \right)^{4n+1}$$

habe ich seit vielen Jahren in meinen Vorlesungen über die elliptischen Functionen gegeben, aber auf eine andere Art wie hier abgeleitet. Wendet man von ihr nur die r ersten Glieder an, so ist der Fehler, den man begeht, dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$(1 - \sum_{n=0}^{r-1} \gamma_n) \cdot \left| \frac{1-(1-k^2)^{\frac{1}{4}}}{1+(1-k^2)^{\frac{1}{4}}} \right|^{4r+1}.$$

Vergl. die »Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen« von H. A. Schwarz, S. 56.

III.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie man sämmtliche Werthe von q findet, die für einen und denselben Werth von t die Gleichung

$$\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 = t \tag{1.}$$

befriedigen. Dazu ist erforderlich, dass man für jede ϑ-Function alle Werthe des Arguments kenne, für welche dieselbe bei einem gegebenen Werth von q verschwindet. Diese Werthe lassen sich sowohl durch Umwandlung der ϑ-Reihen in unendliche Producte (wozu die in den *Fund. nov.* hergeleitete identische Gleichung

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{n}z)(1+q^{n}z^{-1}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\nu\nu}z^{\nu}$$

dient) als auch, wenn man nur die von JACOBI in der mehrgenannten Abhandlung entwickelten Sätze benutzen will, auf folgende Weise finden.

Aus der Gleichung[1]

$$\frac{\vartheta'(y)}{\vartheta(y)} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\frac{\vartheta_1(x-y)}{\vartheta_1(x+y)} = \frac{\vartheta_1(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta^2(x)}{\vartheta(y)\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)},$$

welche sich im ersten Bande der JACOBI'schen Werke auf S. 536 unter (I. 4) findet, ergiebt sich, wenn man beide Seiten nach Potenzen von y entwickelt, durch Vergleichung der Anfangsglieder

$$\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{d^2\log\vartheta_1(x)}{dx^2} = \frac{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta^2(x)}{\vartheta_1^2(x)}. \tag{2.}$$

Ist nun ω irgend ein Werth, für den $\vartheta_1(\omega) = 0$ ist, so folgt aus der vorstehenden Gleichung, dass der Quotient $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}$ für $x = \omega$ jedenfalls verschwindet, während aus den Gleichungen (2., 3.) auf S. 511 a. a. O. erhellt, dass $\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$ für $x = \omega$ von Null verschiedene, endliche Werthe haben. Aus der Formel für $\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)}$ (S. 513 a. a. O.) ergiebt sich hiernach

$$\frac{\vartheta_1(x+\omega)}{\vartheta(x+\omega)} = +\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)},$$

und man hat also

$$\frac{d^2\log\vartheta_1(x+\omega)}{dx^2} = \frac{d^2\log\vartheta_1(x)}{dx^2},$$

woraus

$$\vartheta_1(x+\omega) = Ce^{-2\nu\pi i}\vartheta_1(x) \tag{3.}$$

folgt, wo C, ν von x unabhängige Grössen bezeichnen.

[1] Bei den folgenden Formeln ist vorausgesetzt, dass in allen vorkommenden ϑ-Functionen die Grösse q denselben Werth habe.

Aus den Gleichungen (3.) auf S. 502 a. a. O. erhält man

(4.) $\vartheta_1(x+\pi) = -\vartheta_1(x)$, $\vartheta_1(x - i\log q) = -q^{-1}e^{-2xi}\vartheta_1(x)$;

setzt man also in (3.) $x+\pi$, $x - i\log q$, und in (4.) $x+\omega$ für x, so ergeben sich die Gleichungen

$$\vartheta_1(x+\omega+\pi) = -e^{-2\nu\pi i}\cdot Ce^{-2\nu xi}\vartheta_1(x)$$
$$\vartheta_1(x+\omega+\pi) = -Ce^{-2\nu xi}\vartheta_1(x)$$
$$\vartheta_1(x+\omega - i\log q) = -e^{-2\nu\log q}\cdot q^{-1}Ce^{-2(\nu+1)xi}\vartheta_1(x)$$
$$\vartheta_1(x+\omega - i\log q) = -e^{-2\omega i}\cdot q^{-1}Ce^{-2(\nu+1)xi}\vartheta_1(x).$$

Es muss also sein

$$e^{-2\nu\pi i} = 1\,,\ e^{-2\omega i} = e^{-2\nu\log q},$$

und somit

(5.) $$\omega = \mu\pi - \nu i\log q,$$

wo μ, ν ganze Zahlen bedeuten. Umgekehrt ist, wie aus den Gleichungen (4.) leicht abgeleitet werden kann, stets

$$\vartheta_1(\mu\pi - i\nu\log q) = 0,$$

wenn μ, ν beliebige ganze Zahlen sind.

Aus der Gleichung

$$\vartheta_1(\omega + x) = Ce^{-2\nu xi}\vartheta_1(x)$$

ist ersichtlich, dass $\vartheta_1'(\omega)$ nicht gleich Null ist, die Gleichung $\vartheta_1(x) = 0$ also nur einfache Wurzeln hat. Da ferner

$$\vartheta_1(x + \tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta_2(x)$$
$$\vartheta_1\left(x - \frac{i}{2}\log q\right) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-xi}\vartheta(x)$$
$$\vartheta_1\left(x + \tfrac{1}{2}\pi - \frac{i}{2}\log q\right) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-xi}\vartheta_3(x),$$

so werden sämmtliche Wurzeln der Gleichungen

$$\vartheta_2(x) = 0\,,\ \vartheta(x) = 0\,,\ \vartheta_3(x) = 0$$

beziehlich durch die Formeln

$$(\mu + \tfrac{1}{2})\pi - i\nu\log q\,,\ \mu\pi - i(\nu+\tfrac{1}{2})\log q\,,\ (\mu+\tfrac{1}{2})\pi - i(\nu+\tfrac{1}{2})\log q$$

gegeben, und es hat jede dieser Gleichungen ebenfalls nur einfache Wurzeln. Der Werth von $\log q$ kann in den vorstehenden Formeln beliebig fixirt werden.

Setzt man nun

(6.)
$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{\vartheta_3^2(0,q)} \\ f(u,q) = \dfrac{\vartheta_3(0,q)}{\vartheta_2(0,q)}\dfrac{\vartheta_1(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\ f_1(u,q) = \dfrac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_2(0,q)}\dfrac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta(x,q)} \\ f_2(u,q) = \dfrac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\dfrac{\vartheta_3(x,q)}{\vartheta(x,q)}, \end{cases}$$

so sind $f(u,q), f_1(u,q), f_2(u,q)$ eindeutige Functionen der Grössen u und q, und es bestehen für dieselben, wenn man

$$t = \left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4$$

setzt, die folgenden Gleichungen:

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f(u,q)}{\partial u} = f_1(u,q) f_2(u,q), \quad \dfrac{\partial f_1(u,q)}{\partial u} = -f(u,q) f_2(u,q), \quad \dfrac{\partial f_2(u,q)}{\partial u} = -t f(u,q) f_1(u,q) \\ f(0,q) = 0, \quad f_1(0,q) = 1, \quad f_2(0,q) = 1. \end{cases}$$

Beschränkt man die Veränderliche u auf eine gewisse Umgebung der Stelle 0, so können $f(u,q), f_1(u,q), f_2(u,q)$ in der Form gewöhnlicher Potenzreihen dargestellt werden. Die Coefficienten dieser Reihen ergeben sich aus den Gleichungen (7.), und zwar als ganze rationale Functionen der Grösse t, in denen die Coefficienten rationale Zahlen sind. Wenn es daher zwei Grössen q, q_1 giebt, zu denen derselbe Werth von t gehört, so erhält man für $f(u,q_1), f_1(u,q_1), f_2(u,q_1)$ dieselben Reihen wie für $f(u,q), f_1(u,q), f_2(u,q)$, woraus sich in bekannter Weise folgern lässt, dass für jeden endlichen Werth von u die Gleichungen

$$(8.)\quad f(u,q_1) = f(u,q), f_1(u,q_1) = f_1(u,q), f_2(u,q_1) = f_2(u,q'),$$

gelten.

Nun wird nach dem Vorhergehenden

$$(9.)\quad \begin{cases} f(u,q) = 0 \text{ für } u = (\mu\pi - \nu i \log q)\,\vartheta_3^2(0,q) \\ f_1(u,q) = 0 \text{ für } u = \left((\mu + \tfrac{1}{2})\pi - \nu i \log q\right)\vartheta_3^2(0,q) \\ \dfrac{1}{f(u,q)} = 0 \text{ für } u = \left(\mu\pi - (\nu + \tfrac{1}{2})\, i \log q\right)\vartheta_3^2(0,q) \\ f_2(u,q) = 0 \text{ für } u = \left((\mu + \tfrac{1}{2})\pi - (\nu + \tfrac{1}{2})\, i \log q\right)\vartheta_3^2(0,q), \end{cases}$$

wenn unter μ, ν beliebig anzunehmende ganze Zahlen verstanden werden. Zugleich gilt, dass jede der vorstehenden vier Functionen nur für die angegebenen Werthe von u verschwindet.

In Folge der Gleichungen $f_1(u,q) = f_1(u,q_1), f(u,q) = f(u_1,q_1)$ wird nun

$$f_1(u,q) = 0 \text{ auch für } u = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0,q_1)$$

und

$$\frac{1}{f(u,q)} = 0 \text{ auch für } u = -\frac{i}{2}\vartheta_3^2(0,q_1)\log q_1;$$

es müssen sich also vier ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so bestimmen lassen, dass

$$(10.)\quad \begin{cases} \pi\vartheta_3^2(0,q_1) = \vartheta_3^2(0,q)\cdot\left((2\alpha+1)\pi - 2\beta i \log q\right) \\ -i\vartheta_3^2(0,q_1)\log q_1 = \vartheta_3^2(0,q)\cdot\left(2\gamma\pi - (2\delta+1)\, i \log q\right) \end{cases}$$

ist. Aber ebenso muss es vier ganze Zahlen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ geben, für welche die Gleichungen

$$(11.)\quad \left\{\begin{array}{l} \pi\vartheta_3^2(0,q) = \vartheta_3^2(0,q_1)\cdot\left((2\alpha'+1)\pi - 2\beta' i\log q_1\right) \\ i\vartheta_3^2(0,q)\log q = \vartheta_3^2(0,q_1)\cdot\left(2\gamma'\pi - (2\delta'+1)\log q_1\right) \end{array}\right.$$

gelten. Aus diesen vier Gleichungen ergiebt sich, wenn man $\varepsilon = (2\alpha'+1)(2\delta'+1) - 4\beta'\gamma'$ setzt,

$$\vartheta_3^2(0,q)\cdot\left(\left(2\alpha+1-\frac{2\delta'+1}{\varepsilon}\right)\pi - \left(2\beta+\frac{2\beta'}{\varepsilon}\right) i\log q\right) = 0$$

$$\vartheta_3^2(0,q)\cdot\left(\left(2\gamma+\frac{2\gamma'}{\varepsilon}\right)\pi - \left(2\delta+1-\frac{2\alpha'+1}{\varepsilon}\right) i\log q\right) = 0;$$

diese Gleichungen können aber, da $\vartheta_3(0,q)$ und der reelle Theil von $\log q$ stets von Null verschiedene Werthe haben, nur bestehen, wenn

$$2\alpha+1 = \frac{2\delta'+1}{\varepsilon}, \quad 2\beta = -\frac{2\beta'}{\varepsilon}, \quad 2\gamma = -\frac{2\gamma'}{\varepsilon}, \quad 2\delta+1 = \frac{2\alpha'+1}{\varepsilon}$$

ist; folglich muss

$$(2\alpha+1)(2\delta+1) - 4\beta\gamma = \frac{1}{\varepsilon},$$

also

$$\varepsilon = \pm 1, \quad (2\alpha+1)(2\delta+1) - 4\beta\gamma = \pm 1$$

sein.

Aus (11.) ergiebt sich nun

$$(12.)\qquad \frac{1}{\pi i}\log q_1 = \frac{2\gamma + \frac{2\delta+1}{\pi i}\log q}{2\alpha+1+\frac{2\beta}{\pi i}\log q}.$$

Damit q, q_1 dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 seien, ist erforderlich, dass die zweite Coordinate von $\frac{1}{\pi i}\log q$ sowohl als von $\frac{1}{\pi i}\log q_1$ positiv ist, und das Letztere findet in Folge des Ersteren nur statt, wenn $(2\alpha+1)(2\delta+1) - 4\beta\gamma$ einen positiven Werth hat. Es muss also

$$(13.)\qquad (2\alpha+1)(2\delta+1) - 4\beta\gamma = 1$$

sein.

Nimmt man nun $q = \psi(t)$, so ist durch das Vorstehende bewiesen:

Bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen, unter denen die Relation (13.) besteht, so sind alle für einen gegebenen Werth von t die Gleichung

$$\left(\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right)^4 = t$$

befriedigende Werthe von q in der Formel

$$\frac{2\gamma\pi + (2\delta+1)\log\psi(t)}{(2\alpha+1)\pi + 2\beta\log\psi(t)}$$

enthalten. Dabei sind jedoch die Werthe $t = 0, 1, \infty$ auszuschliessen.

Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob man durch diese Formel, wenn man in ihr für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige, der angegebenen Bedingung genügende ganze Zahlen setzt, stets einen die in Rede stehende Gleichung befriedigenden Werth von q erhält. Dass dies wirklich der Fall ist, lässt sich leicht durch die Theorie der sogenannten linearen Transformation der ϑ-Functionen begründen, kann aber auch bloss mit Heranziehung der Formeln, mittels welcher sich die elliptischen Functionen des Arguments ui und des Moduls k auf die Functionen des Arguments u und des Moduls $k' = \sqrt{1 - k^2}$ zurückführen lassen, nachgewiesen werden. Dies will ich im Folgenden ausführen.

(Schluss folgt.)

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

INHALTSVERZEICHNISS.

		Seite
3.	Mendelssohn: Untersuchungen über Reflexe	31
4.	Dames: Über eine tertiäre Wirbelthierfauna von der westlichen Insel des Birket-el-Qurun im Fajum (Aegypten) (hierzu Taf. I)	35
5.	v. Heldreich: Bericht über die botanischen Ergebnisse einer Bereisung Thessaliens	61
6.	Peters: Über Mantipus und Phrynocara, zwei neue Batrachiergattungen aus dem Hinterlande des Reisenden J. M. Hildebrandt von Madagascar	71
7.	Lipschitz: Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften	75
8.	Weierstrass: Zur Theorie der elliptischen Functionen	95
9.	Fritsch: Bericht über die Fortsetzung der Untersuchungen an elektrischen Fischen (hierzu Taf. II)	107
10.	Schmitz: Untersuchungen über die Befruchtung der Florideen (hierzu Taf. III)	113
11.	Reusch: Über eine neue Spaltungsrichtung am Gypsquarb	157
12.	Weierstrass: Zur Theorie der elliptischen Functionen (Fortsetzung)	163

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE

aus den Jahren 1879, 1880 und 1881.

(In Commission in Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.)

Rammelsberg:	Über die chemische Natur der Meteoriten. 2. Abtheilung	ℳ 3.00
Rose:	Beiträge zur Petrographie der plutonischen Gesteine. 3. Abtheilung	- 9.00
Virchow:	Beiträge zur Landeskunde der Troas	- 10.00
Schott:	Kitai und Karakitai, ein Beitrag zur Geschichte Ost- und Innerasiens	- 1.00
Krumbacher, P.:	Codicis Theodosiani fragmenta Taurinensia	- 5.00
Curtius:	Das archaische Bronzerelief aus Olympia	- 2.50
Buschmann:	Die Ordinal-Zahlen der mexicanischen Sprache	- 2.50
Edzardi:	Über die Wiener und Heidelberger Handschrift des Otfrid	- 3.00
Schrader:	Zur Kritik der Inschriften Tiglath-Pileser's II., des Asarhaddon und des Asurbanipal	- 3.00
Dillmann:	Zur Geschichte des Axumitischen Reichs im vierten bis sechsten Jahrhundert	- 2.50
Sachau, E.:	Über die Lage von Tigranokerta	- 5.50
Hagen:	Über Veränderung der Wasserstände in den Preussischen Strömen	- 1.50
Varges:	Über die Anfänge der Heroiden des Ovid	- 1.50
Waitz:	Über eine alte Genealogie der Welfen	- 0.80
Schott:	Über ein chinesisches Mengwerk, nebst einem Anhang linguistischer Verbesserungen zu zwei Bänden der Erdkunde Ritter's	- 2.00
Zeller:	Über die Messung psychischer Vorgänge	- 0.80
Virchow:	Über die Weddas von Ceylon und ihre Beziehungen zu den Nachbarstämmen	- 8.00
Borrmann:	Der Tempel der Athena Polias zu Pergamon	- 2.00

Gerland, Ernst: Leibnizens und Huygens' Briefwechsel mit Papin, nebst der Biographie Papin's und einigen zugehörigen Briefen und Actenstücken. Auf Kosten der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben. Berlin 1881 . . . . . ℳ 13.50

Zur gefälligen Beachtung.

Diejenigen Empfänger der Sitzungsberichte oder der mathematischen und naturwissenschaftlichen Mittheilungen, welche Exemplare von der Akademie direct beziehen, werden ersucht, falls ihnen Theile des Jahrgangs 1882 nicht zugekommen sein sollten, hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen. Eine Berücksichtigung etwaniger Reclamationen kann nur in Aussicht gestellt werden, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1883 angebracht werden.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite des Umschlages der »Sitzungsberichte« abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden Theil des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wurde beschlossen, einen Auszug aus diesen Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herauszugeben. Diese Sonderausgabe wird sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reinen Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck enthalten, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder ihr fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch demselben Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, Reden und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erhalten besondere Paginirung, doch steht auf jeder Seite eingeklammert die entsprechende Seitenzahl der »Sitzungsberichte«, und bei dem Titel jeder Mittheilung die römische Ordnungszahl des Stückes (St.) der Berichte, dem sie entlehnt ist.

Die »Mittheilungen« erscheinen vom 1. Januar 1882 ab bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird in der Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften und Instituten, welche bisher die »Monatsberichte« empfingen, steht es frei, statt der vollständigen »Sitzungsberichte« fortan nur die »Mathematischen und naturwissenschaftlichen Mittheilungen aus den Sitzungsberichten« sich zuschicken zu lassen, und sie werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat so bald wie möglich Nachricht zu geben. Wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Mittheilungen« siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann) in Berlin erscheinen:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

Jahrgang 1883. gr. 8. Geheftet. Preis 12 ℳ.

Diese »Sitzungsberichte« erscheinen in Zwischenräumen von acht Tagen, und enthalten sämmtliche zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen und wissenschaftlichen Mittheilungen, welche in den Sitzungen der Akademie gemacht wurden.

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem ebenda in Commission:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

Jahrgang 1883. gr. 8. Geheftet. Preis 8 ℳ.

Dieselben erscheinen in monatlichen Zwischenräumen und enthalten nur die geschäftlichen und die wissenschaftlichen Mittheilungen aus dem Gebiete der Mathematik wie der Naturwissenschaft im weitesten Sinne, welche in den Sitzungen der Akademie gemacht wurden.

Der Jahrgang 1882 der »Sitzungsberichte« sowie der »Mittheilungen« ist von derselben Buchhandlung zu beziehen.

STK
Q3
M38

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

JAHRGANG 1883.

BERLIN, 1883.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI FERD. DÜMMLER'S VERLAGS-BUCHHANDLUNG
HARRWITZ & GOSSMANN.

INHALT.

		Seite
1.	Rammelsberg: Beiträge zur Kenntniss der vanadinsauren und phosphorsauren Salze	1
2.	E. du Bois-Reymond: Darwin und Kopernicus. Nachruf	27
3.	Mendelssohn: Untersuchungen über Reflexe	31
4.	Dames: Über eine tertiäre Wirbelthierfauna von der westlichen Insel des Birket-el-Qurün im Fajum (Aegypten) (hierzu Taf. I)	35
5.	v. Heldreich: Bericht über die botanischen Ergebnisse einer Bereisung Thessaliens	61
6.	Peters: Über Mantipus und Phrynocara, zwei neue Batrachiergattungen aus dem Hinterlasse des Reisenden J. M. Hildebrandt von Madagascar	71
7.	Lipschitz: Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften	75
8.	Weierstrass: Zur Theorie der elliptischen Functionen	95
9.	Fritsch: Bericht über die Fortsetzung der Untersuchungen an elektrischen Fischen (hierzu Taf. II)	107
10.	Schmitz: Untersuchungen über die Befruchtung der Florideen (hierzu Taf. III)	113
11.	Reusch: Über eine neue Spaltungsrichtung am Gypsspath	157
12.	Weierstrass: Zur Theorie der elliptischen Functionen (Fortsetzung)	163
13.	Auwers: Punta Arenas	175
14.	E. du Bois-Reymond: Bericht über die Wirksamkeit der Humboldt-Stiftung für Naturforschung und Reisen	203
15.	E. du Bois-Reymond: Über secundär-elektromotorische Erscheinungen an Muskeln, Nerven und elektrischen Organen	205
16.	von Helmholtz: Bestimmung magnetischer Momente mit der Waage	267
17.	Quincke: Über die Änderung des Volumens und des Brechungsexponenten von Flüssigkeiten durch hydrostatischen Druck	271
18.	Quincke: Über die Dielektricitäts-Constante und die elektrische Doppelbrechung isolirender Flüssigkeiten	275
19.	Kundt: Über eine einfache Methode zur Untersuchung der Thermo-Elektricität und Piezo-Elektricität der Krystalle (hierzu Taf. IV)	283
20.	Kohlrausch: Über ein Verfahren elektrische Widerstände unabhängig von Zuleitungswiderständen zu vergleichen	289
21.	Kronecker: Zur Theorie der elliptischen Functionen	299
22.	Fuchs: Über Functionen einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale einer gleich grossen Anzahl gegebener Functionen entstehen	309
23.	G. Kirchhoff: Über die elektrischen Strömungen in einem Kreiscylinder	319
24.	Kronecker: Zur Theorie der elliptischen Functionen	325
25.	Lipschitz: Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements	331
26.	Siemens: Über die Zulässigkeit der Annahme eines elektrischen Sonnen-Potentials und dessen Bedeutung zur Erklärung terrestrischer Phänomene	351
27.	von Helmholtz: Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. Dritter Beitrag	373
28.	Webský: Über Jeremejewit und Eichwaldit vom Berge Soktuj in Daurien	393
29.	Baginsky: Zur Physiologie der Gehörschnecke	407
30.	Roth: Über geröllführende Gneisse von Obermittweida im sächsischen Erzgebirge	411

Seite

31. Roth: Über die Vorkommen der Küste Labrador 419
32. Kronecker: Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen 421
33. Schwendener: Zur Theorie der Blattstellungen (hierzu Taf. V) 435
34. Munk: Über die centralen Organe für das Sehen und das Hören bei den Wirbelthieren . . . 469
35. Toepler: Über einige Eigenschaften kreuzweise verbundener Magnetstäbe 505
36. Kronecker: Weitere Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen 513
37. Kronecker: Zur Theorie der Formen höherer Stufen 521
38. Voigt: Bestimmung der Elasticitäts-Constanten des Kupfers 525
39. Oberbeck: Über die magnetisirende Wirkung elektrischer Schwingungen 539
40. Toepler: Über die Bestimmung der magnetischen Horizontalintensität mit Anwendung der Wage 549
41. Burmeister: Beschreibung des Panzers von Eutatus Seguini (hierzu Taf. VI) 565
42. Frenzel: Über die Mitteldarmdrüse (Leber) der Decapoden 585
43. Krause: Über die Beziehungen der Grosshirnrinde zu Kehlkopf und Rachen 593
44. Weingarten: Über die Differentialgleichung der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden können 595
45. Hagen: Die wahrscheinlichen Fehler der Constanten 599
46. Rammelsberg: Über den Cuprodescloizit, ein neues Vanadinerz aus Mexico 603
47. Landolt: Über die Existenzdauer der unterschwefligen Säure in wässerigen Lösungen 605
48. R. Weber: Über den Einfluss der Zusammensetzung des Glases auf die Depressions-Erscheinungen der Thermometer 615
49. Weierstrass: Zur Theorie der elliptischen Functionen 621

Namenregister 649
Sachregister 651

1. Beiträge zur Kenntniss der vanadinsauren und phosphorsauren Salze.

Von C. Rammelsberg.

(Vorgelegt am 11. Januar: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. I]: — ausgegeben am 18. Januar.)

I.

Die Vanadate der Alkalimetalle.

Berzelius hat bekanntlich seine Erfahrungen in diesem Gebiet auf die kurze Beschreibung zweier Arten von Salzen beschränkt, nämlich weisser Salze, welche er neutrale nannte, und rother, welche er als zweifach saure bezeichnete. Allein mit Ausnahme des Ammoniaksalzes, welches wir heute als $AmVO^3$ kennen, finden wir bloss eine Wasserbestimmung bei seinem zweifach vanadinsauren Kali angeführt, sonst aber keine analytische Untersuchungen, woran ihn wohl die geringe Menge Vanadin gehindert haben mag, mit deren Hülfe er die zahlreichen Versuche in seiner klassischen Arbeit über das seltene Element vor 52 Jahren durchzuführen gezwungen war.

Carl von Hauer theilte in den Jahren 1856, 1859 und 1860 Versuche über die Vanadate von Ammonium, Natrium, Baryum, Strontium und Calcium mit,[1] jedoch nicht nach einem bestimmten Plan, und ohne die Krystallformen zu bestimmen, welche Lücke, wenigstens bezüglich der Erdsalze, später von Grailich theilweise ausgefüllt wurde.

Roscoe, welcher den Irrthum, in welchen Berzelius in Hinsicht auf das Atomgewicht des Vanadins und der Sauerstoffmultipeln seiner Oxyde verfallen war, aufdeckte, hat seine Forschungen nur auf einzelne Vanadate ausgedehnt, während Carnelley die Thalliumsalze untersuchte.

Schon aus diesen Arbeiten ergab sich, dass die Vanadinsäure weit mehr als bloss zwei Sättigungsstufen bildet.

Im Jahre 1875 theilte Blomstrand eine grössere Zahl von Formeln mit, welche sich für die Vanadate der Alkalien und der Erden aus einer Untersuchung von Norblad in Upsala ergeben hatten,[2]

[1] J. f. pr. Chem. 69, 385; 76, 156; 80, 324.

[2] Ber. d. d. chem. Ges. 8, 126.

allein diese Arbeit ist bis jetzt, wie es scheint, bei uns unbekannt geblieben. Inzwischen hatte ich selbst dieses Gebiet in Angriff genommen, unterstützt durch grössere Mengen von Vanadinsäure, welche ich aus südamerikanischen Erzen (Vanadinit und Descloizit) darstellen liess. Um die von mir erlangten Resultate mit denen Norblad's vergleichen zu können, hatte Prof. Blomstrand in Lund die Güte, mir das Original mitzutheilen,[1] und ich habe die wichtigsten Punkte in die nachfolgende Abhandlung aufgenommen.

Meine Untersuchungen beschränken sich auf die Alkalisalze. Die basischen und normalen wurden auf trockenem Wege, die sauren aus jenen durch Einwirkung von Essigsäure oder Salpetersäure dargestellt. Diese gelben, rothen oder orangefarbigen sauren Salze werden, wenn man sie durch Erhitzen entwässert, unlöslich, und ebensolche unlösliche Salze erhält man, wenn man die Carbonate der Alkalien oder die normalen Vanadate mit einer bestimmten grösseren Menge Vanadinsäure schmilzt, ein Umstand, der zu weiteren Versuchen auffordert.

Zur Trennung des Vanadins von Kalium, Natrium oder Lithium wurde die Lösung mit essigsaurem Blei und ein wenig Ammoniak gefällt, das Filtrat durch kohlensaures Ammoniak vom Blei befreit und das Alkali als Sulfat bestimmt, während der Bleiniederschlag in Salpetersäure gelöst, das Blei durch Schwefelsäure entfernt und die Vanadinsäure durch Abdampfen und schwaches Glühen erhalten wurde.

Vanadinsaures Ammoniak.

1. Normales Salz.

Von allen Vanadaten das bekannteste, da es wegen seiner Schwerlöslichkeit unter Umständen zur Vanadinbestimmung dient. Berzelius erhielt 77·59, Roscoe 77·75 Procent V^2O^5, während die Rechnung für Am^1VO^3 77·82 Procent V^2O^5 ergiebt.

Norblad führt an, dass man zuweilen deutliche Krystalle erhalte, welche mit denen von KVO^1 isomorph seien, jedoch theilt er keine Messungen mit.

Auch bei grossem Ammoniaküberschuss erhält man kein basischeres Salz in fester Form.

2. Zweifach saures Salz.

Das von Hauer als solches beschriebene Salz ist, wie wir weiterhin sehen werden, siebendrittelfach saures.

---

[1] Bidrag till kännedomen om Vanadiums Amfidsalter. Upsala Universitets Årsskrift 1873.

NORBLAD, welcher zur Darstellung den von BERZELIUS und von HAUER eingeschlagenen Weg betrat, giebt keine Beschreibung des Salzes, nur eine Analyse, nach welcher er allerdings

$$Am^2V^4O^{11} + 4\,aq$$

vor sich hatte.

Vanadin	41.81	4 V = 205.6	= 41.99
Ammonium	7.36	2 Am = 36	= 7.35
Wasser	15.00	11 O = 176	
		4 H^2O = 72	= 14.70
		489.6.	

3. Fünfhalbfach saures Salz.

Fügt man zur Lösung des normalen nur so viel Essigsäure, dass sie dauernd rothgelb gefärbt ist, so erhält man bei freiwilligem Verdunsten schöne rothe Krystalle,

$$Am^4V^{10}O^{27} + 10\,aq.$$

	a.	b.	c.			
Vanadin . . .	42.56	42.66	42.87	10 V =	514	= 42.81
Ammonium .	5.88	5.89	5.78	4 Am =	72	= 6.02
				27 O =	432	
				10 H^2O =	180	= 15.03
					1198.	

Dieses Salz enthält nur 1 Procent Vanadin mehr als das vorige, bei fast gleicher Wassermenge. Meine Ammoniumbestimmungen erlauben aber nicht, es für identisch mit jenem zu halten. Überdies werden wir die gleiche Sättigungsstufe auch bei einem Natronsalze finden.

Die Krystalle gehören dem viergliedrigen System an. Es sind Combinationen des zweiten Prismas a mit einem Quadratoktaeder o, der Endfläche c und zwei Vierflächnern s und t aus der Endkantenzone von o.

$o = a : a : c$ $\quad a = a : \infty a : \infty c$
$s = a : {}^1/_2 a : c$ $\quad c = c : \infty a : \infty c$
$t = a : {}^1/_3 a : c$

$$a : c = 1 : 0.7595.$$

		Berechnet.	Beobachtet.
o	2 A =		* 117° 40′
	2 C =	94° 6′	94 30
	o : a =	121 10	121 30
	c =	132 57	133 0
s	2 X =	134 40	
	2 Y =	115 14	
	2 Z =	119 0	

		Berechnet.	Beobachtet.
	s : a =	140° 25′	
	c =	120 30	
	o =	160 45	160° 45′
t	2 X =	146 4	
t	2 Y =	131 14	
t	2 Z =	134 42	
	t : a =	151 8	151 5
	o =	150 2	150 0
	s =	169 17.	

Die Vierkantner s und t, welche immer nur schmale Abstumpfungen der Kanten a o bilden, sind nur unvollzählig vorhanden, die Krystalle überhaupt durch Vorherrschen einer Fläche o und Zurücktreten der a unsymmetrisch ausgebildet.

4. Siebendrittelfach saures Salz.

Aus essigsaurer Lösung erhielt ich nur einmal diese Verbindung in Gestalt eines schwerlöslichen, pulverigen gelbrothen Salzes, dessen Analyse auf die Formel

$$Am^3V^7O^{19} + 2\,aq$$

führt.

Vanadin	47·93	7 V =	359·8 =	47·73
Ammonium	7·23	3 Am =	54 =	7·16
		19 O =	304	
		2 H^2O =	36	
			753·8.	

Dieselbe Sättigungsstufe hat Hauer[1] als Divanadat beschrieben, was seiner Analyse widerspricht, weil dieselbe Am : V = 1 : 2.34 giebt. Danach hätten

$$Am^3V^7O^{19} + 7\,aq$$

gehabt

Vanadin	42.37	7 V =	359·8 =	42.64
Ammonium	6.35	3 Am =	54 =	6.40
		19 O =	304	
		7 H^2O =	126 =	14.93
			843.8.	

Ich möchte indessen glauben, dass Hauer das Salz $Am^4V^{10}O^{27} + 10\,aq$ unter Händen gehabt hat. Eine krystallographische Bestimmung seinerseits würde darüber entschieden haben.

[1] J. f. pr. Chem. 69, 385 und 80. 324.

5. Dreifach saures Salz.

Bei grösserem Zusatz von Essigsäure zum normalen, gleich wie aus der Mutterlauge vom fünfhalbfachen scheidet sich beim Erhitzen ein gelbes krystallinisches Pulver ab, während die Flüssigkeit sich entfärbt. In ähnlicher Art hat NORBLAD es dargestellt, der es als ein goldglänzendes Pulver erhielt, welches bei 350° alles Ammoniak verliert.

RG.

	a.	b.	c.	d.
Vanadin	51.05	50.71	50.98	50.39
Ammonium	6.17	6.14	6.26	6.14

NORBL.

	a.	b.	c.	d.
Vanadin	51.29	51.29		
Ammonium	6.08	6.08	5.87	5.94.

AmV^3O^8

3 V =	154.2	= 51.36
Am =	18	= 6.00
8 O =	128	
	300.2.	

HAUER giebt an, dass sein vermeintliches Divanadat bei mehrfachem Umkrystallisiren sich in leichtlösliche grosse rothe Krystalle verwandle, die er wiederum leider nicht näher bestimmt hat. Ihre Analyse führt aber auf ein Hydrat des Trivanadats,

$AmV^3O^8 + 3\,aq.$

	a.	b.			
Vanadin ..	43.17	43.32	3 V =	154.2	= 43.54
Ammonium	5.31	4.87	Am =	18	= 5.08
			8 O =	128	
			$3\,H^2O$ =	54	
				354.2.	

Weder NORBLAD noch mir ist die Darstellung eines krystallisirten wasserhaltigen Ammoniumtrivanadats gelungen.

Vanadinsaures Kali.

1. Drittelvanadat.

Durch Zusammenschmelzen von 1 Mol. V^2O^5 und 3 Mol. K^2CO^3 entsteht eine gelblichweisse krystallinische Masse, welche durch Wasser, wie wir weiterhin sehen werden, in freie Basis und Halbvanadat zersetzt wird.

2. Halbvanadat.

Die alkalische Lösung des Drittelvanadats liefert bei starker Concentration undeutliche weisse Krystalle des Salzes. Nach den übereinstimmenden Versuchen von mir und Norblad ist es

$$K^4V^2O^7 + 3\,aq.$$

	R.	N.		
Vanadin	24.26	23.19 — 24.04	$2\,V = 102.8$	$= 24.20$
Kalium	36.35	36.56	$4\,K = 156$	$= 36.72$
Wasser		12.62 — 13.75	$7\,O = 112$	
			$3\,HO = 54$	$= 12.71$
			424.8.	

Norblad dampfte eine Lösung von KVO^3 mit HKO stark ein, und erhielt das Salz in gut ausgebildeten, jedoch zerfliesslichen angeblich zwei- und eingliedrigen Krystallen der Combination o, o′, a, b. Messungen fehlen. Über Schwefelsäure verlieren sie 1 Mol., bei 100° 2 Mol. und beim Schmelzen alles Wasser.

3. Vierfünftelvanadat.

Setzt man der Mutterlauge des vorigen so viel Essigsäure hinzu, dass die entstehende Färbung nach längerem Erwärmen wieder verschwindet, so setzen sich beim Verdunsten weisse kugelig gruppirte feine Krystalle ab, welche der Analyse nach

$$K^{10}V^8O^{25} + 7\,aq$$

sind.

	a.	b.		
Vanadin	30.97	30.95	$8\,V = 411.2$	$= 30.97$
Kalium	29.62	29.64	$10\,K = 390$	$= 29.38$
			$25\,O = 400$	
			$7\,H^2O = 126$	$= 9.48$
			1327.2.	

4. Normales Salz.

Durch Schmelzen gleicher Mol. V^2O^5 und K^2CO^3 entsteht eine weisse krystallinische Masse, deren Lösung undeutliche Krystalle von

$$KVO^3 + 7\,aq$$

gab.

Vanadin	19.57	$V = 51.4$	$= 19.44$
		$K = 39$	$= 14.75$
		$3\,O = 48$	
		$7\,H^2O = 126$	$= 47.66$
		264.4.	

NORBLAD erhielt durch Auflösen von Vanadinsäure in Kalilauge, Neutralisiren mit Essigsäure und Eindampfen mikroskopische, farblose, linsenförmige Krystalle von

KVO^3

	a.	b.	c.		
Vanadin . .	36.28	37.07	36.88	V = 51.4	= 37.14
Kalium . . .			28.43	K = 39	= 28.18
				3 O = 48	
				138.4.	

Ausserdem beschreibt NORBLAD zwei Hydrate. Das eine bildete sich beim Kochen einer Lösung von Ammoniumdivanadat mit Kalilauge und erscheint in feinen, seidenglänzenden, kugelig gruppirten Nadeln; welche bei 110° ihren Wassergehalt verlieren. Die Analyse ergab

$KVO^3 + aq.$

	a.	b.		
Vanadin . .	32.87	32.22	V = 51.4	= 32.86
Kalium . . .	25.23	25.52	K = 39	= 24.94
Wasser . .	11.68	11.66	3 O = 48	
			H^2O = 18	= 11.51
			156.4.	

5. Anderthalbfach saures Salz.

Nur einmal habe ich diese Sättigungsstufe erhalten, als zu einer Lösung von KVO^3 Essigsäure gesetzt wurde. Es bildete sich ein braunrother krystallinischer Niederschlag, welcher in reinem Wasser schwerlöslich war.

Die Analyse führt zu

$K^4V^6O^{17} + 2\,aq.$

Vanadin	39.48	6 V = 308.4	= 39.93
Kalium	21.42	4 K = 156	= 20.20
Wasser	4.60	17 O = 272	
		$2H^2O$ = 36	= 4.66
		772.4.	

6. Zweifach saures Salz.

Es bildet sich vorzugsweise leicht, und scheidet sich in Form schöner goldglänzender Blätter oder Schuppen ab, wenn eine warme Lösung vom normalen Salz mit Essigsäure oder Salpetersäure versetzt wird und erkaltet. Beim Erhitzen verliert es Wasser und schmilzt zu einer rothbraunen Masse.

Auch NORBLAD beschreibt dieses Salz und sagt, es bilde rhombische Prismen mit den Hexaidflächen a und c, es verliere das Wasser

bei 200° C. und das zuvor geschmolzene sei fast unlöslich in Wasser. Es ist

$$K^2V^4O^{11} + 4\,aq.$$

	R.		N.				
	a.	b.	a.	b.			
Vanadin	38.31	38.55	38.00	38.03	4 V	= 205.6	= 38.67
Kalium.	14.85		16.35		2 K	= 78	= 14.67
Wasser	14.77		13.78	13.66	11 O	= 176	
					$4H^2O$	= 72	= 13.55
						531.6.	

Ein äusserlich ganz ähnliches und auf ähnliche Art dargestelltes Salz hält Norblad für ein anderes Hydrat, nämlich $2K^2V^4O^{11} + 7\,aq.$ Er fand in demselben 38.96 V. 15.43 K und 12.06 H^2O, es dürfte indessen mit dem vorigen identisch sein.

Nach der Beschreibung, welche Berzelius von dem Divanadat giebt, möchte man gleichfalls an das Hydrat mit 4 aq denken, obwohl er den Wassergehalt nur 10.42 Procent angiebt, was allerdings 3 aq (10.53 berechnet) entspricht.

7. Dreifach saures Salz.

Die stark gefärbte Mutterlauge des vorigen gab beim Erhitzen eine gelbe pulverige Abscheidung, während die Flüssigkeit sich entfärbte. Jene ist

$$KV^3O^8.$$

Dieses höchst schwerlösliche Salz wurde auch bei Norblad's Versuchen unter gleichen Erscheinungen erhalten.

	R.	N.				
		a.	b.			
Vanadin	48.45	48.02	47.57	3 V	= 154.2	= 48.01
Kalium.	11.54	11.58	12.89	K	= 39	= 12.14
				8 O	= 128	
					321.2.	

Ausserdem aber erwähnt Norblad auch des Hydrats

$$KV^3O^8 + 3\,aq.$$

welches sich aus der sauren Flüssigkeit als krystallinisches braunes, in Wasser unlösliches Pulver abgeschieden hatte.

	a.	b.			
Vanadin.	40.51	40.84	3 V	= 154.2	= 41.10
Kalium .	10.35		K	39	10.39
Wasser .	14.81	14.88	8 O	128	
			$3H^2O$	54	= 14.39
				375.2.	

Vanadinsaures Natron.

1. Drittelvanadat.

Direct dargestellt, bildet Na^3VO^4 eine weisse krystallinische Masse. ROSCOE erhielt aus ihrer Lösung feine Nadeln von

$$Na^3VO^4 + 16\,aq.$$

2. Halbvanadat.

Die Drittelvanadate von Kalium und Natrium verhalten sich gegen Wasser ganz gleich: sie werden in Halbvanadat und freie Basis zersetzt, wie ROSCOE dies beim Natronsalz zuerst beobachtete.

Die farblosen, durchsichtigen Krystalle des Halbvanadates enthalten 18 Mol. Wasser.

$$Na^4V^2O^7 + 18\,aq,$$

welche Formel bereits ROSCOE aufstellte, und die auch aus meinen und NORBLAD's Versuchen folgt.

	R.	N. a.	N. b.		
Vanadin . . .	15.72	16.15		$2\,V = 102.8$	$= 16.30$
Natrium . . .		14.77	14.68	$4\,Na = 92$	$= 14.59$
Wasser . . .	51.36	51.59	51.86	$7\,O = 112$	
				$18\,H^2O = 324$	$= 51.36$
				630.8.	

Die Krystalle gehören dem sechsgliedrigen System an. Es sind Combinationen zweier Dihexander, des ersten Prismas und der Endfläche.

$d = a : a : \infty a : c$ $\quad p = a : a : \infty a : \infty c$

$d^2 = a : a : \infty a : 2c$ $\quad c = c : \infty a : \infty a : \infty a$

$$a : c = 1 : 0.962.$$

		Berechnet.	Beobachtet.
d	2A =	136° 22′	
	2C =	96 0	96° 30′
d^2	2A =	125 44	
	2C =	131 36	
c : d =			* 132 0
d^2 =		114 22	114—115°
p : d =		138 0	
d^2 =		155 48	156 ungef.

Sie bilden sehr dünne Tafeln nach c, an deren Rändern die übrigen Flächen erscheinen, welche etwas matt sind. Da die Krystalle an der Luft verwittern, so sind genaue Messungen nicht möglich.

Sie sind optisch einaxig und geben das Interferenzbild solcher Krystalle sehr schön.

Hiernach ist NORBLAD's Angabe, sie seien zwei- und eingliedrig, zu berichtigen.

3. Normales Salz.

In Ermangelung eigener Versuche bemerke ich bloss, dass

$$NaVO^3$$

von ROSCOE sowohl, wie von NORBLAD dargestellt wurde. Letzterer sättigte die Lösung des Halbvanadats mit Kohlensäure, dampfte ab und zog das Natroncarbonat durch Wasser aus, löste den Rest in heissem Wasser und erhielt durch langsames Verdampfen in der Wärme mikroskopische Krystalle. Auch aus dem Divanadat und Natronlauge stellte er das Salz dar. Er fand

	a.	b.		
Vanadin . .	39.19	38.94	V = 51.4	= 42.00
Natrium . .	19.53		Na = 23	= 18.79
			3O = 48	
			122.4.	

Die Vanadinbestimmungen können mithin nicht richtig sein.

Auch ein Hydrat

$$NaVO^3 + 2\,aq$$

hat NORBLAD beim Verdunsten der Lösung über Schwefelsäure in warzenförmig gruppirten Prismen erhalten. Auch nach dem Schmelzen, wobei es ein Aufglühen wie die Säure selbst zeigt, löst es sich, obwohl langsam, in Wasser.

	a.	b.		
Vanadin . .	32.34	32.49	V = 51.4	= 32.45
Natrium . .	15.12	14.84	Na = 23	= 14.52
Wasser . . .	22.03	22.11	3O = 48	
			$2H^2O$ = 36	= 22.73
			158.4.	

4. Anderthalbfach saures Salz.

Fügt man zur Lösung des Halbvanadats Essigsäure bis zur intensiven Färbung, so schiessen beim Verdunsten schöne rothe Krystalle an, welche

$$Na^4V^6O^{17} + 16\,aq$$

sind.

	a.	b.		
Vanadin	32.46	32.06	6V = 308.4	= 32.11
Natrium	9.19	9.49	4Na = 92	= 9.58
			17O = 272	
			$16H^2O$ = 288	= 30.00
			960.4.	

Die Krystalle gehören dem eingliedrigen System an. Es sind eingliedrige Dodekaide, gebildet aus den Flächen

$$p = a : b : \infty c \quad q = b : c : \infty a \quad r = a : c : \infty b$$
$$p' = a : b' : \infty c \quad q' = b' : c : \infty a \quad r' = a' : c : \infty b,$$

zu denen sich die Endfläche $c = c : \infty a : \infty b$ und die Fläche $\frac{q'}{2} = 2b' : c : \infty a$ gesellen. Sie sind mitunter tafelartig nach c, und gewöhnlich ist die Zone c, r, r' die herrschende, während p und p' nur als Abstumpfung der Ecken erscheinen.

Hr. WEBSKY hat die Güte gehabt, die Krystalle zu messen und zu berechnen und ich füge einige eigene minder genaue Messungen hinzu.

$$a : b : c = 0.9189 : 1 : 1.025$$
$$A = 83° 44' \quad \alpha = 83° 52'$$
$$B = 91\ 49 \quad \beta = 91\ 19$$
$$C = 94\ 41 \quad \gamma = 94\ 31.$$

	Berechnet.	Beobachtet. W.	Beobachtet. R.
$p : p' =$	94° 34'		94° 10'
$q : q' =$	88 24.5		
$c : q =$		*137° 25.5'	137 30
$q' =$		*133 31	
$q' : \frac{q'}{2} =$	150 28		
$r : r' =$	96 6		
$c : r =$		*130 57	130 40
$r' =$		*132 57	133 0
$c : p =$	93 3	92 47	
$p' =$	84 38	84 57	
$p' : q =$	123 3	123 4	123 20
$q' =$	118 3	118 13	118 20
$r =$	120 42	120 53	120 45
$r' =$	128 9.5	128 8	
$q : r =$	116 16		116 20
$q' : r' =$		*113 47.5.	

Sie verwittern an der Luft und zerfallen zu einem helleren Pulver.

Das wasserfreie Salz ist nach dem Schmelzen braunschwarz und löst sich weder in Wasser noch in Säure oder Ammoniak auf.

NORBLAD erhielt bei der Darstellung des Divanadats mehrmals Krystalle derselben Sättigungsstufe, jedoch nur 10 Mol. Wasser[1] enthaltend,

[1] Im schwedischen Original ist die Formel stets unrichtig, mit $9H^2O$, angegeben.

$$Na^4V^6O^{17} + 10aq.$$

	a.	b.			
Vanadin	35.70	35.81	6 V =	308.4	= 36.18
Natrium		10.73	4 Na =	92	= 10.80
Wasser	20.80	20.76	17 O =	272	
			$10H^2O$ =	180	= 21.12
				852.4.	

5. Zweifach saures Salz.

Bei meinen Versuchen hat es sich niemals gezeigt, jedoch wird es von Hauer und von Norblad beschrieben. Ersterer sagt, es sei leichtlöslich und bilde grosse Krystalle, deren Form er indess nicht bestimmt hat. Schon Berzelius führt an, das zweifach vanadinsaure Natron bilde grosse orangerothe Krystalle, welche an der Luft verwittern, allein diese Angaben passen eben so gut auf das andertbalbfach saure Salz.

Hauer's Analyse und zwei Wasserbestimmungen Norblad's, welcher den bekannten (?) Eigenschaften des Salzes nichts hinzuzufügen hat, führen zu

$$Na^2V^4O^{11} + 9aq.$$

	H.	N. a.	N. b.			
Vanadin ...	34.63			4 V =	205.6	= 34.87
Natrium ...	7.50			2 Na =	46	= 7.80
Wasser ...	27.72	27.73	27.96	11 O =	176	
				$9H^2O$ =	162	= 27.48
					589.6.	

6. Fünfhalbfach saures Salz.

Wird eine concentrirte warme Lösung des Halbvanadats mit einem starken Überschuss von Essigsäure versetzt, so bildet sich eine braunrothe, deutlich krystallinische Fällung eines in Wasser kaum löslichen Salzes

$$2\,Na^4V^{10}O^{27} + 7aq.$$

Vanadin	46.73	10 V =	514	= 46.68
Natrium	8.17	4 Na	92	= 8.35
Wasser	5.75	27 O	432	
		3.5 H^2O	63	= 5.72
			1101.	

7. Achtdrittelfach saures Salz.

Ich selbst habe kein saureres Natronsalz darzustellen vermocht als das vorige. NORBLAD beschreibt als Trivanadat mit 4.5 Mol. Wasser ein in jeder Hinsicht ähnliches; allein seine Analysen thun dar, dass darin Na : V nicht = 1 : 3, sondern = 1 : $2^2/_3$ ist. Es entspricht ihnen die Formel

$$Na^6V^{16}O^{43} + 24aq.$$

	a.	b.		
Vanadin	39.88	39.42	$16V = 822.4$	= 39.53
Natrium	6.63	6.70	$6Na = 138$	= 6.63
Wasser		20.47	$43O = 688$	
			$24H^2O = 432$	= 20.77
			2080.4.	

Vanadinsaures Lithion.

BERZELIUS sagt, er habe zwei leichtlösliche Salze erhalten, das neutrale, welches farblos sei und in strahligen Krystallgruppen anschiesse, und das zweifach saure, welches grosse orangerothe, an der Luft verwitternde Krystalle bilde. Die Zusammensetzung dieser Salze scheint BERZELIUS nicht untersucht zu haben.

Ich werde nun die Lithionvanadate beschreiben, welche ich erhalten habe, und bemerke zunächst, dass die Darstellung der basischeren durch Schmelzen von Vanadinsäure mit kohlensaurem Lithion besser geschieht, wenn man statt dieses das salpetersaure Salz verwendet.

1. Drittel vanadinsaures Lithion.

Beim Erhitzen von 1 Mol. Vanadinsäure mit 3 Mol. Lithioncarbonat tritt auch in der Glühhitze keine Schmelzung ein. Das gelbe Pulver ist in Wasser unlöslich. (1.)

Auch beim Schmelzen der Säure mit weniger als 6 Mol. Lithionnitrat bildet sich eine gewisse Menge dieses basischsten Salzes, welches beim Auskochen mit Wasser ungelöst bleibt. (2.)

Zur Analyse wurden die Proben in verdünnter Salpetersäure gelöst.

	1.	2.
Vanadin	37.81	37.63
Lithium	15.10	15.01
Wasser	0.50	0.97

Li^3VO^4

V =	51.4 =	37.61
$3Li$ =	21.0 =	15.39
$4O$ =	64.0	
	136.4.	

2. Halbvanadinsaures Lithion.

Die Schmelze von 1 Mol. Vanadinsäure und 4 Mol. Lithionnitrat liefert eine Lösung, aus welcher sich nach freiwilligem Verdunsten bis zum anfangenden Dickflüssigwerden weisse Krystallmassen von undeutlicher Form abscheiden. 1.569 gaben 0.893 V^2O^5 und 1.174 Li^2SO^4. Hieraus folgt

$Li^4V^2O^7 + 4$ aq.

Vanadin	32.04	$2V = 102.8$	$= 32.66$
Lithium	9.52	$4Li = 28.0$	$= 8.90$
		$7O = 112$	
		$4H^2O = 72$	
		314.8.	

3. Zweidrittel vanadinsaures Lithion.

Aus der Lösung des Drittel-Vanadats in möglichst wenig Salpetersäure erhielt ich weisse feinstrahlige Krystallgruppen, welche sich in Wasser nicht ganz leicht lösen.

Die Analysen beziehen sich auf Proben von verschiedener Darstellung und führen zu

$Li^6V^4O^{13} + 15$ aq

	1.	2.		
Vanadin ...	28.63	27.84	$4V = 204.8$	$= 28.26$
Lithium ...	5.69	5.82	$6Li = 42$	$= 5.80$
			$13O = 208$	
			$15H^2O = 270$	$= 37.25$
			724.8.	

4. Einfach vanadinsaures Lithion.

Die Schmelze von 1 Mol. Säure und 1 Mol. Lithioncarbonat löst sich in Wasser und liefert im Exsiccator eine gelblichweisse krystallinische Salzmasse. In Wasser ziemlich leicht löslich.

a) 2.68 verloren beim Erhitzen 0.716 und schmolzen zu weisser krystallinischer Masse.

b) 1.399 lieferten 0.895 V^2O^5 und 0.606 Li^2SO^4.

Hiernach ist das Salz

$LiVO^3 + 2$ aq

Vanadin	36.00	$V = 51.4$	$= 36.10$
Lithium	5.51	$Li = 7$	$= 4.92$
Wasser.....	26.72	$3O = 48$	
		$2H^2O = 36$	$= 25.28$
		142.4.	

5. Sechsfünftel vanadinsaures Lithion.

Eine mit wenig Essigsäure versetzte rothe Lösung des vorigen lieferte erst bei sehr starker Concentration durchsichtige rothe Krystalle, welche sich, weil sie rasch verwitterten, nicht genauer bestimmen liessen. Dieses Salz ist sehr leicht löslich. 2.89 gaben 1.785 V^2O^5 und 0.892 Li^2SO^4. Hiernach ist es

$$Li^{10}V^{12}O^{35} + 30\,aq$$

Vanadin	34.73	12 V = 616.8	= 34.52
Lithium	3.93	10 Li = 70	= 3.92
		35 O = 560	
		30 H^2O = 540	
		1786.8.	

6. Vierdrittel vanadinsaures Lithion.

Aus Lösungen von normalem und Drittelvanadat in verdünnter Essigsäure wurden kleine rothe durchsichtige Krystalle eines ziemlich leichtlöslichen Salzes erhalten, welches der Analyse zufolge

$$Li^6V^8O^{23} + 12\,aq$$

ist. Denn 1.616 gaben 1.136 V^2O^5 und 0.524 Li^2SO^4

Vanadin	39.53	8 V = 411.2	= 39.65
Lithium	4.12	6 Li = 42	= 4.05
		23 O = 368	
		12 H^2O = 216	= 20.82
		1037.2.	

Die Form der Krystalle ist wegen ihrer geringen Grösse und weil sie vielfach mit einander verwachsen sind, schwer zu bestimmen. Sie scheinen dem eingliedrigen System anzugehören und bilden ein vollständiges Dodekaid mit den Hexaidflächen a.

$p = a : b : \infty c$ $q = b : c : \infty a$ $r = a : c : \infty b$

$p' = a : b' : \infty c$ $q' = b' : c : \infty a$ $r' = a' : c : \infty b$.

Nach p, a, p' sind sie prismatisch verlängert. Approximative Messungen ergaben:

$p : p'$	= 130° 30′	$p : q'$	= 121° 30′
a	= 107 30	$p' : q$	= 131 40
$p' : a$	= 121 50	$p : r$	= 105 0
$a : r$	= 123 30	$q : r$	= 130 0
r'	= 105 15	$q' : r$	= 132 0
$r : r'$	= 131 40	$q : a$	= 99 45.
$p : q$	= 128 6		

7. Anderthalbfach vanadinsaures Lithion.

Der farblosen Lösung von normalem Vanadat wurde etwas Salpetersäure hinzugefügt, die rothe Flüssigkeit gab beim Verdunsten das Salz in rothen Krystallen. Es ist

$$Li^4V^6O^{17} + 15\,aq.$$

Aus 1.988 wurden 1.258 V^2O^5 und 0.477 Li^2SO^4 erhalten

Vanadin	35.58	$6\,V = 308.4$	$= 35.11$
Lithium	3.05	$4\,Li = 28$	$= 3.19$
		$17\,O = 272$	
		$15\,H^2O = 270$	
		878.4.	

Die Krystalle erscheinen als Prismen p, deren scharfe Kante durch a abgestumpft ist. Die Flächen der Endigung, meist schlecht ausgebildet, sind eine herrschende schiefe Endfläche c, eine sehr kleine hintere r′ und zwei schmale Abstufungen der scharfen Kanten p c. Da die Flächen ihren Glanz sehr bald einbüssen, lassen sich die Winkel nur annähernd messen. Danach scheinen die Krystalle eingliedrig zu sein.

Beobachtet.

$p : p' = 80^\circ$	$c : r' = 134^\circ$
$a = 130$	$c : o = 129$
$c : p = 119$	$o' = 131$
$p' = 94$	$o : p' = 135$
$a : c = 107$	$o' : p = 110\frac{1}{2}$
$r' = 120\frac{3}{4}$	

Bei einem gleichen Versuch wurden kleine rothe Krystalle gewonnen, dasselbe Salz, jedoch mit nur 11 Mol. Wasser

Vanadin	37.76	$6\,V = 308.4$	$= 38.24$
Lithium	3.66	$4\,Li = 28$	$= 3.47$
		$17\,O = 272$	
		$11\,H^2O = 198$	
		806.4	

Ferner ist hervorzuheben, dass sich aus einer essigsauren Lösung des normalen Salzes ein braunrothes Salz absetzte, welches nur 3 Mol. Wasser enthielt.

0.662 = 0.545 V^2O^5 und 0.230 Li^2SO^4

Vanadin	46.30	$6\,V = 308.4$	46.56
Lithium	4.42	$4\,Li = 28$	4.23
		$17\,O = 272$	
		$3\,H^2O = 54$	$= 8.15$
		662.4.	

Bei 100° verliert das Salz 1 Mol. Wasser = 2.71 (gefunden 2.87) Procent.

8. Fünfdrittelfach vanadinsaures Lithion.

Beim Erhitzen der Mutterlauge von $Li^6V^8O^{23} + 12\,aq$ auf dem Wasserbade schied sich ein körniges orangerothes Salz in reichlicher Menge ab, welches in kaltem Wasser sehr schwer löslich ist und sich als

$$Li^3V^5O^{14} + 7\,aq$$

zu erkennen gab.

1.375 = 1.007 V^2O^5	und	0.354 Li^2SO^4
Vanadin 41.19		$5\,V = 257 = 40.92$
Lithium 3.28		$3\,Li = 21 = 3.34$
		$14\,O = 224$
		$7\,H^2O = 126 = 20.07$
		628.

Als zweifach saures Salz, dessen Darstellung mir nie gelang, beschreibt NORBLAD ein aus essigsaurer Lösung beim Abdampfen bis zur Syrupsconsistenz erhaltenes orangerothes Krystallpulver, welches beim Umkrystallisiren grössere Krystalle bildet, über deren Form er jedoch nichts mittheilt. Sie verwittern schnell. Dies ist jedoch keineswegs ein Divanadat, sondern das von mir beschriebene Fünfdrittelvanadat mit 12 Mol. Wasser,

$$Li^3V^5O^{14} + 12\,aq$$

	a.	b.	
Vanadin	36.36	36.29	$5\,V = 257 = 35.80$
Lithium	2.90	3.06	$3\,Li = 21 = 2.92$
Wasser	29.12	29.11	$14\,O = 224$
			$12\,H^2O = 216 = 30.08$
			718.

Kaum eine andere Säure bietet so zahlreiche Sättigungsstufen in ihren Salzen dar, wie die Vanadinsäure, denn es sind deren nicht weniger als 18 bekannt, obwohl einige wenige noch zweifelhaft sein dürften. In dieser Hinsicht steht sie der Molybdänsäure und der Wolframsäure nahe. Wenn die von HAUER und GERLAND beschriebenen Körper nicht ein Hydrat des Anhydrids, $V^2O^5 + H^2O$, sondern wirklich Vanadinsäure sind, so ist dieselbe, HVO^3, entsprechend der Metaphosphorsäure.

Allein mit den Phosphaten lassen sich die Vanadate direct nicht vergleichen, wenngleich die $R''^3P^2O^8$ und die $R''^3V^2O^8$, gleichwie die $R''^4V^2O^9$ und die $R''^4P^2O^9$ isomorph sind. Denn es fehlt das Analogon der Phosphorsäure, und die Salze R'^3VO^4 von Kalium und Natrium

zersetzen sich durch Wasser nicht in freie Basis und HR'^2VO^4, sondern es resultirt ein minder basisches Salz, welches kein chemisch gebundenes Wasser enthält, und also nicht einem Phosphat, sondern einem Pyrophosphat analog zusammengesetzt ist. Ferner ist die grosse Zahl saurer Vanadate charakteristisch für die Säure und entfernt sie weit von der Phosphorsäure.

Um eine bestimmte Nomenclatur zu ermöglichen, ist in der vorliegenden Arbeit die Sättigungsstufe $R'VO^3 = R''V^2O^6$ als die normale oder einfache bezeichnet worden.

Als selbständig glaube ich blos folgende Sättigungsstufen betrachten zu dürfen:

Basische

$R'^8V^2O^9 = R''^4V^2O^9$ = Viertel-V.
$R'^3VO^4 = R''^3V^2O^6$ = Drittel-V.
$R'^4V^2O^7 = R''^2V^2O^7$ = Halb-V.

$R'VO^3 = R''V^2O^6$ = Normale V.

Saure

$R'^2V^4O^{11} = R''V^4O^{11}$ = Zweifach-V.
$R'V^3O^8 = R''V^6O^{16}$ = Dreifach-V.

Alle übrigen sauren Salze erscheinen dann als Verbindungen theils von normalen und zweifach sauren, theils als solche von zweifach und dreifach sauren, gleichwie dies für abnorm zusammengesetzte Molybdate, Wolframiate, Silicate u. s. w. angenommen werden kann.

II.

Über vanadinsaures Vanadinoxyd.

Bekanntlich hat Berzelius schon Verbindungen gleichen Namens beschrieben, welche jedoch noch nicht näher untersucht sind.

Beim Glühen einer schwarzen oxydhaltigen Vanadinsäure mit kohlensaurem Lithion blieb beim Lösen in Wasser ein schwarzer Rückstand, aus mikroskopischen Krystallen bestehend, der nur eine Spur Lithium enthielt.

Die Substanz löst sich in verdünnter Schwefelsäure oder in Salpetersäure mit blaugrüner Farbe und die Lösung giebt mit Ammoniak einen schwarzen Niederschlag und ein farbloses Filtrat.

0.687 gaben 0.711 V^2O^5 = 103.5 Procent = 58.20 V.

0.57 in schwefelsaurer Lösung ergaben mit übermangansaurem Kali 0.0244 O = 4.28 Procent.

Mithin ist die Verbindung

$$V^4O^9 = V^2O^5 + 2VO^2$$

Vanadin . . .	58.20	$4V = 205.6$	=	58.81
Sauerstoff . .	41.32	$9O = 144$	=	41.19
	99.52	349.6		100.

III.

Über die Pyrophosphate des Natrons.

I. Normales.

In Betreff dieses wohlbekannten Salzes, $Na^4P^2O^7 + 10aq$, sei nur bemerkt, dass seine Krystalle mitunter ein früher nicht beobachtetes vorderes Augitpaar a : b : $^1/_2$c aufweisen, und dass sie theils nach c und dem Flächenpaar q, theils nach der Verticalzone oder den Flächen c, r, r′ prismatisch sind, letzteres namentlich dann, wenn sie aus Mutterlaugen des folgenden, die freie Essigsäure enthalten, anschiessen.

II. Saures.

GRAHAM zeigte, dass saures phosphorsaures Natron, H^2NaPO^4, durch passendes Erhitzen sich in das Pyrophosphat $H^2Na^2P^2O^7$ verwandelt. Er führt dann nur noch an, es sei sehr löslich und reagire sauer.

In seiner Abhandlung über die pyrophosphorsauren Salze[1] beschreibt SCHWARZENBERG die Darstellung dieses Salzes durch Auflösen des normalen in Essigsäure und Zusatz von Alkohol. Der krystallinische Niederschlag ist nach ihm $H^2Na^2P^2O^7$

	berechnet.		gefunden.
$2Na =$	$46 = 20.72$		20.40
$2P =$	$62 = 27.93$		27.57
$2H =$	$2 = 8.11$	H^2O	8.43
$7O =$	112		
	222.		

Ich versetzte die Lösung von normalem Pyrophosphat in der Wärme mit Essigsäure und erhielt dadurch das Salz beim Abkühlen in sehr ausgezeichneten Krystallen. Seine Zusammensetzung ergeben folgende Analysen:

1. 2.134 verloren beim Glühen 0.804 Wasser.
2. 2.442 verloren 0.92. Der Rest, mit kohlensaurem Natron geschmolzen, lieferte 1.684 $Mg^2P^2O^7$.
3. 2.925 verloren 1.117 und gaben 2.0 $Mg^2P^2O^7$.

[1] Ann. d. Chem. u. Pharm. 65, 133.

	Gefunden.		
	1.	2.	3.
Phosphor		19.22	19.09
Wasser	37.68	37.67	38.19.

Es ist mithin ein Hydrat mit 6 Mol. Wasser,

$$H^2Na^2P^2O^7 = 6\,aq.$$

$$\begin{aligned} 2\,Na &= 46 = 13.94 \\ 2\,P &= 62 = 18.80 \\ 7\,O &= 112 \\ 2\,H &= 2 = 5.46\,H^2O \\ 6\,aq &= 108 = 32.72\,aq \end{aligned} \Big\} 38.18$$

330.

Die Krystalle verwittern an der Luft sehr bald. Über Schwefelsäure verlieren sie sämmtliches Krystallwasser, denn eine Probe hatte hierbei 31.66 Procent verloren, und gab dann beim Schmelzen noch 6.37 ab. Das Metaphosphat bildet ein klares Glas (Hexametaphosphat).

Die Krystalle, oft von ziemlicher Grösse, farblos und durchsichtig, gehören dem zweigliedrigen System an und sind Combinationen von

$$o = a : b : c$$

$$\frac{o}{3} = a : b : {}^1/_3 c$$

$$q = b : c : \infty a$$

$$b = b : \infty a : \infty c$$

$$c = c : \infty a : \infty b$$

$$a : b : c = 0.492 : 1 : 1.647$$

		berechnet.	beobachtet.
o	$2A =$		* 129° 30
	$2B =$	59° 50′	59 23
	$2C =$		* 150 0
$\frac{o}{3}$	$2A =$	139 46	139 30
	$2B =$	91 16	
	$2C =$	102 24	
$q : q =$		62 32	62 35
$b =$		148 44	147 30
$c =$		121 16	121 25
$o : b =$		115 15	115 15
$c =$		105 0	105 0
$q =$		119 55	120 0
$\frac{o}{3} : b =$		110 7	
$c =$		128 48	128 35
$o =$		156 12	156 15.

Spaltbar vollkommen nach c. Die Flächen o, q, c sind die herrschenden.

Aus der Mutterlauge dieser Krystalle beginnt sehr bald die Ausscheidung eines fein-krystallinischen Salzes, bald in grösserer, bald in geringerer Menge, welches sich als ein Doppelsalz vom normalem und saurem Pyrophosphat zu erkennen giebt. Unter Umständen (bei geringerem Gehalt der Flüssigkeit an Essigsäure) beobachtet man es auch vor der Bildung des krystallisirten Hydrats.

1. 1.762 verloren beim Glühen 0.289 und hinterliessen einen geschmolzenen weissen Rückstand.

2. 2.806 verloren 0.456 und gaben 2.219 $Mg^2P^2O^7$.

3. 1.82, welche zuvor im Wasserbade kurze Zeit getrocknet worden, verloren 0.27 und gaben 1.43 $Mg^2P^2O^7$.

	1.	2.	3.
Phosphor		22.09	21.95
Wasser	16.40	16.25	14.83.

Diese Zahlen entsprechen einer Verbindung

$$Na^6P^4O^{13} + 5H^2O = \left.\begin{matrix} Na^4P^2O^7 \\ H^2Na^2P^2O^8 \end{matrix}\right\} + 4aq.$$

$6Na$	$= 138$	$= 24.64$
$4P$	$= 124$	$= 22.14$
$13O$	$= 208$	
$3H^2O$	$= 90$	$= 16.08$
	$560.$	

No. 3 hatte etwas Wasser verloren, und in der That bleiben nach längerem Trocknen bei 100° nur 2aq im Salze, denn 1.883 einer derartigen Probe verloren beim Glühen 0.218 und gaben 1.56 $Mg^2P^2O^7$.

$$\left.\begin{matrix} Na^4P^2O^7 \\ H^2Na^2P^2O^7 \end{matrix}\right\} + 2aq.$$

	Berechnet.		Gefunden.
$6Na$	$= 138$	$= 26.34$	
$4P$	$= 124$	$= 23.66$	22.96
$13O$	$= 208$		
$3H^2O$	$= 54$	$= 10.30$	$= 11.58$
	$524.$		

Eine andere Probe gab 10.66 und 11.04 Wasser.

Das Salz verliert das Krystallwasser bei 200°—250°.

Beim Lösen wird es theilweise in beide Salze zersetzt, denn die kleinen prismatischen Krystalle, welche später anschiessen, sind das normale Pyrophosphat, scheinen aber nur 8 Mol. Wasser zu enthalten.

	Gefunden.	Berechnet. $Na^4P^2O^7 + 2\,aq$
Na		22.44
P	15.67	15.12
H^2O	35.70	35.12.

Doch waren sie vielleicht etwas verwittert, da eine andere Probe 14.52 Phosphor und 40.0 Wasser, also 10 aq ergeben hat.

Einmal bildete sich nach diesem Doppelsalze eine ihm sehr ähnliche krystallinische Abscheidung des von SCHWARZENBERG beschriebenen wasserfreien sauren Pyrophosphats, denn die Analyse gab 26.45 Phosphor und 9.51 Wasser.

Nach Abscheidung der beschriebenen Salze krystallisirt aus den Mutterlaugen immer noch unverändertes normales Pyrophosphat, jedoch in feinen Prismen, welche von der Verticalzone der gewöhnlichen Form gebildet werden. No. 1 ist eine Analyse derselben, No. 2 eine solche von den gewöhnlichen Krystallen des Salzes.

	1.	2.	$Na^4P^2O^7 + 10\,aq$
Na			20.63
P	14.03		13.90
H^2O	41.67	40.36	40.36.

Die letzten undeutlichen Krystallanschüsse aus der essigsauren Mutterlauge enthalten phosphorsaures Natron, da sie Silbersalze gelb fällen.

Pyrophosphorsaures Ammoniak — Natron.

SCHWARZENBERG erhielt durch Neutralisiren der Lösung des sauren Pyrophosphats mit Ammoniak Krystalle von

$$Na^2Am^2P^2O^7 + 6aq.$$

Ich habe ihre Form näher untersucht. Sie gehören dem zwei- und eingliedrigen System an und stellen Combinationen von

$$p = a : b : \infty c$$
$$r = a : c : \infty b$$
$$r' = a' : c : \infty b$$
$$a = a : \infty b : \infty c$$
$$a : b : c = 1.8606 : 1 : 1.2635$$
$$o = 81^\circ\ 51'$$

dar.

	Berechnet.	Beobachtet.
$p : p =$	$57^\circ\ 0'$	$57^\circ\ 0'$
$a =$		$^*118\ 30$
$r : r' =$		$^*111\ 50$
$a : r =$		$^*118\ 30$

	Berechnet.	Beobachtet.
$a : r' =$	129° 40′	129° 50′
$p : r =$	107 44	107 40
$r' =$	103 10	104 ungef.

Sie sind prismatisch nach der Verticalzone, und mit r oder r′ aufgewachsen. An der Luft verwittern sie allmälig.

IV.

Über Lithionpyrophosphate.

Versetzt man eine Lösung von pyrophosphorsaurem Natron mit Chlorlithium, so entsteht nach NAHNSEN und CUNO[1] bei Vorherrschen des Lithionsalzes ein Niederschlag, welcher ein Gemisch der Pyrophosphate beider Metalle ist und in welchem ihr gegenseitiges Verhältniss sehr variirt.

Mithin ist das Verhalten hier ganz ebenso wie bei Anwendung von gewöhnlichem phosphorsaurem Natron und Zusatz von Ätznatron oder kohlensaurem Natron. Die Niederschläge sind als isomorphe Mischungen zu betrachten.

MERLING fand später[2], dass durch Auflösen einer solchen Pyrophosphatmischung in Essigsäure und Zusatz von Alkohol ein voluminöser Niederschlag entsteht, welcher frei von Natron und reines Lithionpyrophosphat

$$Li^4P^2O^7 + 2\,aq$$

ist. Dies ist richtig, wie folgende Analysen darthun:

	M.	Rg.	Rg.	Berechnet.
Lithium	11.88			11.77
Phosphor	26.23	26.20	26.00	26.05
Wasser	14.55	13.31	13.94	15.13.

Das Salz, ein krystallinisches Pulver bildend, verliert das Wasser bei 200° und schmilzt im Glühen zu einer weissen, undurchsichtigen Masse.

Dagegen liefert die Lösung des pyrophosphorsauren Natron-Lithions (aus 1 Mol. Natronsalz und 6 Mol. essigsauren Lithions gefällt) in Essigsäure beim Verdunsten krystallinische Producte, welche natronhaltig sind.

---

[1] LIEB. Ann. 182, 165.

[2] Ztschr. f. anal. Chem. 18, 563.

	I.	II.	III. Anschuss
Lithium . . .	11.18	7.82	9.59
Natrium . . .	2.23	4.82	7.18
Phosphor . .	25.49	20.24	26.83
Wasser . . .	14.41	30.00	8.97

I. = $R^4P^2O^7 + 2\,aq$ Na : 16 Li
II. = $R^4P^2O^7 + 5\,aq$ Na : 5 Li
III. = $R^4P^2O^8 + aq$ Na : 4 Li.

Berechnet

	I.	II.	III.
Lithium . . .	10.90	7.70	9.62
Natrium . . .	2.24	5.05	7.90
Phosphor . .	25.64	20.49	26.63
Wasser . . .	14.71	29.72	8.73.

Die Darstellung eines sauren Pyrophosphats $H^2Li^2P^2O^7$ aus dem Monophosphat H^2LiPO^4 ist mir nicht gelungen. Wenn letzteres durch Erhitzen sich in jenes verwandelt, muss es 8.65 Procent verlieren. Ein solcher Verlust tritt bei 210° ein.

Als der Rest mit Wasser behandelt wurde, blieb ein kleiner Theil ungelöst, aber dies ergab sich als $Li^4P^2O^7$, denn die Analyse gab gegen 13.6 Li 30.9 P, d. h. 2 Li : P.

Die Lösung, welche sauer reagirte, bildete zuletzt einen dicken Syrup, der beim Verdünnen und Erhitzen ein Salz abschied, welches im Wesentlichen $H^2Li^2P^2O^7 + aq$ zu sein scheint, wie eine Analyse ergab, aber mit Silbersalzen einen gelblichweissen Niederschlag lieferte, mithin nicht rein war.

V.

Saures Thalliumphosphat und Thalliumpyrophosphate.

Auf Lamy's Angabe vertrauend, das Salz H^2TlPO^4 verwandle sich bei 240° in ein amorphes saures Pyrophosphat, erhielt ich über 30 g längere Zeit in einer Temperatur von 250° und beobachtete einen Gewichtsverlust von 2.85 Procent. Da es, um $H^2Tl^2P^2O^7$ zu werden, 3 Procent verlieren muss, wurde die geschmolzene weisse Masse gelöst, und lieferte kleine glänzende Krystalle, welche jedoch Silberlösung gelb färbten und 68.1 Tl, 11.4 P und 5.6 H^2O gaben, also das unveränderte Phosphat waren.

Die Krystalle erlaubten jedoch Messungen, welche ihre Identität mit den von des Cloizeaux bestimmten[1] erweisen. Ich fand

[1] S. mein Handb. der kryst. phys. Chemie 1,519.

(Seitenk.) $o : o' = 150° 45'$
$a : c = 92 0$
$2r = 133 35$
$2r' = 131 0$
$c : 2r = 138 30$
$2r' = 137 0$
$o : a = 105 40$
$o' : a = 103 30$
$c = 123 30$

Dies ist eine Bestätigung meiner früheren Angaben[1].

Pyrophosphate des Thalliums.

I. Normales $Tl^4P^2O^7$.

Wird eine Lösung des folgenden mit einer solchen von Thalliumcarbonat versetzt, und die Flüssigkeit im Exsiccator verdunstet, so schiessen feine durchsichtige Nadeln an, welche die von DES CLOIZEAUX beschriebene Form zeigen, obwohl die Endigung selten gut ausgebildet ist.

Beobachtet
$p : p = 74° 40'$
$p : a = 126 40$
$p : o' = 141—142°$.

Der Glühverlust betrug nur 1.04 Procent.

Von einer Zersetzung durch Wasser, welche LAMY angiebt, habe ich nichts beobachtet. Die Angaben dieses Chemikers über die Eigenschaften des Salzes sind theilweise deshalb ganz falsch, weil er es aus seinem angeblichen HTl^2PO^4 darstellte, welches, wie ich früher nachwies, ein Doppelsalz aus diesem und H^2TlPO^4 war.

Das zwei- und eingliedrige Hydrat mit 2 aq habe ich nicht erhalten.

II. Saures $H^2Tl^2P^2O^7$.

Beim anhaltenden Erhitzen von saurem oder Monothalliumphosphat (H^2TlPO^4) auf 275° betrug der Wasserverlust 3.62 Procent. Die Lösung erstarrte bei freiwilligem Verdunsten zu einer krystallinischen Masse, welche leichtlöslich ist und deren Lösung Silbersalz weiss fällt.

[1] Vergl. Sitzungsberichte der Akad. 1882. S. 283.

1.597 verloren beim Glühen 0.085 und waren zu einem weissen Metaphosphat geschmolzen.

3.393 gaben 2.934 Tl^2SO^4 und 1.19 $Mg^2P^2O^7$.

Das Salz ist mithin

$$H^2TlP^2O^7 - aq.$$

	Berechnet	Gefunden
Thallium	67.77	67.80
Phosphor	10.30	9.49
Wasser	5.98	5.32.

Lässt sagt, durch passendes Erhitzen von H^2TlPO^4 und Auflösen erhalte man undeutliche prismatische, leichtlösliche Krystalle von $H^2TlP^2O^7$, die beim Erhitzen 2.85 Procent verloren. Die Rechnung giebt 2.98 Procent für das wasserfreie Salz. Ein solches hat sich bei meinen Versuchen nicht gebildet.

Darwin und Kopernicus.

Nachruf

von E. du Bois-Reymond.

(Im Anschluss an den Bericht über die Personalveränderungen in der Akademie während des verflossenen Jahres gelesen in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Geburtstages Friedrich's II. am 25. Januar: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. IV]: — ausgegeben am 1. Februar.)

Ungewöhnlich schwere Verluste erlitten während des verflossenen Jahres die physikalisch-mathematischen Wissenschaften. Ein fruchtbarer und erfindungsreicher Mathematiker, der als Herausgeber einer der bedeutendsten Zeitschriften seines Faches ein Menschenalter lang eine leitende Stellung in der französischen Wissenschaft einnahm: der Chemiker, welcher durch die erste organische Synthese das Trugbild der Lebenskraft zerstreuen half: der Physiologe, der ein uraltes Räthsel der Menschheit löste: solcher Männer Verschwinden hinterlässt tief empfundene, nicht sobald auszufüllende Lücken. Aber den Glanz der Namen Liouville, Wöhler, Bischoff überstrahlt der des ersten Namens auf unserer Todtenliste, Charles Darwin. Fast alle gelehrten Gesellschaften der Welt widmeten ihm einen Nachruf. Diese Akademie fand dazu noch keine Gelegenheit. Es scheint geboten, der Erwähnung seines Ablebens einige Worte hinzuzufügen, zum Zeichen, dass auch wir von der Grösse des Mannes, und von der Trauer über sein Hinscheiden durchdrungen sind.

Neues über ihn zu sagen, wird erst nach längerer Zeit wieder möglich sein, nachdem der Fortschritt der Wissenschaft neue Gesichtspunkte eröffnete. Besonders dem Redner, der sich an dieser Stelle schon öfter über Darwin äusserte, wird es schwer, nicht in frühere Gedankenwege zurückzufallen: um so mehr, als nothwendig das Urtheil über seine Lehre jetzt noch subjectiv gefärbt bleibt.

Für mich ist Darwin der Kopernicus der organischen Welt. Im sechszehnten Jahrhundert machte Kopernicus der anthropocentrischen Weltanschauung ein Ende, indem er die Ptolemaeischen Sphaeren vernichtete, und die Erde zum Rang eines unbedeutenden Planeten herabdrückte. Er widerlegte so zugleich den Wahn von einem Aufenthalt himmlischer Geister jenseit der siebenten Sphaere, vom sogenannten Empyreum, wenn auch erst Giordano Bruno diese Folgerung zog.

Noch aber blieb der Mensch abseits von den Thieren stehen; nicht bloss, wie natürlich, über ihnen, sondern als ein besonderes, mit ihnen incommensurables Wesen. Hundert Jahre später erklärte [109] noch DESCARTES die Thiere für Maschinen; eine Seele habe nur der Mensch. Trotz den unermesslichen Arbeiten der Naturbeschreiber seit LINNÉ, trotz der Wiedererweckung der untergegangenen Thiergeschlechter durch CUVIER, herrschte noch vor fünfundzwanzig Jahren über Entstehung und Zusammenhang der Lebewesen eine Theorie, welche an Willkür, Künstlichkeit und Widersinn es mit jenen Epicykeln aufnahm, die dem Könige ALPHONS von Castilien den Ausruf entlockten: »Hätte Gott bei »Erschaffung der Welt mich zu Rathe gezogen, ich hätte sie besser »eingerichtet.«

'*Afflavit Darwinius et dissipata est*' wäre mit Hinblick auf diese Theorie eine passende Umschrift für eine Denkmünze zu Ehren der '*Origin of Species*'. Nun entwickelte sich Alles stätig aus wenigen einfachsten Keimen: nun bedurfte es keiner schubweisen Schöpfungen mehr, nur noch Eines Schöpfungstages, an welchem bewegte Materie ward: nun war die organische Zweckmässigkeit durch eine neue Art von Mechanik ersetzt, als welche man die natürliche Zuchtwahl auffassen kann: nun endlich nahm der Mensch den ihm gebührenden Platz an der Spitze seiner Brüder ein.

Man könnte des KOPERNICUS Lehrjahre in Bologna, sein darauf folgendes Stillleben in Frauenburg mit DARWIN's Weltreise auf dem 'Beagle', seiner nachmaligen Zurückgezogenheit bis zum Augenblick vergleichen, wo Mr. WALLACE's Hervortreten ihn bewog, sein Schweigen zu brechen. Hier aber endet, zum Glück für DARWIN, die Ähnlichkeit.

Mehrere Umstände verbanden sich, um seine That zu ermöglichen, und deren Erfolg zu sichern. Botanik und Zoologie, Morphologie und Entwickelungsgeschichte, Thier- und Pflanzen-Geographie waren so weit gediehen, dass sie allgemeinere Schlüsse verstatteten. LYELL's gesunder Sinn hatte die Geologie von den sie entstellenden Hypothesen gesäubert, und den Grundgedanken des Actualismus in der Wissenschaft eingebürgert. Die alte Lehre von der Erhaltung der Energie war auf neuer Grundlage so gefördert worden, dass an ihrem Faden, wie an dem astronomischer Betrachtung, frühere Zustände des Weltalls in der Idee wiederhergestellt werden konnten, über dessen Dauer man zu ganz anderen Vorstellungen gelangte. Die Lehre von der Lebenskraft war bei näherer Prüfung haltlos in sich zusammengesunken. Einige Jahre zuvor hatte der ungewöhnlich niedrige Wasserstand eines Schweizer Sees zur Entdeckung der Pfahlbauten geführt, aus welcher eine längst im Keime vorhandene Disciplin sich rasch entwickelte, die Prachistorie. Fehlt auch manches Glied der

Kette, die Kunde vom Urmenschen ist doch wohl der Anfang der gesuchten Verbindung zwischen ihm und den Anthropomorphen einerseits, andererseits ihren gemeinschaftlichen Progenitoren. Mit Einem [110] Wort, die Zeit war reif für Verkündung der Abstammungslehre: daher die massenhafte, schnelle Bekehrung zu einer Meinung über die Natur des Menschen, die von der bisherigen mindestens so sehr abwich, wie vom Ptolemaeischen das Kopernicanische System, zu welchem sie die Ergänzung bildet.

Wie anders die Kopernicanischen Geschicke. »Kopernicus,« sagt Poggendorff, »ist und bleibt ein hell leuchtendes Gestirn am Firma»ment der Wissenschaft: allein es ging zu einer Zeit auf, wo der »Horizont noch mannigfach von Nebeln umdüstert war.... Das ptole»maeische Weltsystem war zu alt und stand zu sehr in Ansehen, um »auf einmal verdrängt werden zu können.« Die Kopernicanische Lehre machte daher in den ersten fünfzig Jahren bei den Astronomen wenig Glück, und sogar Tycho Brahe warf sich zu ihrem Gegner auf. Dürfen wir uns wundern, wenn auch Luther sie ablehnte, der Nolaner deren Erweiterung auf dem Scheiterhaufen büsste. Galilei, minder standhaft, gezwungen wurde, sie abzuschwören?

Trotz dem Pessimismus unserer speculativen Philosophen, welche den Fortschritt läugnen zu dem sie nicht beitragen, war Darwin's Loos ein besseres als das des astronomischen Reformators. Während Kopernicus nur mit brechendem Auge noch ein Exemplar seines Buches sah, weil er es, obschon längst vollendet, nicht herauszugeben gewagt hatte, überlebte Darwin das Erscheinen des seinigen um fast ein Vierteljahrhundert. Er war Zeuge der Kämpfe, die anfangs sich um seine Lehre erhoben, ihres wachsenden Erfolges, ihres Triumphes, dem er, glücklich thätig bis zum letzten Tage, durch eine lange Reihe sorgfältig gezeitigter Arbeiten zu Hülfe kam. Während das hl. Officium des Kopernicus Anhänger mit Feuer und Kerker verfolgte, ruht Charles Darwin in Westminster unter seinen Peers, Newton, James Watt und Faraday.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich im Auszuge auf der zweiten Seite des Umschlages der »Sitzungsberichte« abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden Theil des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wurde beschlossen, einen Auszug aus diesen Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herauszugeben. Diese Sonderausgabe wird sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der reinen Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissenschaften in vollständigem Abdruck enthalten, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern oder ihr fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch demselben Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, Reden und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erhalten besondere Paginirung, doch steht auf jeder Seite eingeklammert die entsprechende Seitenzahl der »Sitzungsberichte«, und bei dem Titel jeder Mittheilung die römische Ordnungszahl des Stückes (St.) der Berichte, dem sie entlehnt ist.

Die »Mittheilungen« erscheinen vom 1. Januar 1882 ab bis auf Weiteres in Monatsheften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wird in der Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaften und Instituten, welche bisher die »Monatsberichte« empfingen, steht es frei, statt der vollständigen »Sitzungsberichte« fortan nur die »Mathematischen und naturwissenschaftlichen Mittheilungen aus den Sitzungsberichten« sich zuschicken zu lassen, und sie werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat so bald wie möglich Nachricht zu geben. Wegen des buchhändlerischen Bezuges der »Mittheilungen« siehe unten.

In Commission bei Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann) in Berlin erscheinen:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

Jahrgang 1883. gr. 8. Geheftet. Preis 12 ℳ.

Diese »Sitzungsberichte« erscheinen in Zwischenräumen von acht Tagen, und enthalten sämmtliche zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen und wissenschaftlichen Mittheilungen, welche in den Sitzungen der Akademie gemacht wurden.

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

Jahrgang 1883. gr. 8. Geheftet. Preis 8 ℳ.

Dieselben erscheinen in monatlichen Zwischenräumen und enthalten nur die geschäftlichen und die wissenschaftlichen Mittheilungen aus dem Gebiete der Mathematik wie der Naturwissenschaft im weitesten Sinne, welche in den Sitzungen der Akademie gemacht wurden.

Der Jahrgang 1882 der »Sitzungsberichte« sowie der »Mittheilungen« ist von derselben Buchhandlung zu beziehen.